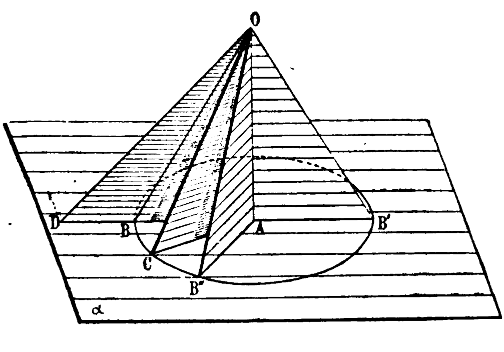
1861 —

G. LAZZERI E A. BASSANI
Professori nella R. Accademia Navale

# ELEMENTI
## DI
# GEOMETRIA

CON 312 FIGURE INTERCALATE

**Seconda edizione migliorata**




LIVORNO
TIPOGRAFIA DI RAFFAELLO GIUSTI
EDITORE-LIBRAIO
1898

G. LAZZERI E A. BASSANI
Professori nella R. Accademia Navale

# ELEMENTI

DI

# GEOMETRIA

CON 312 FIGURE INTERCALATE

Seconda edizione migliorata

LIVORNO
TIPOGRAFIA DI RAFFAELLO GIUSTI
EDITORE-LIBRAIO
1898

W. W. Beman
gt.
6-18-1923

# PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

Quando pubblicammo la 1ª edizione di questo libro, l'idea di fondere nell'insegnamento la geometria piana colla solida era considerata dalla gran maggioranza come un'utopia, e, come tale, i più credevano che non valesse neanche la pena di discuterla.

In pochi anni però questa idea ha fatto molto cammino, malgrado gli ostacoli di ogni maniera, che, come tutte le idee nuove, ha incontrato sulla sua via.

L'associazione Mathesis fra gl'insegnanti di matematica delle scuole medie ha proposto a tutti i professori, come tema di discussione, l'opportunità della fusione suddetta, e in tutte le riunioni tenute ad iniziativa della stessa associazione a Torino, a Palermo, a Firenze ed in altre città è stato proposto di modificare i programmi in modo che sia possibile ad ogni insegnante di scegliere senza troppe difficoltà fra il vecchio ed il nuovo sistema.

Finalmente questo stesso voto è stato espresso nell'elaborato memoriale che il presidente della citata associazione Prof. R. Bettazzi presentò nel Maggio 1897 a Sua Eccellenza il Ministro dell'istruzione pubblica a nome di tutti i soci.

Nè basta; tutti gl'insegnanti, che hanno adottato il nostro libro ci hanno dichiarato di essere perfettamente convinti dei moltissimi vantaggi che ha il metodo della fusione delle due geometrie in confronto dell'antico. Moltissimi poi ci hanno dichiarato d'essere dolenti di non potere adottare il nostro libro per le difficoltà, non sempre disinteressate, che loro si frapponevano.

Come si vede, l'utopia è diventata un'idea, che ha virtù di richiamare l'attenzione e lo studio di quanti si occupano dell'insegnamento; [1] e noi, che da lunghi anni ne siamo fermi e convinti propugnatori per le ragioni che esponemmo nella prefazione alla 1ª edizione di questo libro, ed alle quali non abbiamo da aggiungere nè togliere una sillaba, ci sentiamo assai soddisfatti pensando che il nostro modesto lavoro abbia cooperato a raggiungere questo intento, e siamo orgogliosi che un'opera di questo genere, fatta senza la falsariga dei programmi ministeriali, abbia avuto l'onore di giungere ad una 2ª edizione.

In questa nuova edizione abbiamo poco cambiato dell'antica. Trasportando in principio il postulato di Archimede abbiamo potuto dimostrare il postulato dell'invertibilità di un segmento, di un angolo o di un diedro, e quello dello scorrimento del diedro, seguendo la via tracciata dal signor Gérard.

Alla vecchia dimostrazione delle proprietà dei segmenti staccati su due rette parallele da una serie di trasversali, che passano per un punto, ne abbiamo sostituita una più semplice ed elegante, che ci è stata fornita dall'egregio Prof. Enrico De Amicis.

Infine per ridurre il volume più piccolo, e quindi tale da potersi vendere a un prezzo più mite, abbiamo soppressa qualche parte, che ordinariamente non s'insegna nelle scuole, come per es. l'equivalenza e la misura della superficie e del solido del toro, le proprietà dei centri, assi e piani radicali e dei centri di similitudine. Non nascondiamo che ci siamo decisi con dispiacere a queste soppressioni, perchè i capitoli relativi erano una delle prove più manifeste del grande vantaggio che si ottiene dalla fusione della geometria piana colla solida.

Terminiamo esprimendo la nostra gratitudine ai professori Bettazzi, Marchesini, De Amicis, Catania ed altri, che ci hanno dati amichevoli consigli per migliorare il nostro lavoro.

---

[1] Anche nella dotta Germania comincia ad agitarsi la quistione della fusione della geometria piana colla solida. Infatti nella 44ª riunione dei filologi e insegnanti tedeschi in Dresda dal 29 Sett. al 2 Ottobre 1897 (sezione di scienze matematiche e naturali) il Prof. Dr. *Rohn* della *Tech. Hochscule* di Dresda trattò dell'*Ordinamento delle relazioni spaziali per dedurne teoremi planimetrici*, e mostrò come *passando dallo spazio al piano si trovano dei teoremi, la cui dimostrazione è impossibile nel piano, e come il collegamento delle figure piane e solide sveglia l'interesse degli scolari e forma la loro facoltà intuitiva.* (Vedi *Zeitschrift für mathemathischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, — 28ter Jahrgang, 8 Heft, p. 630).

# PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Nel presentare al giudizio del pubblico questi Elementi di Geometria ci sia permesso di dire poche parole sulle origini di questo libro e sui criteri che ci hanno guidato nel comporlo.

Nel 1886 il primo dei sottoscritti, essendo chiamato ad insegnare la Geometria elementare nella R. Accademia Navale, propose e coll'aiuto della illuminata Direzione ottenne che si modificassero i programmi di quella scuola, inspirando le modificazioni a due concetti fondamentali. L'uno è quello stesso che circa venti anni prima aveva indotto due illustri matematici italiani ad imporre come libro di testo nelle scuole secondarie classiche gli elementi di Euclide, e che i Prof. Sannia e D'Ovidio hanno chiaramente esposto nella prefazione alla 6ª edizione dei loro ottimi Elementi di Geometria colle parole seguenti: « La recisa prescrizione mirava a ricondurre all'antica purezza la trattazione della Geometria razionale elementare, che il Legendre e i suoi imitatori avevano offuscata, adoperando sovente il calcolo aritmetico a dimostrare verità, che poche argomentazioni, fondate sulla semplice intuizione, sarebbero bastate ad accertare nel modo più diretto ed appropriato ».

L'altro concetto, che inspirò le modificazioni suddette, consisteva nell'applicare francamente all'insegnamento la fusione intima e sistematica della Geometria piana colla solida, fusione della quale era stata riconosciuta da tutti l'utilità per la Geometria proiettiva, ma di cui solo da poco tempo il De Paolis (1) aveva per la prima volta in Italia tentato l'applicazione alla Geometria elementare.

Per mettere in pratica i nuovi programmi, il primo dei sottoscritti

(1) De Paolis, *Elementi di Geometria*. Torino, 1884.

preparò un corso di lezioni che, litografato per cura della R. Accademia Navale, ha servito fino ad ora come libro di testo per la medesima. L'esperienza di quattro anni d'insegnamento, fatta da noi e dai nostri colleghi, e gli ottimi risultati avuti in tutto questo periodo di tempo ci hanno convinti della bontà e opportunità del metodo, di maniera che, incoraggiati dalla solerte Direzione degli studi, e desiderosi di rendere l'insegnamento della Geometria sempre più conforme a quello che è il nostro ideale, ci siamo sobbarcati alla non lieve fatica di scrivere, sulle traccie del primitivo abbozzo, il presente Trattato, alla composizione del quale, è d'uopo dichiararlo, ci sono stati di grande aiuto gli ottimi Trattati del De Paolis e del Sannia e d'Ovidio.

Sulla opportunità, anzi sulla necessità di rendere lo studio della Geometria indipendente dall'Aritmetica e dall'Algebra crediamo inutile spendere parole, poichè questa necessità da lungo tempo è stata riconosciuta da quanti si occupano dell'insegnamento delle matematiche; (1) cosicchè son quasi scomparsi dalle Scuole Italiane i molti libri mal pensati e peggio scritti sulle traccie del Legendre, che le infestavano prima del 1867, e pochissimi dello stesso genere ne sono stati pubblicati in seguito. (2)

Fedeli a questo concetto, abbiamo prima di tutto cercato di stabilire ed enunciare rigorosamente i principii fondamentali della Geometria, raccogliendo in un certo numero di Postulati tutte le verità, che bisogna ammettere come primitive, e che servono a individuare gli enti ideali, che sono il soggetto della scienza dell'estensione, facendo sì che queste verità appariscano collegate con ciò che l'intuizione ci mostra avvenire nei corpi reali. (3) In questa parte ci siamo valsi dei consigli del nostro egregio amico e collega Prof. Rodolfo Bettazzi, che ha fatto un accurato studio, ancora

---

(1) Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie Elémentaire.* Paris, 1867. Duhamel, *Des méthodes dans les Sciences de raisonnement.* Paris, 1865.

(2) Avevamo già scritto queste pagine, quando ci è capitata sotto gli occhi una interessante pubblicazione del Prof. Segre (*Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche - Rivista Matematica* - Marzo, 1891), dalla quale ci piace riportare le seguenti parole: " Questi indirizzi *puri* sono veramente della massima importanza. È infatti fuor di dubbio che il matematico non può esser pienamente soddisfatto della conoscenza di una verità, se non quando è riuscito a dedurla colla massima semplicità e naturalezza dal minor numero possibile di proposizioni note, di postulati indipendenti, evitando ogni ipotesi, ogni mezzo di dimostrazione, che non appaia necessaria per lo scopo. Così facendo, si raggiungono spesso coi vantaggi scientifici anche vantaggi didattici, in quanto che dallo studioso si esigerà minor copia di cognizioni preliminari. Oltre a ciò va notato come un fatto generale, che, quando nelle ricerche si adopera un solo strumento, vietandoci espressamente l'uso di ogni altro, si è spesso condotti ad affinare e a perfezionare quello usato, rendendolo così sempre più adatto a nuove scoperte. E fu per tal modo che il metodo sintetico, perfezionatosi nei grandi lavori, con cui si formò la Geometria moderna, riportò trionfi notevolissimi che dimostrano appunto i vantaggi che si hanno dall'uso prolungato di esso ".

(3) A proposito dei Postulati riportiamo le seguenti parole di uno dei più illustri geometri viventi della Germania "... hich die räumliche Anschauung als *etwas wesentlich Ungenaues* ansehe... Das Axiom ist mir nun *die Forderung,* vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung *genaue Aussagen hineinlege* ". (Klein, *Zur Nicht-Euklidiscen Geometrie. - Matematische Aunalen.* - Band XXXVII — 1890).

inedito, sui Postulati della Geometria; ad esso rendiamo qui pubbliche grazie. Malgrado la cura da noi messa nella scelta dei Postulati, non pretendiamo di aver detto l'ultima parola su questa quistione, sia perchè certi concetti sono a tutti così familiari, che qualche volta può accadere di ammettere dei Postulati senza accorgersene, sia perchè, dovendo il nostro libro servire all'insegnamento, non ci era lecito eccedere certi limiti. Confidiamo tuttavia che la scelta da noi fatta sia razionale e completa, quanto lo possono consentire le esigenze didattiche.

Partendo dai postulati ammessi, abbiamo potuto ricavare logicamente da essi, senza alcun sussidio dell'Algebra, tutte le verità della Geometria elementare, riuscendo a rendere indipendenti dalle teorie delle proporzioni e delle misure molte quistioni, che negli altri trattati si fanno dipendere dalle teorie stesse.

Crediamo a questo punto aggiungere qualche altra parola sulla utilità della fusione della Geometria piana colla solida; fusione, che, come tutte le novità, ha avuto strenui propugnatori e validi oppositori.

Veramente questa fusione non è una novità. Fin dagli ultim'anni del secolo scorso Monge, nel suo classico *Traité de Géométrie descriptive,* col quale si può dire che fondasse una scienza nuova, dette i primi esempi della utilità della fusione suddetta, dimostrando coll'aiuto di figure a tre dimensioni molti teoremi relativi a figure piane con una semplicità ed evidenza, dalla quale si resta ben lontani, quando si voglia fare uso di soli elementi del piano. Molti altri, fra i quali ricorderemo Brianchon e Poncelet, sulle traccie del Monge, riuscirono per questa via a fare numerose e importanti scoperte; cosicchè l'uso di questo metodo si è diffuso a poco a poco, ed ormai lo vediamo universalmente applicato in Geometria proiettiva e in Geometria superiore, e lodato e raccomandato dai più illustri Geometri, come Chasles, Bellavitis, Cremona. (1)

La Geometria elementare è stata l'ultima ad utilizzare questo metodo, non perchè essa sia meno suscettibile di trarne profitto, ma forse perchè le menti dei geometri, attratte dalle quistioni nuove, che si presentavano in seguito allo straordinario sviluppo della Geometria superiore negli ultimi cinquant'anni, hanno trovato maggiore soddisfazione nella ricerca di nuove scoperte, anzichè nello studio di perfezionare le antiche; e forse anche perchè le vecchie tradizioni e la consuetudine di oltre venti secoli erano di ostacolo ad una trasformazione radicale dei metodi d'insegnamento. Ma non è per questo meno certa l'utilità del metodo in quistione anche per la Geometria elementare. Fra le figure del piano e quelle dello

---

(1) BELLAVITIS, *Saggio di Geometria derivata.* — CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement de méthodes en Géométrie.* Bruxelles, 1837. — CREMONA, *Prefazione della Geometria Proiettiva,* dove si legge: " l'esperienza mi ha insegnato, ed altri lo aveva già osservato, che le considerazioni " stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere intuitivo ciò che in Geometria piana " sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione; di più esse acuiscono l'intelletto, ecc.... "

spazio esistono molte ed importanti analogie, che non si possono giustamente apprezzare, tenendo separato lo studio del piano da quello dello spazio. Per esempio è evidente che la maggior parte delle proprietà degli angoli e dei diedri, dei poligoni e degli angoloidi, del circolo e della sfera sono somigliantissime, e, se si studiano separatamente, obbligano a ripetizioni inutili. È pure facile a vedersi che, come certi problemi relativi alla retta sono difficili, e talvolta impossibili a risolversi, volendo fare uso soltanto di elementi della retta stessa, mentre invece riescono facilissimi, quando si faccia uso di altri elementi di un piano nel quale giace la retta, così molti problemi relativi ad un piano, difficili, o impossibili a risolversi, quando ci limitiamo alle considerazioni di soli elementi del piano stesso, possono riuscire facili per mezzo della considerazione di altri elementi dello spazio.

Tutto ciò è stato osservato da altri; infatti dal 1844 il Brestschneider (1) pubblicò un trattato, nel quale aveva soppresso la separazione della Geometria piana dalla solida; e già da anni questa separazione è soppressa nelle scuole danesi, nelle quali è molto usato il trattatello dello Steen. (2) Finalmente il De Paolis, (3) e con minor fortuna dopo di lui l'Andriani, (4) hanno tentato d'introdurre questo metodo anche in Italia.

Col nostro libro dunque non abbiamo preteso di fare una novità. La novità consiste soltanto nel fatto di aver messa in pratica per l'insegnamento in uno dei più importanti istituti del Regno, un' idea che, a causa dei Programmi troppo restrittivi del Ministero dell' Istruzione Pubblica, non ha ancora potuto essere attuata nei nostri Licei ed Istituti tecnici. Una novità consiste anche in questo, che, avendo resa la fusione della Geometria piana colla solida più stretta e più intima di quel che era stata resa prima, siamo riusciti a rendere indipendenti dalle teorie delle proporzioni e delle misure molte quistioni, che prima sembravano dipendenti necessariamente da esse.

Quanto alla distribuzione delle materie, abbiamo adottato nelle linee generali quella scelta dal De Paolis, che ci sembra la più razionale; vale a dire nei primi tre Libri abbiamo studiate le proprietà di posizione e di figura delle grandezze, derivanti dal concetto fondamentale dell'eguaglianza; nel quarto Libro abbiamo esposta la teoria delle grandezze equivalenti, e finalmente nel quinto Libro la teoria delle grandezze, proporzionali e delle misure.

A proposito del quinto Libro qualcuno forse osserverà, che in esso,

(1) C. A. Bretschneider, *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht an gymnasien und höheren Realschulen.* Jena, 1844.

(2) A. Steen, *Oversigt over Hovedformerne i Rummet som Inledning til Geometrien.* Anden Udgave. Kjobenhavn, 1868.

(3) De Paolis (loc. cit.)

(4) Andriani, *Elementi di Geometria Euclidea.* Napoli, 1887.

facendo dipendere la teoria delle proporzioni di grandezze dalla teoria delle proporzioni numeriche, non siamo stati fedeli ad uno dei principii, ai quali abbiamo voluto informare il nostro libro, il principio cioè, che le proprietà geometriche non devono aver bisogno del soccorso dell'Aritmetica. Appigliandoci dopo matura riflessione a questa via, abbiamo avuto la persuasione di non esserci messi così in contradizione con noi stessi. Noi crediamo che in Matematica non si possa dire di conoscere bene una verità, se non si è giunti a scoprire ed intendere il significato intrinseco della medesima, e che perciò nell'insegnamento si debba avere sempre in mira di esporre le cose nel modo che riesca meglio a rivelare la loro essenza intima.

Per questa ragione è universalmente riconosciuto per dannoso ed erroneo dal punto di vista didattico il dimostrare le proprietà relative alla posizione e alla equivalenza delle figure per mezzo di considerazioni aritmetiche, perchè, adoperando in tal guisa il concetto di numero, completamente estraneo ad esse, si fa perdere di vista e dimenticare il loro vero significato; e a noi sembra che la medesima ragione debba far ritenere come altrettanto dannoso ed erroneo il voler nascondere sotto veste geometrica una serie di verità, che dipendono essenzialmente dal concetto di numero.

Una proporzione, qualunque sia l'aspetto sotto il quale viene considerata, esprime in sostanza che il risultato del confronto fra due grandezze omogenee, fatto secondo una certa legge, è eguale a quello del confronto fra altre due grandezze pure omogenee, fatto secondo la stessa legge. Questi risultati, considerati in sè, possono essere espressi completamente e chiaramente soltanto per mezzo dell'idea di rapporto, che innegabilmente non può andare disgiunta da quella di numero. Trattando le proporzioni col metodo Euclideo per mezzo degli equimultipli, si è obbligati a rinunziare alla idea esatta di rapporto, che è il fondamento, l'essenza della cosa, e a definire soltanto in modo contorto e laborioso l'eguaglianza di due rapporti. Con ciò si schiva, è vero, di ricorrere esplicitamente all'idea di numero reale nel significato più generale della parola, pur dovendo in ogni modo presupporre la nozione di numero intero; ma anche il fatto della nostra mente, per il quale giungiamo ad intendere l'eguaglianza di due rapporti secondo Euclide, non è esso del medesimo ordine delle astrazioni, che deve fare la nostra mente sulle grandezze in genere per afferrare l'idea di numero? Se l'insufficienza dei mezzi obbligava il padre della Geometria a nascondere così il concetto di numero, in una quistione che dipende essenzialmente da questo concetto, perchè dobbiamo continuare a fare lo stesso oggi che tale insufficienza di mezzi non esiste più, affaticando senza frutto la mente dei giovani?

Il faticoso lavoro intellettuale, al quale sono obbligate le menti dei giovani dallo studio delle proporzioni fatte col metodo degli equimultipli, sarebbe ancora in qualche modo giustificabile, se in un corso completo di

Geometria elementare ci si potesse limitare a considerare i rapporti soltanto dal punto di vista della loro eguaglianza; ma non lo è, se si pensa che lo studio dei rapporti, considerati in sè stessi, ed il modo di determinarli costituiscono uno degli scopi precipui della Geometria elementare; e che un trattato di questa scienza non potrebbe dirsi completo, se non contenesse, come coronamento dell'edifizio, la teoria della misura, che è un caso particolare di quella dei rapporti. Poichè dunque la teoria delle proporzioni non è che una parte della teoria dei rapporti, che essa studia soltanto dal punto di vista della loro eguaglianza, ed è utile principalmente come avviamento alla teoria delle misure, poichè l'idea numerica di rapporto deve in ogni modo essere stabilita, non troviamo nessuna buona ragione per far precedere la definizione di eguaglianza di rapporti a quella di rapporto, aumentando così inutilmente le difficoltà e diminuendo molto la chiarezza.

Queste ed altre simili considerazioni, e l'aver noi trasportati nella teoria dell'equivalenza tutti i teoremi, che si potevano far dipendere da essa, non restando così che un numero molto ristretto di verità dipendenti dalla teoria delle proporzioni, ci hanno indotto a introdurre fino dal principio del 5° Libro il concetto di rapporto di grandezze e con esso l'idea di numero, che in ogni modo avremmo dovuto stabilire poco dopo per la teoria della misura, e poi a studiare le proporzioni come eguaglianze numeriche.

Il Capitolo delle misure ed il seguente servono da ultimo a mostrare il vantaggio, che si ricava dall'uso simultaneo dell'Algebra e della Geometria, purchè l'una non invada il campo dell'altra, ma ambedue sieno adoperate opportunamente per aiutarsi a vicenda.

Nell'esposizione abbiamo procurato sempre di esser brevi ed insieme facili e chiari, purchè la facilità e la chiarezza non fossero a scapito del rigore scientifico. L'insegnamento delle matematiche, oltre allo scopo diretto e immediato di fare apprendere un certo numero di nozioni, che trovano la loro pratica applicazione in molti usi della vita, ha anche l'altro indiretto e mediato, importante quanto il primo, e forse più, di abituare i giovani a ragionare dirittamente, di guisa che la scuola di matematiche deve anche essere una scuola pratica di logica; perciò crediamo molto dannosi quei libri, che, proponendosi unicamente di essere ad ogni costo facili e intelligibili da tutti, abituano la gioventù a ragionare stortamente, e a non apprezzare lo studio, che in ragione della utilità immediata che se ne ricava. D'altra parte crediamo che si debba diffidare di quei libri, che non obbligano a pensare; di quei libri che pretendono sostituirsi in tutto e per tutto all'insegnante, rendendo il suo ufficio poco superiore a quello di una macchina. Destinando questo libro all'insegnamento, noi abbiamo contato sul valido aiuto di un insegnante intelligente e volenteroso, che possa togliere i dubbi e le difficoltà, e spiegare a viva voce quei passaggi, che non potrebbero spiegarsi per disteso in iscritto senza soverchia prolissità.

Ci riterremo ben compensati delle fatiche, che ci costò questo lavoro, se esso varrà ad invogliare gli insegnanti delle scuole secondarie ad adottare la fusione della Geometria piana colla solida nei Licei e negli Istituti tecnici, nei quali, oltre che per le ragioni generali dette sopra, sarebbe consigliata dal coordinamento, che dovrebbe esistere fra i varii insegnamenti. È infatti per esempio assurdo che i giovani del Liceo arrivino al terzo anno senza avere nessuna nozione di Geometria solida, mentre assai prima il professore di Fisica e quello di Scienze Naturali hanno bisogno di presupporre tali nozioni specialmente nella Cosmografia e nella Cristallografia.

La copiosa raccolta di esercizi, messa alla fine di ogni libro, permetterà all'insegnante di fare applicare ai giovani le cose apprese.

Per ciò che riguarda la parte tipografica noteremo che le figure sono state tutte appositamente incise, e che dobbiamo esser grati all'editore R. Giusti per le cure che si è dato, affinchè l'edizione riuscisse più corretta che fosse possibile.

Livorno, Marzo, 1891.

Giulio Lazzeri.
Anselmo Bassani.

# INDICE

## LIBRO QUARTO.



## LIBRO QUINTO.

# PRELIMINARI (*)

1. Per studiare un dato soggetto si cerca di ricavare tutte le verità relative al medesimo, le une come conseguenze delle altre, in modo che partendo da verità fondamentali, delle quali siamo in qualche modo convinti, si giunga a mano a mano a scoprire nuove verità.

Tutte le verità, relative ad un dato soggetto si chiamano le sue *proprietà;* ed un complesso bene ordinato di tutte queste proprietà costituisce la *scienza* di quel soggetto.

L'enunciato delle proprietà necessarie e sufficienti a caratterizzare una cosa, cioè a distinguerla da ogni altra, costituisce la *definizione* di essa. Tutte le altre proprietà della cosa considerata devono allora essere conseguenza della definizione.

Naturalmente non si può definire una cosa, se non ne è già nota in qualche modo l'esistenza, o se l'esistenza di essa non è conseguenza delle proprietà scelte per definizione, quando queste stabiliscano delle relazioni fra essa e altre cose già note. — Ne segue che nello stabilire i fondamenti di una scienza non è possibile definire tutte le cose, e non si può fare a meno di ammettere come note certe idee, certi concetti, che chiameremo *primordiali.*

Tutte le verità che concorrono a formare una Scienza, sono enunciate per mezzo di *proposizioni,* e si distinguono in *assiomi, postulati* e *teoremi.* — Diciamo *assiomi* quelle verità che sono evidenti di per sè stesse; *postulati,* quelle che sono ammesse per comune consenso, e che enunciano quelle proprietà che abbiamo chiamate primordiali; *teoremi,* quelle che per mezzo di ragionamenti si ricavano come conseguenza logica di altre proprietà conosciute.

Le proposizioni, che si ricavano come conseguenza immediata di definizioni, o di una o più altre proposizioni, si dicono *corollari* di queste.

(*) Per la più perfetta intelligenza di queste nozioni sarà opportuno che, per la massima parte, esse sieno esposte non al principio, ma a poco alla volta durante il corso di Geometria, quando le verità geometriche offrano l'occasione di corredarle di esempi opportuni.

Ogni scienza posa sugli assiomi e sui postulati, la scelta de' quali è in gran parte arbitraria.

Se gli enti, che ci proponiamo di studiare, sono puramente ideali, i postulati dovranno soddisfare soltanto alle condizioni di non esser contradditorî agli assiomi e fra loro, e di essere affatto indipendenti gli uni dagli altri; poichè, se qualcuno di essi potesse ricavarsi come conseguenza dei rimanenti, esso sarebbe un teorema e non un postulato. Tutte le conseguenze, che noi potremo ricavare col ragionamento, costituiranno una scienza *logicamente esatta.* Se però la scienza in quistione ha per oggetto degli enti veri e reali, i postulati, che si scelgono, devono essere conformi a ciò che l'osservazione ci mostra essere verificato in tali enti, ed allora le conseguenze, che se ne ricaveranno, costituiranno una scienza non soltanto *logicamente*, ma anche *praticamente esatta.*

**2.** In ogni proposizione si trova il *soggetto* di cui si tratta; l'*ipotesi* o supposizione che si fa sul soggetto; la *tesi* o conclusione, che negli assiomi e nei postulati si ammette, e nei teoremi si ricava come conseguenza della ipotesi.

Il ragionamento, per mezzo del quale si ricava la tesi come conseguenza dell'ipotesi, dicesi *dimostrazione* del teorema.

Dall'enunciato di una proposizione si possono ricavare altri tre enunciati: 1° scambiando tra loro la ipotesi e la tesi; 2° sostituendo alla ipotesi ed alla tesi le loro contradditorie; 3° sostituendo alla ipotesi la contradditoria della tesi ed alla tesi la contradditoria della ipotesi. Le tre proposizioni così ottenute si chiamano rispettivamente *inversa*, *contraria* ed *inversa della contraria* (o *contraria dell'inversa*) della primitiva.

Una proposizione qualunque può ridursi alla forma seguente:

*a*) *Se il soggetto* S *ha la proprietà* I, *esso ha pure la proprietà* T; ed allora le proposizioni inversa, contraria e inversa della contraria sono:

*b*) *Se il soggetto* S *ha la proprietà* T, *ha pure la proprietà* I.

*c*) *Se il soggetto* S *non ha la proprietà* I, *non ha neppure la proprietà* T.

*d*) *Se il soggetto* S *non ha la proprietà* T, *non ha neppure la proprietà* I.

Si noti che se prendiamo per proposizione

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| primitiva | *b*), | l'inversa è | *a*), | la contraria | *d*), | l'inversa della contraria | *c*) |
| " | *c*), | " | *d*), | " | *a*), | " " " | *b*) |
| " | *d*), | " | *c*), | " | *b*), | " " " | *a*) |

Supponendo che una delle proposizioni *a*) *b*) *c*) *d*) sia vera, non tutte le rimanenti sono necessariamente vere; però esiste fra esse la seguente importante relazione, detta *legge delle inverse:*

*1°. Dimostrato un teorema, anche l'inverso del contrario è necessariamente vero.*

*2°. Dimostrato un teorema ed il suo inverso* (o *contrario*), *anche il contrario* (o *l'inverso*) *e l'inverso del contrario sono necessariamente veri.*

1°. Infatti, supponendo dimostrato per es. il teorema *a*), anche il teorema *d*) è vero, perchè, se ciò non fosse, si dovrebbe ammettere che il soggetto S, non avendo la proprietà T, avesse tuttavia la proprietà I, ciò che è in contraddizione col teorema *a*), vero per ipotesi.

2°. La seconda parte della proposizione non è che una conseguenza immediata della prima, perchè, se dei quattro teoremi *a*) *b*) *c*) *d*) si considerano due qualunque inversi, o contrari, fra loro, i due rimanenti sono rispettivamente gli inversi dei contrari dei precedenti.

Se due proposizioni, una inversa dall'altra, sono ambedue vere, si dicono *reciproche*.

**3.** Osservando il tipo di due teoremi inversi, uno dell'altro, si vede che, quando sono veri ambedue, il primo afferma che *basta* (*è sufficiente*) che sia verificata la proprietà I (*ipotesi*), perchè sia vera anche la proprietà T (*tesi*). L'inverso poi afferma che, se è verificata la proprietà T (*tesi*), *deve* essere verificata necessariamente anche la proprietà I (*ipotesi*). Dunque questi due teoremi si potranno riunire in un solo enunciato dicendo:

*La condizione necessaria e sufficiente, affinchè sia verificata la proprietà* T (*o la* I), *è che sia verificata la proprietà* I (*o la* T).

Viceversa, per dimostrare una proposizione enunciata sotto questa forma, bisogna sempre dimostrare due teoremi, l'uno inverso dell'altro; oppure, per la legge delle inverse sopra dimostrata, l'uno contrario dell'altro.

**4.** Un altro principio generale, e del quale faremo grandissimo uso per la dimostrazione delle proposizioni inverse, è dato dall'enunciato che segue, conosciuto col nome di *2ª legge delle inverse:*

*Se relativamente ad un dato soggetto si sono fatte tutte le ipotesi possibili, e se ne sono dedotte rispettivamente delle tesi che non possono sussistere insieme, tutti i teoremi inversi dei precedenti sono veri.*

Infatti ammettiamo che siano $I_1, I_2, I_3, \ldots I_n$ tutte le ipotesi possibili relative ad un dato soggetto, e $T_1, T_2, T_3 \ldots . T_n$ le corrispondenti tesi. Se nella serie dei teoremi inversi supponiamo per es. che a $T_2$, presa come ipotesi, non corrisponda la tesi $I_2$, ne viene che all'ipotesi $T_2$ corrisponderà un'altra tesi, che dovrà essere una delle I precedentemente considerate, le quali sono le sole possibili, per es. $I_3$. Ma $I_3$ porta con se la tesi $T_3$, dunque $T_2$ e $T_3$ sussisterebbero insieme, contro l'ipotesi fatta.

**5.** Si chiama *problema* una quistione, nella quale si suppongono conosciute alcune cose (*i dati*) e si cerca di conoscere altre cose (*le soluzioni* o *le incognite*), le quali abbiano con le prime alcune relazioni assegnate.

Le operazioni e i ragionamenti, per mezzo dei quali si giunge a trovare le cose cercate, costituiscono la *risoluzione* del problema.

Nel risolvere i problemi possono presentarsi tre casi: 1° che vi sia una sola od un numero finito di soluzioni; 2° che ve ne siano infinite; 3° che non ve ne sia alcuna. Nel primo caso il problema si dice *determinato*, nel secondo *indeterminato* e nel terzo *impossibile*.

La risoluzione di un problema consta di tre parti: 1° la *costruzione*, mediante la quale si ottengono le soluzioni del problema; 2° la *dimostrazione* di questa costruzione; 3° la *discussione*, che studia se, ed in quali casi, il problema è determinato, o indeterminato, o impossibile.

Due problemi, che ammettono lo stesso numero di soluzioni, si dicono *inversi* o *reciproci*, quando esiste tra essi una tale dipendenza, che dalle soluzioni di uno si possano ricavare tutte le soluzioni dell'altro, e viceversa.

**6.** In generale esistono tre metodi distinti per mezzo dei quali si può arrivare sia alla scoperta di un teorema, o risoluzione di un problema, sia alla dimostrazione di una proposizione enunciata; e questi sono: (*)

1°. **Analisi.** — Il metodo, che si chiama *analitico*, per la dimostrazione di un teorema consiste nel trovare una serie di proposizioni successive e tali, che, a partire da quella che si vuol dimostrare, ciascuna di esse sia una conseguenza necessaria di quella che la segue, finchè si giunga ad una proposizione conosciuta; d'onde deriva che la proposizione proposta è una conseguenza dell'ultima, e quindi dalla verità di questa discende naturalmente la dimostrazione di quella.

Ma la scelta delle successive proposizioni, che compongono la serie surriferita, è evidentemente arbitraria; di maniera che può accadere che essa sia prolungata soverchiamente, o anche sia prolungata indefinitamente, senza mai giungere a trovare una proposizione conosciuta, secondo la maggiore o minore attitudine di colui, che ne tenta la dimostrazione.

È importante notare che, siccome di due proposizioni reciproche tanto vale considerare la prima come conseguenza della seconda, quanto la seconda della prima, così, se questa reciprocità ha luogo per tutte le proposizioni successive della serie considerata, si può dire che il metodo analitico consiste nello stabilire una serie di proposizioni reciproche successive tali che, a partire da quella che si vuol dimostrare, la seconda si deduca dalla prima, la terza dalla seconda, e così di seguito, finchè si giunga ad una proposizione riconosciuta vera.

Il metodo *analitico*, per la risoluzione di un problema, consiste nel trovare un secondo problema, che sia conseguenza del primo, o viceversa, poi un terzo conseguenza del secondo, o viceversa, e così di seguito fino a giungere ad un problema che si sa risolvere. Allora, se tutti i problemi, ai quali si riconduce successivamente il proposto, sono tali, che due successivi qualunque sieno reciproci, le soluzioni del problema proposto, e di uno qualunque degli altri della serie, sono completamente identiche. Invece, se la serie di problemi forniti dalla ricerca è tale, che ciascuno di essi sia semplicemente una conseguenza di quello che segue, tutte le soluzioni di un qualunque problema della serie forniscono necessariamente delle soluzioni del problema proposto, ma può darsi che se ne perdano alcune. Infine se la serie dei problemi è tale, che ciascuno di essi sia una semplice conseguenza del precedente, le soluzioni di un problema qualunque della serie forniscono tutte quelle del proposto, ma può darsi che se ne trovino delle estranee.

2°. **Sintesi.** — Il metodo *sintetico*, per la dimostrazione di un teorema, consiste nel partire da una proposizione già stabilita e dedurne una seconda, da questa una terza, e così di seguito, finchè si giunga al teorema proposto, che allora rimane dimostrato.

---

(*) DUHAMEL, *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement;* Chap. V, VI.

Di qui si vede che, conoscendo una dimostrazione analitica di un teorema, se ne può avere una sintetica invertendo l'ordine delle proposizioni.

Il metodo sintetico, per la risoluzione di un problema, consiste nel partire da un primo problema, e dedurre dalla sua risoluzione quella di un secondo, da questa quella di un terzo, e così di seguito, finchè si arrivi alla risoluzione del problema proposto.

In generale, quando si tratta di comunicare ad altri la dimostrazione già nota di un teorema, o la risoluzione pure già nota di un problema, è preferibile il metodo sintetico, poichè si sa già da quale proposizione o problema bisogna partire, e quali se ne debbono ricavare successivamente per arrivare al proposto; ma se si tratta di cercare una dimostrazione d'un teorema enunciato, o di scoprire la risoluzione di un problema, è preferibile il metodo analitico, il quale offre il vantaggio di un punto di partenza sicuro, che è il teorema o problema proposto. Non intendiamo dire con questo che in ogni caso si debba adoperare sempre o il metodo analitico o il sintetico separatamente, convenendo meglio alcune volte, servirsi dei due metodi insieme.

3°. **Riduzione all'assurdo.** — Due proposizioni, di cui ciascuna è la semplice negazione dell'altra, si dicono *contraddittorie;* e, per conseguenza, dalla verità di una di esse deriva la falsità dell'altra, e viceversa. Si ricava da ciò un metodo indiretto per dimostrare la verità di una proposizione, il quale consiste nel dimostrare falsa la proposizione contraddittoria. Questo metodo, tanto adoperato dagli antichi e così utile, specialmente nella dimostrazione delle proprietà reciproche, si chiama *riduzione all'assurdo.*

# LIBRO PRIMO

## CAPITOLO I

### Le figure geometriche. — Retta e piano.

1. Tutti gli oggetti che cadono sotto i nostri sensi, e che indichiamo colla parola generica *corpi*, godono di moltissime proprietà, che dipendono dalla sostanza di cui son fatti, come il peso, il colore, la durezza ecc.

Prescindendo da tutte queste proprietà, essi ci fanno acquistare l'idea dello *spazio*, del quale essi occupano una parte. Questa proprietà dei corpi, di occupare una parte dello spazio, si chiama *estensione*. Noi non sappiamo definire lo spazio, ma, fin dove giunge la nostra esperienza, lo riconosciamo formato egualmente in tutte le sue parti, senza interruzioni e senza limiti.

Considerando un corpo, si acquista facilmente l'idea di un *ente*, che non è un corpo, ma che separa il corpo dal rimanente spazio; oppure, imaginando di spezzare un corpo, l'idea di un ente, che non è un corpo, ma che separa le due parti del medesimo; e chiamiamo *superficie* un tale ente. Dividendo un corpo in due parti, si può pensare che anche la sua superficie resti divisa in due parti, ed acquistiamo così l'idea di un ente, detto *linea*, che non è nè un corpo, nè una superficie, ma separa due parti di una superficie. Similmente, imaginando divisa una linea, acquistiamo l'idea di un ente, diverso dai precedenti, detto *punto*, il quale separa due parti consecutive di una linea. Inoltre, osservando che possiamo imaginare diviso un corpo, una superficie, una linea in infiniti modi, ci persuadiamo che un corpo contiene infinite superficie, che una superficie contiene infinite linee, e una linea infiniti punti.

Partendo da queste idee, stabiliremo i concetti astratti di spazio, di corpo, di superficie, di linea e di punto geometrico mediante il seguente

Postulato I (*degli enti geometrici*).

1°. *Esiste un ente, detto* spazio, *che è continuo, omogeneo, illimitato, e parti di esso, che si dicono* corpi geometrici o solidi.

*2°. Esistono enti, che non sono corpi, detti* superficie, *i quali dividono in parti lo spazio, o i corpi. Esse ammettono parti.*

*3°. Esistono enti distinti dai precedenti, detti* linee, *che dividono in parti le superficie. Esse ammettono parti.*

*4°. Esistono enti privi di parti, distinti da tutti i precedenti, detti* punti, *che dividono in parti le linee.*

*5°. Lo spazio contiene infiniti corpi, un corpo contiene infinite superficie, una superficie contiene infinite linee, ed una linea infiniti punti.*

**2. Definizioni.** — 1ª. Una superficie dicesi *completa*, se basta da sola a separare una parte dello spazio da tutto lo spazio rimanente; nel caso contrario dicesi *incompleta*.

2ª. Una linea dicesi *completa*, se basta da sola a separare una parte di una superficie completa dal rimanente della superficie; nel caso contrario dicesi *incompleta*.

Dalle date definizioni risulta che le superficie e le linee complete non hanno limiti, mentre la superficie e le linee incomplete sono necessariamente limitate da linee e da punti rispettivamente.

3ª. Un punto, non appartenente ai limiti di una linea, di una superficie o di un corpo, dicesi *interno* od *esterno* ad essi, secondo che è, o non è, contenuto in essi.

— Una linea, i punti della quale non appartengono tutti ai limiti di una superficie o di un corpo, si dice *interna* alla superficie od al corpo, se non ha nessun punto esterno ad essi, *esterna* se non ha nessun punto interno ad essi.

— Una superficie, i punti della quale non appartengono tutti ai limiti di un corpo, dicesi *interna* a questo, se non ha nessun punto esterno ad esso, *esterna* se non ha nessun punto interno ad esso.

— Una superficie, una linea, un punto interni ad un corpo, o ad una superficie, o ad una linea si dicono anche *compresi fra i loro limiti*.

4ª. I corpi, le superficie, le linee, i punti si chiamano *enti geometrici;* un insieme di questi dicesi *figura geometrica*, o semplicemente *figura*.

5ª. La *Geometria* è la Scienza, che studia le figure e le loro proprietà.

**3.** L'esperienza c'insegna che i corpi reali possono essere portati, in tempi successivi, ad occupare posizioni differenti nello spazio senza che si alterino le mutue relazioni esistenti fra gli enti, che li compongono; siamo quindi indotti ad ammettere per gli enti geometrici le definizioni e i postulati seguenti:

### Postulato II (*1° del movimento*).

*In tutto lo spazio è possibile il movimento di una figura, restando fissi due, uno, o nessuno dei suoi punti.*

**Definizioni.** — 1ª. Dicesi *rotazione* il movimento di una figura, quando restano fissi due o uno dei suoi punti, e dicesi *traslazione* o *trasporto*, quando nessun punto della figura rimane fisso.

2ª. Si dice che una *figura scorre su sè stessa*, quando si muove in modo che ogni suo punto non cessi di appartenere alla figura stessa nella sua posizione iniziale.

### Postulato III (*2° del movimento*).

*1°. Un punto, che si muove nello spazio, percorre una linea.*

*2°. Una linea, che si muove nello spazio, o scorre su sè stessa, o percorre una superficie.*

3°. *Una superficie, che si muove nello spazio, o scorre su sè stessa, o percorre un solido.*

**4. Definizioni.** — 1ª. Si dice che due figure *coincidono*, quando ogni punto di una qualunque di esse appartiene anche all'altra. (*)

2ª. Due figure si dicono *eguali*, quando è possibile portarle a coincidere.

L'eguaglianza in geometria si esprime col segno $\equiv$.

**Corollario.** — *Due figure eguali ad una terza sono eguali tra loro.*

Infatti, quando si portano le due prime figure a coincidere con la terza, esse coincidono certamente fra loro.

**5. Definizioni.** — 1ª. Un ente geometrico (o figura) si dice *individuato* da una o più condizioni, quando esiste uno ed un solo ente (o figura), che soddisfa a queste.

2ª. Due classi di enti diconsi *in corrispondenza univoca,* quando ogni ente della prima classe individua uno ed un solo ente della seconda, e viceversa.

**6. Definizioni.** — 1ª. Due linee complete di una superficie, aventi un punto comune, *si tagliano* in esso, quando un punto, mobile su una di tali linee, può andare dall'una all'altra delle parti della superficie separate dalla seconda linea, passando per quel punto.

2ª. Una linea, avente un punto comune con una superficie completa, *è tagliata* da questa nel punto comune, quando un punto, mobile sulla linea, può andare dall'una all'altra delle parti dello spazio separate dalla superficie, passando per quel punto.

3ª. Due superficie complete, aventi una linea comune, *si tagliano* in essa, quando un punto, mobile sopra una di tali superficie, può andare dall'una all'altra delle parti dello spazio separate dalla seconda superficie, passando per un punto qualunque della linea comune.

Se nello spazio, o in un corpo, imaginiamo due superficie, ciascuna delle quali lo divide in parti, l'esperienza c'insegna che, se le due superficie non si tagliano, ciascuna di esse suddivide soltanto la parte dello spazio, o del corpo, nella quale essa è contenuta. Se poi le due superficie si tagliano, ciascuna di esse suddivide ambedue le parti, in cui lo spazio, o il corpo, è diviso dall'altra; e le parti provenienti dalle due divisioni, considerate insieme, sono le stesse, qualunque sia la divisione, che s'imagini fatta per prima.

Considerazioni simili si possono ripetere per due linee, ciascuna delle quali divida una superficie in parti, o per due gruppi di punti, ciascuno dei quali divida in parti una linea.

Ammetteremo anche questo fatto, suggeritoci dall'esperienza, per le superficie, linee e gruppi di punti geometrici, enunciandolo col seguente

---

(*) Insistiamo nel far notare che i corpi geometrici sono enti ideali ben distinti dai corpi reali. Nei primi non si tien conto delle proprietà fisiche, e si può quindi supporre che un corpo geometrico occupi tutto, o in parte, lo spazio occupato contemporaneamente da un altro; mentre tale sovrapposizione non è ammissibile pei corpi reali, a causa della loro impenetrabilità. Per la stessa ragione le superficie, le linee, i punti non si possono costruire materialmente isolati, quantunque possiamo colla fantasia rappresentarli isolati dinanzi alla mente. Un foglio, un filo, un segno di lapis o di penna, anche sottilissimi, son sempre corpi e non superficie o linee. Tuttavia, allo scopo di render più facile lo studio della Geometria, si sogliono rappresentare con tali artifizî gli enti geometrici immateriali, per dare in qualche maniera un'idea del modo di comportarsi e della forma dei medesimi; ma con questo, lo ripetiamo, non s'intenda di dire che un filo, o un tratto di penna, sia una linea, nè un foglio una superficie.

### Postulato IV.

*1°. Se due superficie, che si tagliano lungo una linea, dividono rispettivamente in parti lo spazio, od un corpo, ognuna delle parti dello spazio, o del corpo, determinate da una delle due superficie, è suddivisa dalle parti dell'altra superficie in essa contenute.*

*2°. Se due linee, che si tagliano in uno o più punti, dividono rispettivamente in parti una superficie, ognuna delle parti di superficie, determinate da una delle due linee, è suddivisa dalle parti dell'altra linea in essa contenute.*

*3°. Se due gruppi di punti dividono rispettivamente in parti una linea, ognuna delle parti di linea, determinate da uno dei due gruppi, è suddivisa dai punti dell'altro gruppo in essa contenuti.*

*4°. Le parti, in cui lo spazio, o un corpo, o una superficie, o una linea, resta divisa per mezzo di due divisioni successive, sono sempre le stesse, qualunque sia la divisione che si eseguisce per prima.*

**7.** La prima linea e la prima superficie che, in generale, si sogliono studiare in Geometria sono la linea *retta* e il *piano*, l'idea dei quali ci è data rispettivamente dal filo a piombo, dalla superficie delle acque stagnanti ecc. ecc.

Nel seguito indicheremo le rette con lettere minuscole, i punti con lettere maiuscole e i piani con lettere greche minuscole.

La linea retta ed il piano non si possono definire senza la conoscenza di altre linee e superficie, e si sogliono introdurre mediante postulati. Noi scegliamo i seguenti.

### Postulato V (*della retta*).

*1°. Esiste una linea (che si chiama* retta*) tale che, quando fa parte di una figura, la quale roti intorno a due dei suoi punti, essa ed essa sola resta immobile.*

*2°. La retta è divisa da ciascuno dei suoi punti in due parti.*

*3°. Se una retta rota intorno ad un suo punto, una qualunque delle parti, in cui essa è divisa da quel punto, si può far passare per un punto arbitrario dello spazio.*

**Definizione.** — Le parti, in cui una retta resta divisa da uno dei suoi punti, diconsi *semirette* o *direzioni opposte fra loro.* Ognuna di esse dicesi il *prolungamento* dell'altra.

**Corollari.** — *1°. Per due punti dati passa una ed una sola retta, ossia una retta è individuata da due dei suoi punti.*

Infatti, ammessa l'esistenza di una retta, facciamola rotare intorno ad un suo punto, finchè venga a passare per uno dei due punti dati A (P. V, 3°); indi si faccia rotare attorno ad A, finchè venga a passare per l'altro punto B. Avremo così una retta che passa per A e B. Ed è chiaro che per questi due punti non possono passare altre rette, perchè se ve ne fossero due, avremmo due linee immobili, quando una figura,

che le contiene, rotasse attorno ad A e B, e ciò è contradditorio a quanto abbiamo ammesso nel P. V, 1°.

Se A e B sono due punti qualunque di una retta, essa si indica con AB.

2°. *Due rette distinte non possono avere più di un punto comune.*

Infatti se due rette avessero due punti comuni coinciderebbero.

3°. *Tutte le rette sono eguali.*

4°. *Le due parti, in cui una retta resta divisa da uno dei suoi punti, sono eguali:* ossia *tutte le semirette sono eguali.*

5°. *Una figura è fissa, quando sono fissi tre dei suoi punti non situati in linea retta.*

Infatti, se una figura si muove, restando fissi due dei suoi punti A e B, resta immobile soltanto la retta AB (P. V, 1°); ma se deve essere fisso anche un terzo punto C fuori della retta AB, tutta la figura deve essere immobile.

## 8. Postulato VI (*del piano*).

1°. *Il* piano *è una superficie indefinita completa, che cioè divide lo spazio in due parti.*

2°. *Contiene interamente ogni retta, che passa per due dei suoi punti, ed è diviso da ogni sua retta in due parti.*

3°. *Tenendo fissi due dei suoi punti* A *e* B, *si può far rotare il piano attorno alla retta* AB, *in modo che una qualunque delle parti, in cui esso rimane diviso dalla retta, passi per un punto arbitrario dello spazio.*

**Definizione.** — Le parti, in cui un piano resta diviso da una sua retta, diconsi *semipiani;* ciascuno di essi dicesi il *prolungamento* dell'altro.

**Corollari.** — 1°. *Un piano ed una retta fuori di esso non possono avere più di un punto comune.*

Infatti, se una retta avesse due punti comuni con un piano, sarebbe contenuta completamente in esso.

2°. *Tre piani, che non passino per una stessa retta, non possono avere più di un punto comune.*

Infatti, se avessero due punti comuni, dovrebbero contenere tutta la retta individuata da quei due punti.

## 9. Postulato VII.

1°. *Due rette in un piano, che hanno un punto comune, si tagliano in esso.*

2°. *Una retta, non situata in un piano ed avente con esso un punto comune, è tagliata dal piano medesimo.*

3°. *Due piani, aventi una retta comune, si tagliano in essa.*

**Corollari.** — *1°. Se due rette situate in un piano hanno un punto comune, le due semirette, in cui una di esse è divisa dal punto comune, giacciono rispettivamente nei due semipiani, in cui il piano resta diviso dall'altra retta.*

*2°. Se due piani hanno una retta comune, i due semipiani in cui uno di essi è diviso dalla retta comune, giacciono rispettivamente nelle due parti, in cui lo spazio resta diviso dall'altro piano.*

**10. Teorema.** — *Per tre punti, non situati in linea retta, passa sempre uno ed un solo piano, ossia i tre punti individuano un piano.*

Sieno A, B, C tre punti qualunque dello spazio non situati in linea retta. Preso un piano dello spazio, facciamolo rotare attorno ad una sua retta, finchè venga a passare per A (P. VI, 3°), quindi si faccia rotare attorno ad una sua retta condotta per A, finchè venga a passare per B;

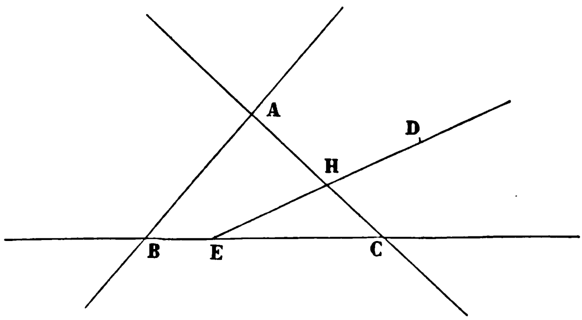



Fig. 1.

e finalmente si faccia rotare attorno alla retta AB, finchè venga a passare per C. Avremo così ottenuto un piano, che passa per i tre punti A, B, C. Resta a dimostrare che per i punti suddetti non possono passare altri piani. Supponiamo che per i tre punti dati possano passare due piani distinti, che indicheremo con le lettere $\alpha$, $\beta$. Le rette BC, CA, AB, (fig. 1) avendo due punti comuni coi piani $\alpha$, $\beta$, giacciono interamente in essi (P. VI, 2°), ossia i due piani $\alpha$, $\beta$ hanno in comune tutte le tre rette suddette. Prendiamo ora un punto qualunque D di uno dei due piani, per es. di $\alpha$, non situato sulle rette BC, CA, CB. Poichè le rette AC, BC si tagliano in C (P. VII, 1°), potremo prendere sulla CB un punto E situato nella parte del piano $\alpha$ opposta a quella del punto D rispetto alla AC. Allora la retta DE, individuata dai punti D, E del piano $\alpha$, giace interamente in esso e incontra la AC in un punto H (P. VI, 2°). I due punti E, H, appartenendo alle rette BC, AC rispettivamente, sono situati non solo nel piano $\alpha$, ma anche sul piano $\beta$; allora tutta la retta EH, e quindi anche il suo punto D, (P. VI, 2°) deve giacere sul piano $\beta$. Resta così dimostrato che ogni punto del piano $\alpha$ giace anche in $\beta$.

Nello stesso modo si può dimostrare, che ogni punto del piano $\beta$ giace in $\alpha$, e se ne può concludere che i due piani $\alpha$ e $\beta$ coincidono.

**Corollari.** — *1°. Una retta ed un punto fuori di essa individuano un piano.*

Infatti, due punti della retta data $a$ col punto dato A individuano un piano, che contiene la $a$, (P. VI, 2°).

*2°. Due rette, aventi un punto comune, individuano un piano.*

Infatti, il punto comune alle due rette date $a$, $b$, insieme con due punti presi ad arbitrio, uno sopra una retta ed uno sopra l'altra, individuano un piano, che contiene per intero le rette $a$, $b$.

*3°. Tutti i piani sono uguali.*
*4°. Un piano è diviso da ciascuna sua retta in due parti uguali. Tutti i semipiani sono uguali.*

Se facciamo rotare un piano attorno ad una sua retta, finchè uno dei semipiani, in cui resta diviso da quella retta, venga a passare per un punto preso ad arbitrio sull'altro semipiano, i due semipiani coincidono.

Questi due semipiani si possono fare coincidere, anche facendo scorrere il piano su sè stesso, tenendo fisso un punto della retta suddetta, in modo che le due parti, in cui la retta resta divisa da quel punto, si scambino fra loro.

*5°. Per un punto si possono condurre nello spazio infinite rette.*

Dato un punto P si prenda un piano $\alpha$, che non passi per esso. Tutte le rette, determinate da P con un punto di $\alpha$, sono distinte. Infatti essendo $P_1$, $P_2$ due punti di $\alpha$, se le rette $PP_1$, $PP_2$ coincidessero, giacerebbero in $\alpha$, ed anche P giacerebbe in $\alpha$, contrariamente all'ipotesi.

*6°. Per un punto di un piano si possono condurre infinite rette, giacenti sul piano stesso.*

Dato un punto P in un piano $\alpha$, e scelta in $\alpha$ una retta $r$ che non passi per P, tutte le rette condotte per P e per un punto della $r$ giacciono in $\alpha$ e sono tutte distinte. Infatti, essendo $P_1$, $P_2$ due punti della $r$, se le rette $PP_1$, $PP_2$ coincidessero, anche P dovrebbe giacere sulla $r$.

*7°. Per una retta si possono condurre infiniti piani.*

**11. Teorema.** — *Se due piani hanno in comune un punto, hanno in comune una retta che passa per quel punto.*

Supponiamo che due piani $\alpha$, $\beta$ abbiano in comune un punto O (fig. 2). Nel piano $\beta$ conduciamo due rette $a$, $b$ passanti per O. Poichè queste rette

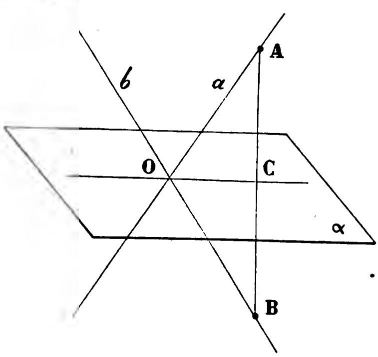



Fig. 2.

sono tagliate dal piano $\alpha$ (P. VII, 2°), potremo prendere un punto A di $a$ e un punto B di $b$ situati in parti opposte del piano $\alpha$. La retta AB, individuata dai punti A, B, giace nel piano $\beta$, avendo questi due punti in comune con esso (P. VI, 2°), e deve incontrare il piano $\alpha$ in un punto C (P. VI, 1°), poichè per andare da una parte all'altra del piano $\alpha$ bisogna passare per un punto di esso. Il punto C è dunque comune ai piani $\alpha, \beta$, e per conseguenza la retta OC, avendo i due punti O, C comuni con $\alpha$ e con $\beta$, giace interamente nei due piani. Fuori di questa retta i due piani $\alpha, \beta$ non possono avere altri punti comuni, poichè, se ne avessero uno, coinciderebbero (§ 10, Cor. 1°).

**12.** Quando vorremo far notare che un piano $\alpha$ è individuato da tre punti A, B, C presi ad arbitrio non in linea retta, oppure da una retta $a$ e da un punto A, oppure da due rette $a, b$ che s'incontrano, lo indicheremo con ABC, ovvero con A$a$, ovvero con $ab$ rispettivamente.

In modo simile indicheremo con $a\alpha$ il punto d'incontro della retta $a$ col piano $\alpha$, con $\alpha\beta$ la retta comune a due piani $\alpha$ e $\beta$, con $\alpha\beta\gamma$ il punto comune a tre piani $\alpha, \beta, \gamma$, che non passano per una linea retta, ecc.

# CAPITOLO II

## Segmenti, angoli e diedri.

**13. Definizioni.** — 1ª. Due punti A, B presi sopra una retta dividono questa retta in tre parti (P. IV, 3°), delle quali una è limitata dai due punti e chiamasi *segmento*, le altre due sono due semirette, e chiamansi i *prolungamenti del segmento*.

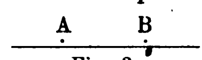


Fig. 3.

2ª. I due punti A, B chiamansi gli *estremi* o *termini* del segmento, il quale si indica con le due lettere A e B, e dicesi *distanza* di questi due punti.

Un punto può generare il segmento AB andando da un termine del segmento all'altro, o viceversa.

3ª. Due segmenti si dicono *consecutivi*, quando hanno soltanto un estremo in comune. Due segmenti consecutivi e situati sulla medesima retta si dicono *adiacenti*.

**14.** Due rette AB, CD aventi un punto comune O individuano un piano. Ciascuna di esse divide il piano in due parti (P. VI, 2°), ognuna delle quali è suddivisa in due parti dall'altra retta (P. VII, 1° — P. IV 2°). Ciascuna delle quattro parti, in cui il piano è diviso dalle due rette AB, CD è separata dal rimanente del piano per mezzo di due semirette. In altre parole il piano è diviso in due parti da due sue semirette uscenti da un punto.

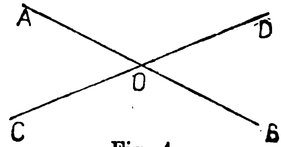


Fig. 4.

Analogamente lo spazio è diviso da un piano in due parti (P. VI, 1°), ciascuna delle quali è suddivisa in due parti da un altro piano avente una retta in comune col primo (P. VII, 3° — P. IV, 1°). Ognuna delle

quattro parti, in cui lo spazio resta diviso da due piani, aventi una retta comune, è separata dal rimanente dello spazio mediante due semipiani uscenti da una retta; in altre parole, due semipiani uscenti da una retta dividono lo spazio in due parti.

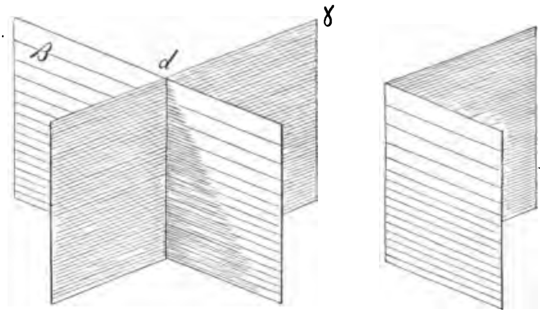


Fig. 5.

**Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *angolo* ciascuna delle due parti, in cui un piano è diviso da due semirette (dette *lati*) uscenti da un punto (detto *vertice*).

2ª. Chiamasi *diedro* ciascuna delle due parti, in cui lo spazio resta diviso da due semipiani (detti *facce*) uscenti da una medesima retta (detta *spigolo* o *costola*).

**Corollari.** — *1°. Una semiretta uscente dal vertice di un angolo, se non coincide con un lato, è tutta interna od esterna all'angolo.*

*2°. Un semipiano uscente dalla costola di un diedro, se non coincide con una faccia, è tutto interno od esterno al diedro.*

## Postulato VIII (*dello scorrimento*).

*1°. Una retta può scorrere su sè stessa, in modo che un suo punto qualunque* A *prenda la posizione di un altro suo punto arbitrario* B, *passando una ed una sola volta per ciascun punto del segmento* AB.

*2°. Un piano può scorrere su sè stesso, in modo che una sua retta scorra pure su sè stessa, e che un punto* A *qualsiasi di questa prenda la posizione di un altro suo punto qualsiasi* B, *passando una ed una sola volta per ciascun punto del segmento* AB.

*3°. Un piano può scorrere su sè stesso rotando attorno ad un suo punto* O, *in modo che una sua semiretta* OA *prenda la posizione di un'altra semiretta qualsiasi uscente dallo stesso punto, passando una ed una sola volta per ogni semiretta uscente da* O *interna ad uno degli angoli formati dalle semirette* a, b.

*4°. Un semipiano* $\alpha$ *uscente da una retta* a *può rotare attorno a questa retta, in modo che venga a prendere la posizione di un altro semipiano* $\beta$, *uscente dalla medesima retta, passando una ed una sola volta per ogni semipiano interno ad uno dei diedri formati dai semipiani* $\alpha$, $\beta$.

**Definizione 3ª.** — Se i lati di un angolo (o facce di un diedro) sono l'uno il prolungamento dell'altro, l'angolo (o diedro) dicesi *piatto;* altrimenti si chiama *convesso* l'angolo (o diedro), rispetto al quale i prolungamenti dei lati (o facce) sono esterni, e l'altro dicesi *concavo*.

**Corollario 3°.** — *Tutti gli angoli (o diedri) piatti sono eguali.*

In ciò che segue per angolo di due semirette (o diedro di due semipiani), che non sono l'uno il prolungamento dell'altro, intenderemo sempre l'angolo (o diedro) convesso, a meno che non si avverta esplicitamente il contrario.

Un angolo (o diedro) s'indica per mezzo del vertice (o dello spigolo), oppure, se si hanno più angoli (o diedri) con lo stesso vertice (o spigolo), mediante due lettere poste sui lati (o facce), in mezzo alle quali si pone la lettera, che indica il vertice (o le due lettere che indicano lo spigolo).

**Definizioni.** — **4ª.** Due angoli (o diedri) si dicono *adiacenti*, quando hanno un lato (o faccia) in comune, e giacciono da parti opposte di questo lato (o faccia).

**5ª.** Due angoli (o diedri) consecutivi si dicono *conseguenti*, quando i lati (o facce), non comuni, sono l'uno il prolungamento dell'altro.

## 15. Postulato IX (*di Archimede*).

*Se sopra un segmento (o angolo o diedro) si porta una serie di segmenti (o angoli o diedri) eguali, in modo che ciascuno di essi sia adiacente al precedente ed il primo abbia un estremo (o un lato od una faccia) in comune col dato, si finirà per trovare un punto (o un lato od una faccia) che cadrà fuori del segmento (o angolo o diedro) dato.*

**Teorema.** — *Un segmento, un angolo o un diedro si può portare a coincidere con sè stesso, scambiandone gli estremi, i lati o le facce.*

Siano AB, CD due segmenti eguali, e supponiamo che, sovrapponendo i due segmenti in modo che C venga in B, il punto D non coincida con A, ma prenda una posizione $D_1$ fra A e B. Allora siccome il segmento $BD_1$ risulta eguale a CD e quindi anche ad AB, è facile vedere che, se si riporta CD su $BD_1$ in modo che D coincida con $D_1$, l'altro estremo C prenderà una posizione D' compresa fra $D_1$ e B, cosicchè avremo

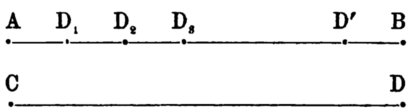



Fig. 6.

$$D_1D' \equiv BD_1 \equiv AB.$$

Ne deriva che essendo $AB \equiv D_1D'$ si potrà prendere fra $D_1$ e D' un punto $D_2$ tale che sia $AD_1 \equiv D_1D_2$.

Potendosi ripetere il ragionamento un numero infinito di volte, si vede che si dovrebbe poter determinare su AB a partire da A un numero infinito di segmenti eguali e consecutivi $AD_1 \equiv D_1D_2 \equiv D_2D_3 \equiv \ldots$ aventi tutti gli estremi interni al segmento dato, il che è contrario al postulato.

Analoga dimostrazione per il caso di un angolo o di un diedro.

**Corollari.** — 1°. *Se si scompone un segmento (o un angolo o un diedro) in più segmenti (o angoli o diedri), non è possibile ricomporre con alcuni di essi il dato segmento (o angolo o diedro).*

2°. *Quando un piano scorre su sè stesso lungo una sua retta, ogni altro piano che passa per questa retta, ed è collegato invariabilmente col primo, scorre pure su sè stesso.*

Infatti, se il secondo semipiano durante lo scorrimento prendesse una posizione diversa dalla iniziale, ne verrebbe, per il postulato del movimento, che un diedro dovrebb'essere eguale ad una sua parte, il che è assurdo.

**Definizione 1ª.** — Due angoli (o diedri) si dicono *supplementari*, quando si possono far divenire conseguenti.

**Corollario 3°.** — *Due angoli (o diedri) supplementari di angoli (o diedri) eguali, sono eguali.*

Infatti, portando a coincidere convenientemente (P. IX) due angoli (o diedri) eguali, coincidono pure i rispettivi angoli (o diedri) conseguenti.

**Definizione 2ª.** — Due angoli (o diedri) diconsi *opposti al vertice* (od *alla costola*), quando i lati (o facce) dell'uno sono i prolungamenti dei lati (o facce) dell'altro.

**Corollario 4°.** — *Due angoli (o diedri) opposti al vertice (od alla costola) sono eguali.*

Infatti (fig. 4) due angoli (o diedri) $A\widehat{O}C, B\widehat{O}D$ opposti al vertice sono rispettivamente supplementari di uno stesso angolo (o diedro) $A\widehat{O}D$, e quindi, per il corollario precedente, sono eguali.

**16. Definizioni.** — 1ª. Dati due o più segmenti $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, ... $A_nB_n$ (fig. 7), se portiamo il secondo adiacente al primo, il terzo adiacente al secondo, e

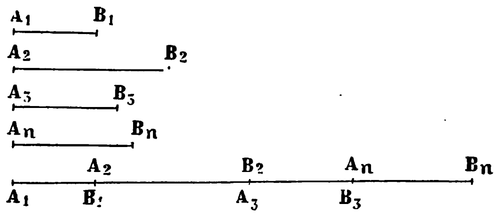



Fig. 7.

non dalla stessa parte del primo e così di seguito, si ottiene un segmento $A_1B_n$, che è l'insieme dei segmenti dati, e che dicesi *somma* degli stessi. I segmenti dati si dicono *addendi*, o *parti della somma*.

2ª. Dati due, o più angoli, (o diedri) $A_1\widehat{O}_1B_1$, $A_2\widehat{O}_2B_2$, $A_3\widehat{O}_3B_3$, ...., $A_n\widehat{O}_nB_n$, (fig. 8) se portiamo il secondo consecutivo al primo, il terzo consecutivo al secondo e non dalla stessa parte del primo, e così di seguito, si ottiene un angolo (o diedro) $A_1\widehat{O}B_n$, che è l'insieme degli angoli (o diedri) dati, e che dicesi *somma* degli stessi. Gli angoli (o diedri) dati si dicono *addendi* o *parti della somma*.

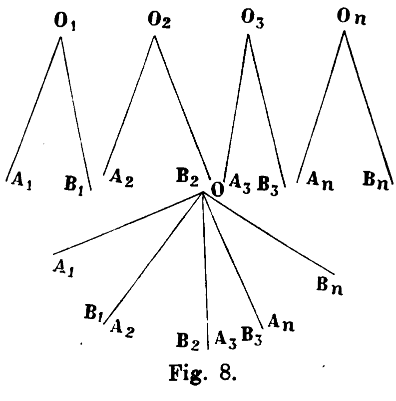



Fig. 8.

3ª. L'operazione, mediante la quale si cerca la somma di più segmenti, o angoli, o diedri, dicesi *addizione*.

La somma di più segmenti, o angoli, o diedri, per esempio: $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, .... $A_n B_n$, s'indica colla scrittura

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots + A_n B_n \equiv A_1B_n .$$

**Corollario.** — *La somma di due angoli (o diedri) supplementari è eguale ad un angolo (o diedro) piatto.*

**Definizioni.** — 4ª. La somma di due, tre,.... segmenti, o angoli, o diedri, uguali si dice il *doppio*, il *triplo*,.... in generale un *multiplo* di ciascuno di questi segmenti, o angoli, o diedri, e uno di questi si dice la *metà*, un *terzo*,.... in generale un *summultiplo*, o *parte aliquota*, della somma.

5ª. Più segmenti, o angoli, o diedri, si dicono *equimultipli*, o *equisummultipli*, di altrettanti segmenti, o angoli, o diedri, quando i primi sono rispettivamente i doppi, i tripli,.... oppure le metà, le terze parti,.... dei secondi.

**17.** È importante notare fin d'ora, che nell'addizionare più angoli (o diedri) può avvenire, che essi ricoprano una o più volte tutto il piano (o spazio), oltre ad un angolo (o diedro) concavo, o convesso, o piatto. Ogni volta che più angoli (o diedri) ricoprono tutto il piano (o spazio) diremo che formano *un giro*.

Ciò c'induce ad estendere un poco la definizione di angolo (o diedro) nel modo seguente:

**Definizioni** — 1ª. Angolo di due semirette, uscenti da un punto, è una delle parti in cui esse dividono il piano, aumentata di un numero qualunque di giri.

2ª. Diedro di due semipiani, uscenti da una retta, è una delle parti, in cui essi dividono lo spazio, aumentata di un numero qualunque di giri.

**Corollario.** — *Un giro è uguale alla somma di due angoli (o diedri) piatti.*

**18. Teorema.** — *La somma di più segmenti, o angoli, o diedri, non si altera invertendo in qualunque modo l'ordine degli addendi.*

Nella somma dei segmenti $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, ...., $A_n B_n$ immaginiamo (fig. 7) di portare il segmento $A_2B_3$, somma dei due segmenti consecutivi $A_2B_2$, $A_3B_3$, a coincidere con sè stesso in modo che il punto $B_3$ cada in $A_2$ e viceversa (§ 15 Teor.). È chiaro che l'ordine di due addendi consecutivi viene mutato, senza che per questo resti alterata la somma.

Con successive trasposizioni di segmenti consecutivi si può infine ottenere una qualunque disposizione degli addendi della somma, senza che essa venga alterata.

Questa proprietà si enuncia brevemente così:

*La somma dei segmenti, o angoli, o diedri, gode della proprietà commutativa.*

**Corollari.** — *1°. Due somme di segmenti, o angoli, o diedri, rispettivamente eguali, sono eguali.*

*2°. Le somme di due segmenti, o angoli, o diedri, disuguali con uno stesso segmento, o angolo, o diedro, sono disuguali.*

**19. Definizione 1ª.** — Se un segmento, o angolo, o diedro, è la somma di due altri, si dice che la somma è *maggiore* di ciascuno dei suoi addendi, che ciascuno di questi è *minore* della somma, ed è la *differenza* fra la somma stessa e l'altro.

Dati due segmenti AC, AB (fig. 9) riportiamoli sopra una medesima retta, a partire da uno stesso punto, e dalla stessa parte di questo. Allora se, mentre due estremi coincidono in A, anche l'estremo B dell'uno coincide coll'estremo C dell'altro, i due segmenti AC, AB sono eguali, e s'indica ciò brevemente scrivendo $AC \equiv AB$; se B resta compreso nel segmento AC, il segmento AC è maggiore di AB, ed il segmento BC è la differenza fra i due segmenti dati; e s'indicano brevemente questi due fatti colle scritture

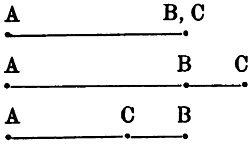



Fig. 9.

$$AC > AB, \quad BC \equiv AC - AB;$$

e finalmente, se il punto C resta compreso nel segmento AB, allora il segmento AC è minore di AB, ed il segmento CB è la loro differenza, e si scrive

$$AC < AB, \quad CB \equiv AB - AC.$$

Analogamente, dati due angli (o diedri) $\widehat{ABC}, \widehat{MNP}$ (fig. 10), sovrapponiamoli in modo che, coincidendo i vertici (o costole), abbiano un lato (o faccia) in comune, e si distendano dalla stessa parte di questo lato (o faccia). Allora se, mentre i due lati (o facce) BA, NM coincidono, anche il lato (o faccia) BC del primo coincide col lato (o faccia) NP dell'altro, i due angoli (o diedri) $\widehat{ABC}, \widehat{MNP}$ sono eguali, e s'indica ciò scrivendo $\widehat{ABC} \equiv \widehat{MNP}$; se il lato (o faccia) BC resta compreso nell'angolo (o diedro) $\widehat{MNP}$, l'angolo (o diedro) $\widehat{MNP}$ è maggiore dell'angolo (o diedro) $\widehat{ABC}$, e l'angolo (o diedro) $\widehat{CNP}$ è la differenza fra i due angoli (o diedri) dati, e s'indicano brevemente questi due fatti colle scritture

$$\widehat{MNP} > \widehat{ABC}, \quad \widehat{CNP} \equiv \widehat{MNP} - \widehat{ABC};$$

e finalmente, se il lato (o faccia) NP resta compreso nell'angolo (o diedro) $\widehat{ABC}$, allora l'angolo (o diedro) $\widehat{MNP}$ è minore dell'angolo (o diedro) $\widehat{ABC}$, e l'angolo (o diedro) $\widehat{PNC}$ è la loro differenza; e si scrive

$$\widehat{MNP} < \widehat{ABC}, \quad \widehat{PNC} \equiv \widehat{ABC} - \widehat{MNP}.$$

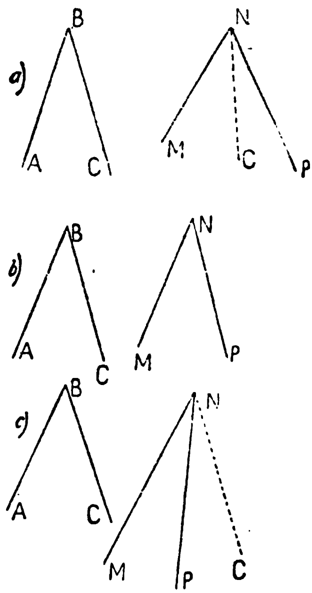



Fig. 10.

Da ciò che precede risulta, che, dati due segmenti, o angoli, o diedri, disuguali, esiste sempre un segmento, o angolo, o diedro, differenza di essi, e che inoltre questa differenza è unica, perchè le somme di due segmenti, o angoli, o diedri, disuguali con uno stesso segmento, o angolo, o diedro, non possono essere eguali (§ 18 Cor. 2°).

**Definizione 2ª.** — **L'operazione, mediante la quale si cerca la differenza di due segmenti, o angoli, o diedri, dicesi *sottrazione*.**

**20. Definizione.** — Quando esiste una serie d'infiniti enti tali, che sia sempre possibile definire i concetti di eguaglianza e di somma di un numero qualunque di essi, in modo che questa somma sia un ente appartenente alla stessa serie, si dice che essi formano una *classe di grandezze omogenee*. Se questa classe verifica anche il postulato d'Archimede, si dice che le sue grandezze sono *finite*.

Per es. tutti i segmenti, tutti gli angoli, tutti i diedri costituiscono tre classi di grandezze omogenee finite.

In seguito a ciò enuncieremo le proprietà relative ai segmenti, agli angoli, ai diedri, servendoci del concetto generale di classe di grandezze. (*)

Pertanto colle parole *classe di grandezze* per ora intendiamo di riferirci alle tre classi precedenti, benchè sia facile capire come le proprietà dimostrate per queste si possano estendere anche ad altre classi di grandezze, che godono della suaccennata proprietà.

**Teoremi.** — *1°. La somma di più grandezze non si altera, se ad alcune di esse si sostituisce la loro somma.* In altre parole:

*La somma di più grandezze gode della proprietà associativa.*

*2°. La somma di più grandezze è maggiore di ciascuna di esse.*

*3°. Se a due grandezze disuguali si addizionano due grandezze uguali le somme sono disuguali, ed è maggiore quella, di cui fa parte la grandezza maggiore.*

*4°. Se da due grandezze disuguali si sottraggono due grandezze uguali, le differenze sono disuguali, ed è maggiore quella ottenuta dalla grandezza maggiore.*

*5°. Se da grandezze uguali si sottraggono grandezze disuguali, è minore la differenza che si ottiene sottraendo la grandezza maggiore.*

*6°. Se più grandezze sono ordinatamente maggiori di altre, la somma delle prime è maggiore della somma delle seconde.*

*7°. Se una grandezza è maggiore, eguale, o minore di un'altra, ogni multiplo della prima è maggiore, eguale, o minore dell'equimultiplo della seconda.*

*8°. Se una grandezza è maggiore, eguale, o minore di un'altra, ogni summultiplo della prima è maggiore, eguale, o minore dell'equisummultiplo della seconda.*

*9°. Se più grandezze sono equimultiple di altrettante grandezze, la somma delle prime è pure equimultipla della somma delle seconde.*

---

(*) È opportuno osservare che le proprietà, relative alle operazioni aritmetiche di addizione e di sottrazione, sono tutte conseguenze della proprietà commutativa della somma; epperciò, avendo dimostrato che la somma di grandezze appartenenti a ciascuna delle classi finora studiate gode di questa proprietà, ne viene che, per dimostrare i seguenti teoremi, relativi a queste classi di grandezze, si debbono ripetere gli stessi ragionamenti adoperati in aritmetica per le analoghe operazioni sui numeri.

*10°. Se due grandezze sono rispettivamente equimultiple di due altre, la differenza delle prime è pure equimultipla della differenza delle seconde.*
Ecc. ecc.

**21. Teoremi.** — *1°. Quando una retta scorre su sè stessa, tutti i suoi punti descrivono segmenti eguali.*

Sieno A e B (fig. 11) due punti della retta, A′ e B′ le loro posizioni dopo lo scorrimento. Può avvenire che, rispetto al segmento AB, il punto A′ sia interno, o coincida col termine B, o sia esterno. In tutti i casi si ha $AA' \equiv AB' - A'B'$, $BB' \equiv AB' - AB$ e, siccome $AB \equiv A'B'$ per ipotesi, ne segue $AA' \equiv BB'$.

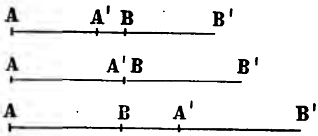


Fig. 11.

*2°. Quando un piano scorre su sè stesso, rotando intorno ad un suo punto, tutte le semirette del piano, uscenti da quel punto, descrivono angoli eguali.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

*3°. Quando una figura rota intorno ad una sua retta, tutti i semipiani uscenti da quella retta, descrivono diedri eguali.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

# CAPITOLO III

## Prime nozioni sul circolo e sulla sfera.

**22. Definizioni.** — 1ª. Una figura si dice *luogo geometrico* dei punti, che hanno una certa proprietà, se tutti i suoi punti, ed essi soli, hanno quella proprietà.

2ª. Una figura si dice *luogo geometrico* delle linee, che hanno una certa proprietà, se per ciascuno de' suoi punti, e soltanto per essi, passa almeno una linea, che gode di quella proprietà.

Da queste definizioni risulta che per dimostrare che una data figura è il luogo geometrico dei punti, che godono di una certa proprietà, bisogna dimostrare: *1° che tutti i suoi punti godono di quella proprietà; 2° che ogni punto, non appartenente alla figura, non gode di quella proprietà;* cioè bisogna dimostrare un teorema ed il suo contrario. Per la legge delle inverse (Prel. § 3) basterà anche dimostrare, oltre la proposizione diretta, la sua inversa invece della contraria. In altre parole, per dimostrare che una figura è il luogo geometrico dei punti, che hanno una certa proprietà, basterà dimostrare: *1° che tutti i punti della figura hanno quella proprietà; 2° che tutti i punti, i quali hanno quella proprietà, appartengono alla figura.*

Analogamente, per dimostrare che una figura è il luogo geometrico delle linee, che hanno una certa proprietà, bisogna dimostrare: *1° che per ogni punto della figura passa una (almeno) delle linee, che hanno quella proprietà; 2° che per un punto, non appartenente alla figura, non passa alcuna linea avente quella proprietà.* Oppure, per la stessa legge delle inverse, basterà dimostrare: *1° che per ogni punto della figura passa una (almeno) delle linee, che hanno la proprietà enunciata; 2° che ogni punto, appartenente a una qualunque delle linee, che hanno la proprietà enunciata, appartiene anche alla figura.*

**23.** Imaginiamo di far scorrere un piano su sè stesso, restando fisso un suo punto O (fig. 12), in modo che una semiretta qualunque, uscente da O, compia un giro, cioè torni nella posizione primitiva, prendendo una ed una sola volta la posizione di ogni semiretta del piano, uscente da O (P. VIII, 3). Un punto qualunque A di questa semiretta percorre una linea del piano (P. III. 1°), che si chiama *circolo*, o *circonferenza*, i cui punti hanno dal punto O una distanza uguale ad OA.

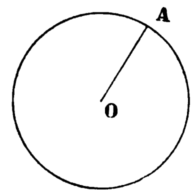


Fig. 12.

Viceversa, se un punto P ha da O una distanza eguale ad OA, il punto generatore A dovrà, nella rotazione passare per esso, poichè, quando la semiretta OA sia venuta a passare per P. il punto A coincide con P.

Possiamo dunque stabilire le seguenti

**Definizioni.** — 1ª. *Circolo, o circonferenza,* è il luogo dei punti di un piano, che hanno una stessa distanza (detta *raggio*) da un punto fisso del piano stesso (detto *centro*).

2ª. *Cerchio* è la parte di piano percorsa da un raggio, che rota attorno al centro, mentre il suo estremo percorre il circolo.

**Corollari.** — *1°. Secondochè un punto è sulla circonferenza, o interno, od esterno al cerchio, esso ha dal centro una distanza eguale, o minore, o maggiore del raggio; e viceversa.*

*2°. Un circolo (o cerchio) è individuato dal centro, dal raggio e dal suo piano.*

*3°. Tutti i circoli (o cerchi), aventi raggi eguali, sono eguali.*

*4°. Quando un piano scorre su sè stesso, rotando intorno ad un punto, un circolo del piano, avente per centro quel punto, scorre su sè stesso.*

**24.** Ogni retta, che è situata nel piano di un circolo, e passa per il centro O, incontra il circolo in due punti, poichè su di essa, a partire da O, si possono prendere due segmenti eguali al raggio.

**Definizione 1ª.** — Ogni segmento, che ha per estremi due punti di un circolo e passa per il centro, dicesi *diametro.* I suoi estremi si dicono *punti opposti* del circolo.

**Corollario.** — *Tutti i diametri di un circolo sono eguali.*

Infatti, ciascuno di essi è eguale al doppio di un raggio.

**Teorema.** — *Ogni diametro divide il circolo e il cerchio in due parti eguali.*

Infatti (fig. 13), se facciamo scorrere il piano del circolo attorno al suo centro O, il circolo scorre su sè stesso (§ 23 Cor. 4°), e perciò quando il diametro AB sia venuto a coincidere con sè stesso, ma con gli estremi scambiati, la parte di circolo ACB coincide con l'altra parte BDA, e viceversa.

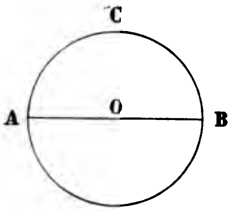


Fig. 13.

Le due parti di circolo ACB, ADB si possono anche portare a coincidere facendo rotare il semipiano ABC di un mezzo giro attorno ad AB, in modo che prenda la posizione del semipiano ADB.

**Definizione 2ª.** — Chiamansi *semicircoli* (o *semicerchi*) le due parti eguali, in cui un circolo (o un cerchio) è diviso da un suo diametro. Questo si chiama il *diametro di ciascuno dei semicircoli* (o *semicerchi*).

**25.** Imaginiamo di far rotare un piano, restando fissi tutti i punti di una sua retta *a*, in modo che esso compia un intero giro (fig. 14). Un semicircolo del piano, avente il suo diametro sulla retta *a*, genera una superficie (P. III, 2°), ogni punto della quale ha dal centro O del semicircolo generatore una distanza eguale al raggio.

Viceversa, se un punto B dello spazio ha dal centro O una distanza eguale al raggio, il semicircolo generatore, nella rotazione, deve passare per esso, poichè, quando il semipiano che lo contiene sia venuto a passare per B, il punto B deve trovarsi sul semicircolo generatore.

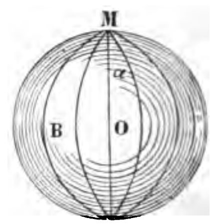


Fig. 14.

Possiamo dunque stabilire le seguenti

**Definizioni.** — 1ª. *Superficie sferica* è il luogo di un semicircolo, che rota attorno ad un suo diametro; oppure superficie sferica è il luogo geometrico dei punti, che hanno una data distanza (detta *raggio*) da un punto fisso (detto *centro*).

2ª. *Sfera* è la parte di spazio percorsa da un semicerchio, che rota attorno al suo diametro, mentre il semicircolo corrispondente percorre la superficie sferica.

**Corollari.** — *1°. Secondochè un punto è sulla superficie sferica, o interno, od esterno alla sfera, ha dal centro una distanza eguale, minore, o maggiore del raggio; e viceversa.*

*2°. Una superficie sferica (o una sfera) è individuata dal centro e dal raggio.*

*3°. Tutte le superficie sferiche (o sfere), aventi raggi eguali, sono eguali.*

*4°. Una superficie sferica, che si muove, restando fisso il centro, scorre su sè stessa.*

**26.** Ogni retta, condotta per il centro O di una sfera, incontra la superficie in due punti, poichè su di essa si possono portare, a partire da O, due soli segmenti eguali al raggio.

**Definizione 1ª.** — Ogni segmento, che ha per estremi due punti di una superficie sferica, e passa per il centro, dicesi *diametro;* i suoi estremi si dicono *punti opposti* della sfera.

**Corollario** *1°. — Tutti i diametri di una sfera sono eguali.*

Infatti, ciascuno di essi è il doppio del raggio.

**Definizione 2ª.** — Un piano, condotto per il centro di una sfera, si chiama un *piano diametrale.*

**Teorema** *1°.* — *Un piano diametrale ha in comune con una superficie sferica (o sfera) tutti i punti di un circolo (o cerchio), che ha lo stesso centro e lo stesso raggio della sfera.*

Infatti, questo piano ha in comune colla superficie sferica (o sfera) tutti quei punti, che si trovano su di esso, ed hanno dal centro della sfera una distanza eguale (oppure eguale o minore) al raggio.

**Definizione 3ª.** — La intersezione di un piano diametrale con una superficie sferica (o sfera) dicesi *circolo* (o *cerchio*) *massimo*, o *diametrale.*

**Corollario** *2°.* — *Per due punti non opposti di una sfera passa uno ed un solo circolo massimo. Per due punti opposti ne passano infiniti,*

**Teorema** *2°.* — *Una superficie sferica (o sfera) è divisa in due parti eguali da un suo piano diametrale.*

Infatti, se facciamo rotare la superficie sferica di un mezzo giro attorno ad un diametro contenuto nel piano diametrale considerato, la superficie sferica scorre su sè stessa (§ 25 Cor. 4), e le due sue parti si scambiano.

**Definizione 4ª.** — Chiamasi *superficie semisferica* (o *semisfera*) ciascuna delle parti, in cui una superficie sferica (o una sfera) è divisa da un suo piano diametrale.

**27.** Un circolo (o una superficie sferica) separa una parte del piano (o dello spazio), i cui punti hanno dal centro una distanza minore del raggio, da un'altra i cui punti hanno dal centro una distanza maggiore del raggio. Perciò il circolo e la superficie sferica (§ 2 Def. 1ª e 2ª) sono il primo una linea, il secondo una superficie completa. Ne segue che ogni linea del piano di un cerchio, che congiunga un punto interno ad esso con uno esterno, deve incontrare il circolo almeno in un punto; e una linea qualunque, che congiunga un punto interno ad una sfera con uno esterno, deve incontrare la superficie sferica almeno in un punto.

**Corollari.** — *1°. Se due circoli sono disposti in un piano, in modo che uno di essi abbia un punto interno ed uno esterno al cerchio compreso dall'altro, i due circoli devono tagliarsi almeno in due punti.*

Infatti (fig. 15) se il punto A del circolo O′ è interno e il punto B esterno al cerchio O, tanto la linea ADB, quanto la linea AEB devono incontrare il circolo O almeno in un punto.

Dimostreremo poi in seguito, che due circoli nelle condizioni suaccennate non possono avere più di due punti comuni.

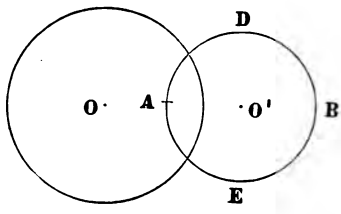


Fig. 15.

*2°. Se un circolo ha un suo punto interno ed uno esterno ad una sfera, deve incontrarne la superficie almeno in due punti.*

**28.** Un punto di un piano è centro d'infiniti circoli di quel piano, come un punto dello spazio è centro d'infinite sfere.

**Definizioni.** — 1ª. Si chiamano *concentriche* due circonferenze di un piano (o due sfere) che hanno il medesimo centro.

Due circonferenze concentriche dividono il piano in tre parti; (P. IV, 2°) una che contiene tutti i punti interni al cerchio di raggio minore, una che contiene tutti i punti esterni a questo cerchio ed interni all'altro, infine una che contiene tutti i punti esterni al cerchio di raggio maggiore.

2ª. La parte di piano, che contiene i punti esterni al cerchio di raggio minore ed interni all'altro, si chiama *anello*, o *corona circolare*.

**29.** Nel piano di un circolo (fig. 16) sieno date due semirette OA, OB uscenti dal suo centro, che tagliano il circolo nei punti A, B; poichè il circolo divide il piano in due parti, e le due semirette OA, OB dividono pure il piano in due parti (angoli), avremo (P. IV, 2°) che il circolo ed il cerchio sono divisi in due parti dalle semirette OA, OB. Ognuna delle due parti di circolo è limitata dai punti A, B, ed ognuna delle parti di cerchio è limitata dai raggi OA, OB e da una parte del circolo.

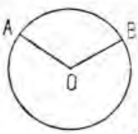


Fig. 16.

**Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *arco* ciascuna delle due parti, in cui un circolo resta diviso da due dei suoi punti, che si dicono gli *estremi* di ambedue gli archi.

2ª. Chiamasi *settore* ciascuna delle due parti, in cui un cerchio resta diviso da due dei suoi raggi, che si dicono *lati* di ambedue i settori.

Un arco (o settore) può essere generato da un punto (o raggio) del circolo, che si muova andando dalla posizione di un estremo (o lato) alla posizione dell'altro estremo (o lato), e restando sempre interno all'arco (o settore) medesimo. Un arco si indica colle due lettere poste agli estremi, ed un settore, scrivendo le due lettere, che indicano l'arco che lo limita, e mettendo in mezzo a queste la lettera, che indica il centro del circolo.

**30.** Sieno dati (fig. 17) due semipiani ACB, ADB uscenti da una retta AB, che passa per il centro O di una sfera, i quali tagliano la superficie secondo due semicircoli massimi ACB, ADB. Poichè la superficie sferica divide lo spazio in due parti, e i due semipiani dividono pure lo spazio in due parti (diedri), avremo (P. IV, 1°) che la sfera e la sua superficie sono rispettivamente divise in due parti dai due semipiani ACB, ADB. Ognuna delle due parti della superficie è terminata dai semicircoli massimi ACB, ADB, ed ognuna delle parti di sfera è limitata dai due semicerchi massimi ACB, ADB e da una parte della superficie sferica.

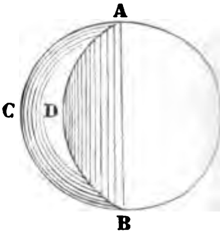


Fig. 17.

**Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *angolo sferico*, o *fuso*, ciascuna delle due parti in cui una superficie sferica è divisa da due suoi semicircoli massimi (detti *lati* del

fuso), aventi lo stesso diametro, il quale si chiama *diametro* del fuso. Gli estremi del diametro si chiamano *vertici* del fuso.

2ª. Chiamasi *spicchio*, o *unghia sferica*, ciascuna delle due parti, in cui una sfera è divisa da due suoi semicerchi massimi (detti *facce* dello spicchio), aventi lo stesso diametro, il quale si chiama *diametro* dello spicchio.

Un fuso (o spicchio) può essere generato da un semicircolo (o semicerchio), che rota attorno al suo diametro, andando dalla posizione di un lato (o faccia) alla posizione dell'altro lato (o faccia), e restando sempre interno al fuso (o spicchio) medesimo. Un fuso (o spicchio) si indica mediante due lettere poste sui lati (o facce), in mezzo alle quali si scrivono le due lettere, che indicano i vertici.

3ª. Se i lati di un angolo sferico (o le facce di uno spicchio) sono le due parti, in cui uno stesso circolo (o cerchio) massimo è diviso da un diametro, l'angolo sferico (o spicchio) dicesi *piatto;* altrimenti si chiama *convesso*, o *concavo*, secondochè i prolungamenti de' suoi lati (o facce) sono esterni, o interni ad esso.

**31. Definizioni.** — 1ª. Ogni angolo situato nel piano di un circolo, e che ha il vertice nel centro di questo, si dice un *angolo al centro*.

2ª. L'arco e il settore, che hanno gli estremi, o i lati, sui lati dell'angolo, e gli altri loro punti interni ad esso, si dicono *compresi* nell'angolo. Si dice anche che l'angolo *insiste*, o *si appoggia*, su questo arco.

3ª. Analogamente ogni diedro, il cui spigolo passa per il centro di una sfera, si dice un *diedro al centro*. L'angolo sferico e lo spicchio, che hanno i lati, o le facce, sulle facce del diedro e gli altri loro punti interni ad esso, si dicono *compresi nel diedro*.

**Corollari.** — *1°. Gli angoli al centro di uno stesso circolo, gli archi e i settori compresi sono in corrispondenza univoca.*

Infatti è evidente che ogni angolo al centro di un circolo individua un arco e un settore, e viceversa.

*2°. I diedri al centro di una stessa sfera, i fusi e gli spicchi compresi sono in corrispondenza univoca.*

**Teorema.** — *Un arco, un settore, un fuso, o uno spicchio, si può portare a coincidere con sè stesso scambiandone gli estremi, i lati o le facce.*

Infatti, se si porta l'angolo al centro, che comprende un arco, o un settore dato, su sè stesso in modo che si scambino i lati (§ 15 Teor.) è chiaro che anche l'arco, o il settore, compreso viene a coincidere con sè stesso, scambiandosi gli estremi, o i lati.

Analogamente, se portiamo a coincidere con sè stesso il diedro al centro, che comprende un dato fuso, o spicchio, in modo che si scambino le sue facce, e resti fisso il centro, è chiaro che anche il fuso, o lo spicchio, compreso viene a coincidere con sè stesso, scambiandosi i lati o le facce.

**32. Definizioni.** — 1ª. Due archi, o due settori, appartenenti ad uno stesso circolo, e due fusi, o spicchi, appartenenti ad una stessa sfera, e aventi lo stesso diametro, si dicono *consecutivi*, se hanno un estremo, o un lato, o una faccia, in comune, e si estendono da parti opposte di questa.

2ª. Dati due o più archi, o settori, o fusi, o spicchi, se portiamo il secondo consecutivo al primo, il terzo consecutivo al secondo, ma non dalla stessa parte del primo, e così di seguito, si ottiene un arco, o un settore, o un fuso, o uno spicchio.

appartenente allo stesso circolo, o cerchio, o superficie sferica, o sfera, che è l'insieme di quelli dati, e che dicesi la *loro somma.*

Avvertiamo anche qui, come per gli angoli e i diedri, che nel fare la somma di più archi può avvenire che si ricopra una o più volte il circolo, e che perciò conviene estendere la definizione di arco nel modo seguente:

3ª. *Arco compreso fra due punti di un circolo* è una delle parti, in cui essi dividono il circolo, aumentata di una o più volte il circolo stesso.

Estensione analoga deve farsi per i settori circolari, i fusi e gli spicchi sferici.

In seguito alle definizioni stabilite in questo § ed al teorema del § precedente, possiamo dire che gli archi di uno stesso circolo, o di circoli eguali, i settori di uno stesso cerchio, o di cerchi eguali, i fusi e gli spicchi relativi ad una stessa sfera, o a sfere eguali, costituiscono quattro nuove *classi* di grandezze geometriche omogenee finite, che godono delle identiche proprietà, che abbiamo dimostrate per i segmenti, gli angoli e i diedri. Per la somma delle grandezze appartenenti a queste nuove classi valgono la proprietà commutativa, l'associativa e l'altre del § 20; inoltre si possono stabilire per esse le definizioni di differenza, di multiplo, summultiplo ecc.

Intenderemo senz'altro estese anche a queste nuove classi di grandezze le definizioni e i teoremi dimostrati per gli angoli e i diedri.

**33. Teorema 1°.** — *In un circolo, o in due circoli eguali,*

*1° due archi, o due settori, compresi in due angoli al centro eguali, sono eguali;*

*2° di due archi, o settori, compresi in due angoli al centro disuguali, è maggiore quello, che è compreso nell'angolo maggiore;*

*3° la somma di due o più angoli al centro comprende un arco e un settore, che sono rispettivamente la somma degli archi e dei settori compresi fra le parti della prima somma.*

*E viceversa.*

1°. Nei due circoli eguali C, C′ (fig. 18) siano i due angoli al centro $\widehat{ACB}$, $\widehat{A'C'B'}$ pure eguali fra loro. Portando l'angolo $\widehat{A'C'B'}$ a coincidere col suo eguale $\widehat{ACB}$, anche i due circoli C, C′ vengono a coincidere, e quindi anche l'arco A′B′ coincide coll'arco AB, e il settore compreso nell'angolo $\widehat{A'C'B'}$ con quello compreso nell'angolo $\widehat{ACB}$; perciò i due archi e i due settori sono uguali.

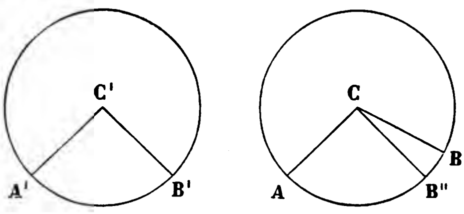


Fig. 18.

2°. Supponiamo ora che nei due circoli eguali C, C′ sia l'angolo $\widehat{ACB}$ maggiore dell'angolo $\widehat{A'C'B'}$. Se portiamo l'angolo $\widehat{A'C'B'}$ sull'angolo $\widehat{ACB}$ in modo che coincidano i lati CA, C′A′, il lato C′B′ prenderà una posizione CB″ interna all'angolo $\widehat{ACB}$. Perciò l'arco A′B′ sarà eguale all'arco AB″, e il settore A′C′B′

al settore ACB″, e quindi l'arco e il settore compresi nell'angolo $A'\widehat{C}B'$ sono rispettivamente minori dell'arco e del settore compresi nell'angolo $A\widehat{C}B$.

3°. È facile vedere, per le definizioni ammesse, che se i due angoli al centro $A\widehat{C}B''$, $B''\widehat{C}B$ sono consecutivi, anche gli archi AB″, B″B ed i settori da essi compresi sono consecutivi; e quindi l'angolo somma $A\widehat{C}B$ comprende l'arco AB somma dei due archi AB″, B″B ed il settore ACB somma dei due settori ACB″, B″CB.

Analogamente si dimostrano i teoremi inversi.

**Corollari.** — *1°. Un angolo al centro è convesso, piatto, o concavo, secondochè comprende un arco minore, eguale, o maggiore di un semicircolo; e viceversa.*

*2°. In uno stesso circolo, o in circoli eguali, se un angolo al centro è doppio, triplo...... di un altro, anche l'arco ed il settore, compresi nel primo, sono rispettivamente il doppio, il triplo..... dell'arco e del settore compresi nel secondo; e viceversa.*

*3°. Quando un circolo scorre su sè stesso, tutti i suoi punti descrivono archi eguali.*

**Teorema** 2°. — *In una stessa sfera, o in sfere eguali,*

*1° due fusi, o due spicchi, compresi in due diedri al centro eguali, sono eguali;*

*2° di due fusi, o di due spicchi, compresi in due diedri al centro disuguali, è maggiore quello compreso nel diedro maggiore;*

*3° la somma di due o più diedri al centro comprende un fuso e uno spicchio, che sono rispettivamente la somma dei fusi e degli spicchi compresi fra le parti della prima somma.*

*E viceversa.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

**Corollari.** — *4°. Un diedro al centro è convesso, piatto, o concavo, secondochè comprende un fuso minore, eguale, o maggiore di una superficie semisferica; e viceversa.*

*5°. In una stessa sfera, o in sfere eguali, se un diedro al centro è doppio, triplo..... di un altro, anche il fuso e lo spicchio, compresi nel primo, sono rispettivamente il doppio, il triplo,.... del fuso e dello spicchio, compresi nel secondo; e viceversa.*

*6°. Quando una sfera scorre su sè stessa, tutti i semicircoli massimi, che hanno per diametro l'asse, descrivono angoli sferici eguali.*

**34. Definizione 1ª.** — Si dicono *supplementari* due archi (o fusi), quando la loro somma è uguale a un semicircolo (o ad una superficie semisferica).

**Corollario 1°.** — *Sono eguali due archi (o fusi) supplementari di archi (o fusi) eguali.*

**Definizione 2ª.** — Due archi (o fusi) si dicono *opposti,* se sono compresi da angoli (o diedri) al centro opposti.

**Corollario 2°.** — *Due archi (o fusi) opposti sono eguali.*

# CAPITOLO IV

## Rette parallele, Rette parallele a piani. Piani paralleli.

**35. Definizioni.** — 1ª. Se una retta *c* taglia due rette *a*, *b*, diremo che essa è una *trasversale* o *secante* di queste.

2ª. Gli angoli formati dalle semirette di *a*, o di *b*, colla semiretta appartenente alla trasversale *c*, che incontra la *b* o la *a*, diconsi *interni* alle rette *a*, *b*; gli angoli formati dalle semirette di *a*, o di *b*, con la semiretta della trasversale *c*, che non incontra la retta *b* od *a*, diconsi *esterni* alle due rette *a*, *b*.

Degli otto angoli formati dalla trasversale *c* colle rette *a*, *b*, e che nella figura 19 sono indicati coi numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, quattro sono *interni* (3, 4, 5, 6) quattro *esterni* (1, 2, 7, 8) alle rette *a*, *b*; quattro si trovano da una parte della secante (1, 4, 5, 8) e quattro dall'altra (2, 3, 6, 7).

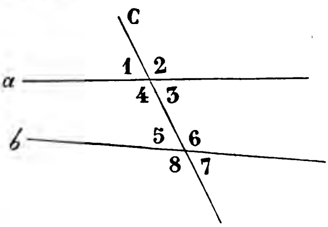


Fig. 19.

Considerati poi due a due, questi angoli prendono i seguenti nomi:

3ª. Due angoli dalla stessa parte della trasversale, ambedue interni, o ambedue esterni, si chiamano rispettivamente *coniugati interni* o *coniugati esterni*. (Gli angoli 3 e 6 e gli angoli 4, 5 sono coniugati interni; gli angoli 1, 8 e gli angoli 2, 7 sono coniugati esterni).

4ª. Si chiamano *corrispondenti* due angoli, non conseguenti, uno esterno e l'altro interno, e situati dalla stessa parte della trasversale (tali sono le coppie 2, 6; 3, 7; 1, 5; 4, 8).

5ª. Si chiamano *alterni interni* due angoli interni non conseguenti e non situati da una stessa parte della trasversale (tali sono le coppie 4, 6 e 3, 5).

6ª. Si chiamano *alterni esterni* due angoli esterni non conseguenti e non situati da una stessa parte della trasversale (tali sono le coppie 1, 7 e 2, 8).

**36. Teorema.** — *Se due rette di un piano sono tagliate da una terza, ed è verificata una delle seguenti proprietà:*

*1ª essere uguali due angoli alterni interni,*
*2ª „ „ „ „ „ esterni,*
*3ª „ „ „ „ corrispondenti,*
*4ª „ supplementari due angoli coniugati interni,*
*5ª „ „ „ „ „ esterni,*
*sono verificate tutte le altre, e le due rette non s' incontrano.*

I due angoli 1, 3 (fig. 19) sono uguali, come opposti al vertice, e sono supplementari dei loro conseguenti 2, 4; e per le stesse ragioni gli angoli 5, 7 sono uguali fra loro, e sono supplementari dei due 6, 8. Ne segue che, se sono uguali per es. i due angoli alterni interni 3, 5, devono essere uguali i quattro angoli 1, 3, 5, 7, ed allora i rimanenti angoli 2,4,6,8, sono pure uguali fra loro e supplementari dei primi quattro. Alle stesse conclusioni si giunge, supponendo che sieno uguali due angoli cor-

rispondenti, o due angoli alterni esterni, oppure che sieno supplementari due angoli coniugati interni od esterni. Resta così dimostrata la prima parte del teorema.

Dimostriamo ora che, quando sono verificate le condizioni esposte, le due rette non possono incontrarsi.

Pertanto immaginiamo di tagliare il piano della figura lungo la retta AB (fig. 20), e di portare, per es. quella che si trova alla destra della retta AB, sull'altra, in modo che il segmento MN venga a coincidere con sè stesso, scambiando i suoi estremi (§ 15 Teor.). A causa dell'eguaglianza degli angoli $\widehat{CMN}$, $\widehat{MNF}$, la semiretta NF coinciderà colla semiretta MC, e, a causa dell'eguaglianza degli angoli $\widehat{DMN}$, $\widehat{MNE}$, la semiretta MD coinciderà colla semiretta NE.

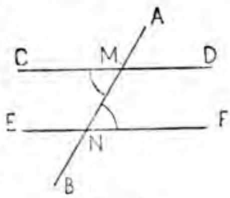


Fig. 20.

Se dunque le semirette NF, MD avessero un punto comune, ne dovrebbero avere un altro comune le due semirette NE, MC; ma ciò è assurdo, perchè due rette non possono avere più di un punto comune (§ 7 Cor. 2°); dunque le due rette FE, DC non possono avere alcun punto comune.

**Definizioni.** — 1ª. Due rette, che giacciono in uno stesso piano e non s'incontrano, si dicono *parallele*. I segmenti di due rette parallele si dicono *paralleli*.

2ª. Se due rette non s'incontrano, nè sono parallele, si dicono *sghembe*. Due segmenti si dicono *sghembi*, se le rette, alle quali appartengono, sono sghembe.

**Corollari.** — *1°. Se due rette sono parallele, ciascuna di essa giace interamente in una delle parti, in cui l'altra divide il loro piano.*

*2°. Se un piano α si fa scorrere su sè stesso lungo una sua retta* DN, *un'altra sua retta* AB, *che incontri la* DN, *si muove restando sempre parallela a sè stessa.*

Se infatti N è il punto d'incontro della retta DN (fig. 21) colla AB, e A′B′ è la posizione che assume AB quando il punto N è giunto in M, si ha che l'angolo $\widehat{A'MD}$ è uguale al suo corrispondente $\widehat{ANM}$, e perciò le due rette AB, A′B′ sono parallele.

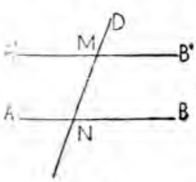


Fig. 21.

*3°. Da un punto si può sempre condurre una retta parallela a una retta data.*

Sia M il punto dato (fig. 21), AC la retta data, e sia NM una retta, che passi per M, e che incontri la AB. Facciamo scorrere il piano individuato dal punto M e dalla retta AB su sè stesso lungo la retta NM, finchè N venga in M. È chiaro allora che la posizione A′B′, alla quale giunge AB alla fine dello scorrimento, è parallela ad AB (Cor. precedente).

**37.** Postulato X (*delle parallele*).

*Da un punto non si può condurre più di una retta parallela ad una retta data.*

**Corollario.** — *Se una retta* b′ *incontra una retta* b, *deve incontrare anche qualunque retta* a *parallela a* b *situata nel piano* bb′.

Infatti, se $b'$ non incontrasse la retta $a$, sarebbe ad essa parallela, e allora per il punto A, comune alle $b$, $b'$, passerebbero due rette $b$, $b'$ parallele ad $a$.

**Teorema.** — *Se due rette parallele sono tagliate da una terza formano:*

*1°. gli angoli alterni interni uguali*
*2°. „ „ alterni esterni „*
*3°. „ „ corrispondenti „*
*4°. „ „ coniugati interni supplementari*
*5°. „ „ coniugati esterni „*

Sieno BC, B′C′ (fig. 22) due rette parallele, ed HK una trasversale qualunque. Se per es. i due angoli corrispondenti $\widehat{HA'C'}$, $\widehat{HAC}$ non fossero uguali, uno dei due, per es. HA′C′, sarebbe maggiore dell'altro, e quindi potremmo condurre una retta ED, tale che l'angolo $\widehat{HA'D}$ fosse uguale ad $\widehat{HAC}$. Allora, non solo la retta B′C′, ma anche la retta ED sarebbe parallela a BC, e ciò è assurdo, poichè per un punto non si può condurre più di una parallela ad una retta data.

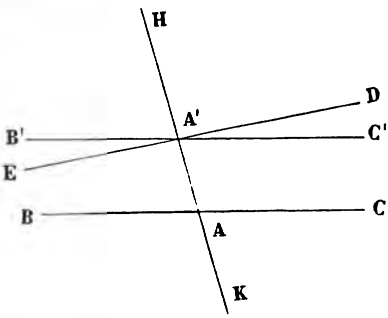


Fig. 22.

**38.** Abbiamo dimostrato nel § 36 che, se due rette di un piano sono parallele, ciascuna di essa giace interamente in uno dei semipiani, in cui il piano dato resta diviso dall'altra, ne segue che due rette parallele dividono il loro piano in tre parti (Postulato VI, 2°).

**Definizione.** — La parte di piano, compresa fra due rette parallele, dicesi *striscia*, e le due parallele si dicono *lati* della striscia.

È facile definire anche per le striscie, come abbiamo fatto per i segmenti, gli angoli, i diedri ecc. i concetti di eguaglianza e disuguaglianza, di somma e differenza.

**Teorema.** — *Se più rette parallele, situate in un piano, tagliano una trasversale, esiste una corrispondenza univoca fra le rette medesime e i punti della trasversale, per i quali passano, tale che:*

*1°. a due o più segmenti eguali delle rette corrispondono strisce uguali;*

*2°. alla somma di due o più segmenti corrisponde la somma delle strisce corrispondenti.*

*E viceversa.*

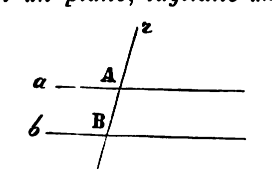


Fig. 23.

Sieno $a$, $b$, $c$, $d$,... (fig. 23) più rette parallele tagliate nei punti A, B, C, D,... dalla trasversale $r$. Supponendo AB $\equiv$ CD, si vuol dimostrare che anche la striscia $ab \equiv cd$. Infatti, facendo scor-

rere il piano della figura lungo la retta $r$ in modo che C venga in A, anche D, cadrà in B e per conseguenza le rette $c, d$ vengono a coincidere colle parallele $a, b$ (§ 36 Cor. 2°).

È poi facile vedere, che se un segmento AD della retta $r$ è somma di più segmenti AB, BC, CD, anche la striscia *ad* è somma delle corrispondenti striscie *ab*, *bc*, *cd*.

I teoremi inversi sono veri per la 2ª legge delle inverse.

**Corollari.** — *1°. Date due striscie disuguali esiste una multipla della minore maggiore dell'altra.*

*2°. Se si scompone una striscia in più striscie, non è possibile ricomporla con alcune di esse soltanto.*

*3°. Una striscia si può portare a coincidere con sè stessa scambiandone i lati.*

*4°. Quando un piano scorre su sè stesso lungo una sua retta, ogni altra retta parallela a questa scorre su sè stessa.*

Da quanto precede risulta (§ 20 Def.) che le striscie costituiscono una classe di grandezze finite.

**39. Teorema.** — *Se due rette sono parallele, qualunque piano condotto per una di esse non può tagliare l'altra.*

Siano (fig. 24) $a$, $b$ le due rette parallele date, ed $\alpha$ un piano condotto per $b$. La retta $a$, essendo situata nel piano $\beta$ individuato dalle due parallele $a$, $b$, non potrebbe incontrare $\alpha$ altro che in un punto della retta $b$, secondo la quale $\alpha$ è tagliato da $\beta$. Perciò, siccome $a$ non incontra $b$ per ipotesi, così essa non può incontrare neppure il piano $\alpha$.

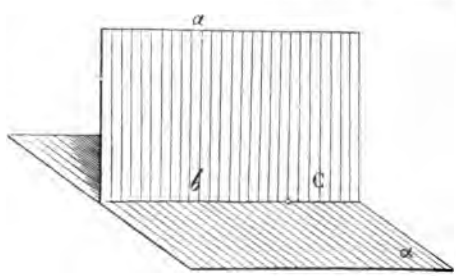


Fig. 24.

**Definizione.** — Una retta ed un piano, che non s'incontrano, si dicono *paralleli*. Un segmento ed una parte di piano si dicono *paralleli*, se la retta ed il piano, ai quali rispettivamente appartengono, sono paralleli.

**Corollari.** — *1°. Una retta è parallela ad un piano, quando è parallela ad una retta giacente in esso.*

*2°. Una retta parallela ad un piano giace interamente in una delle parti, in cui lo spazio resta diviso dal piano.*

**40. Teorema.** — *Se per una retta parallela ad un piano conduciamo diversi piani, che taglino il piano dato, le intersezioni di essi con questo sono rette parallele alla retta data e parallele fra loro.*

Sia $a$ (fig. 25) una retta parallela al piano $\alpha$; e sieno $b$, $c$, $d$.... le rette comuni ad $\alpha$ ed a vari piani condotti per $a$. La retta $a$ non può incontrare per es. la $b$, perchè se incontrasse $b$, incontrerebbe anche il piano $\alpha$. Inoltre le rette $a$, $b$ sono situate in un piano, e quindi esse sono parallele. Per le stesse ragioni la retta $a$ è parallela a $c$, a $d$, ecc. Due di queste rette $b$, $c$ sono poi parallele fra loro, perchè giacciono

nel piano $\alpha$, e se avessero un punto comune, questo sarebbe comune anche ai due piani $ab$, $ac$, i quali perciò coinciderebbero.

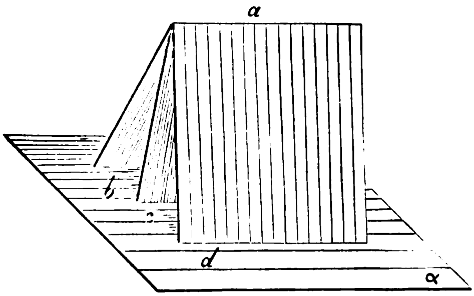



Fig. 25.

**Corollari.** — *1°. Se una retta è parallela ad un piano, qualunque retta parallela alla retta data, condotta per un punto del piano dato, giace interamente in questo.*

Sia $a$ la retta data (fig. 24) ed $\alpha$ il piano parallelo ad essa. Il piano, individuato dalla retta $a$ e da un punto C di $\alpha$, taglia il piano $\alpha$ secondo una retta parallela ad $a$, e quindi, poichè per un punto non si può condurre che una sola parallela ad una retta data, la parallela alla retta $a$, condotta per il punto C, deve coincidere colla intersezione del piano $\alpha$ col piano $a$C, e perciò deve giacere in $\alpha$.

*2°. Se due piani che si tagliano sono paralleli ad una retta, la loro intersezione è pure parallela alla retta.*

Se i due piani $\beta$, $\gamma$ (fig. 26) sono paralleli alla retta $a$, e per uno dei loro punti comuni si conduce la retta parallela ad $a$, essa deve giacere tanto nel piano $\beta$, quanto nel piano $\gamma$, e perciò deve coincidere colla loro comune intersezione $d$.

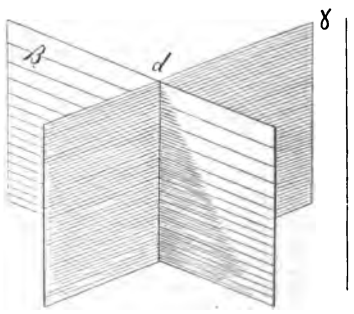



Fig. 26.

*3°. Se due rette sono sghembe, per ciascuna di esse passa uno, ed un solo, piano parallelo all'altra.*

Infatti sieno $a$ e $b$ le due rette sghembe date. Se per un punto C della $b$ si conduce la parallela ad $a$, essa individua colla $b$ un piano $\alpha$ parallelo alla retta $a$ (§ 39 Cor. 1°). Esso poi è unico, poichè, pel corollario 1°, ogni piano parallelo ad $a$ e contenente la retta $b$ deve anche contenere la parallela ad $a$ condotta per C, e quindi coincide con $\alpha$.

**41. Teorema.** — *Due piani, che hanno un punto comune e passano rispettivamente per due rette parallele, si tagliano secondo una retta parallela alle rette date.*

Infatti (fig. 27) il piano P$a$, condotto per la retta $a$, parallela alla $b$, risulta parallelo alla retta $b$ (§ 39 Cor. 1°), ed il piano P$b$, condotto per la retta $b$ parallela a P$a$, deve tagliare P$a$ secondo una retta $c$ parallela a $b$ (§ 40 Teor.). Nello stesso modo si dimostra che le rette $a$, $c$ sono parallele.

**42. Teorema.** — *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.*

Sieno (fig. 27) $a$, $c$ due rette ambedue parallele ad una stessa retta $b$. È chiaro che le due rette $a$, $c$ non possono incontrarsi, poichè, se avessero un punto comune, per esso passerebbero due rette parallele ad una terza, ciò che è assurdo: se dunque le tre rette sono in un piano il teorema è dimostrato. Supponiamo ora che le tre rette non siano in uno stesso piano. Si conducano i due piani individuati dalle due rette $a$, $b$ rispettivamente e da un punto P della $c$; la loro intersezione dev'essere una retta parallela ad $a$ e $b$, e quindi coincide con $c$; ossia $c$ è parallela anche ad $a$.

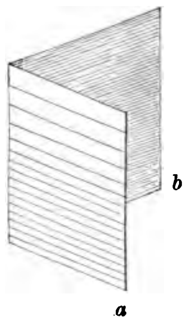


Fig. 27.

**43. Definizioni.** — 1ª. Se un piano $\gamma$ taglia due piani $\alpha$, $\beta$ secondo due rette parallele, diremo che esso è un piano *trasversale* o *secante* di essi.

2ª. I diedri formati dai semipiani di $\alpha$ o di $\beta$ col semipiano appartenente al piano trasversale $\gamma$, che incontra il piano $\beta$ o $\alpha$, diconsi *interni* ai piani $\alpha$, $\beta$; i diedri formati dai semipiani di $\alpha$ o di $\beta$ col semipiano, appartenente al piano trasversale $\gamma$ che non incontra $\beta$ o $\alpha$, diconsi *esterni* ai piani $\alpha$, $\beta$.

Degli otto diedri formati dal piano trasversale $\gamma$ coi piani $\alpha$, $\beta$, e che nella fig. 28 sono indicati coi numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, quattro sono *esterni* (3, 4, 5, 6) e quattro *interni* (1, 2, 7, 8) ai piani $\alpha$, $\beta$; quattro sono da una parte del piano trasversale (1, 4, 5, 8) e quattro dall'altra (2, 3, 6, 7).

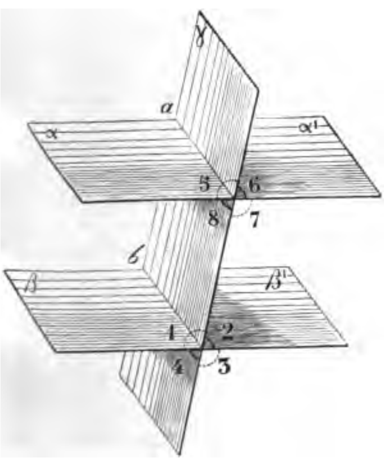


Fig. 28.

Considerati poi due a due gli otto diedri suddetti, prendono i seguenti nomi:

3ª. Due diedri dalla stessa parte del piano trasversale, ambedue interni o ambedue esterni, si dicono rispettivamente *coniugati interni* o *coniugati esterni*. (I diedri 1, 8 e i diedri 2, 7 sono coniugati interni; i diedri 4, 5 e i diedri 3, 6 sono coniugati esterni).

4ª. Si chiamano *corrispondenti* due diedri, non conseguenti, uno esterno e l'altro interno ai piani $\alpha$, $\beta$, e situati dalla stessa parte del piano trasversale (tali sono le coppie di diedri 2, 6; 3, 7; 1, 5; 4, 8).

5ª. Si chiamano *alterni interni* due diedri interni, non conseguenti, e non situati dalla stessa parte del piano trasversale; (tali sono le coppie 1, 7 e 2, 8).

6ª. Si chiamano *alterni esterni* due diedri esterni, non conseguenti, e non situati dalla stessa parte del piano trasversale; (tali sono le coppie 4, 6 e 3, 5).

**44. Teorema.** — *Se due piani $\alpha$, $\beta$ passano per due rette parallele situate in un piano $\gamma$, ed è verificata una delle seguenti proprietà:*

*1° essere uguali due diedri corrispondenti,*

*2° essere uguali due diedri alterni interni,*
*3° " " " " alterni esterni,*
*4° " supplementari due diedri coniugati interni,*
*5° " " " " coniugati esterni,*
*sono verificate tutte le altre, e i due piani non s' incontrano.*

I due diedri 1, 3 sono uguali, come opposti allo spigolo, e sono supplementari dei loro conseguenti 2, 4; e per la stessa ragione i due diedri 5, 7 sono uguali fra loro, e sono supplementari dei due 6, 8. Deriva da ciò che, se per es. il diedro 1 è uguale al diedro 5, sono uguali i quattro diedri 1, 3, 5, 7, e gli altri quattro 2, 4, 6, 8 sono pure uguali fra loro e supplementari dei primi quattro. Da ciò risulta la prima parte del teorema.

Resta a dimostrare che i due piani non s' incontrano. A tale scopo portiamo a coincidere la striscia $a$ $b$ (fig. 28) su sè stessa (§ 38 Cor. 3°), in modo che la retta $a$ venga su $b$ e la $b$ su $a$. Allora, a causa dell' eguaglianza dei diedri 3, 5, il semipiano $\alpha$ verrà a coincidere col semipiano $\beta'$, e, a causa dell'eguaglianza dei diedri 4, 6, il semipiano $\beta$ verrà a coincidere col semipiano $\alpha'$.

Ora, siccome i due piani passano per le rette parallele $a$, $b$, se s'incontrassero, la loro intersezione dovrebbe essere una retta parallela alle rette $a$, $b$ (§ 42 Teor.), e quindi parallela anche al piano $\gamma$, e perciò dovrebbe essere tutta situata da una parte di questo piano (§ 39 Cor. 2°). Ma dal ragionamento fatto risulta che, se le due parti di piano $\alpha'$, $\beta'$ avessero una retta comune, anche le due parti di piano $\alpha$, $\beta$ dovrebbero avere una retta in comune, e distinta dalla prima; e ciò è assurdo, perchè due piani non possono avere più d'una retta comune.

**Definizione.** — Due piani, che non s' incontrano, si dicono *paralleli.* Le parti di due piani paralleli si dicono *parallele.*

**Corollari.** — *1°. Se due piani sono paralleli, ogni retta di uno di essi è parallela all'altro.*

*2°. Se due piani sono paralleli, ciascuno di essi giace interamente in una delle parti, in cui l'altro divide lo spazio.*

*3°. Quando un piano scorre su sè stesso, strisciando lungo una sua retta, ogni piano, collegato invariabilmente con esso, scorre su sè stesso, se è parallelo a quella retta, o passa per essa, e si muove parallelamente a sè stesso, se la taglia.*

**45. Teorema.** — *Per un punto si può sempre condurre uno ed un solo piano parallelo a un piano dato.*

Per il punto dato O si conduca un piano $\gamma$, che tagli il piano dato $\alpha$ secondo una retta $a$, ed una retta OB, che incontri $a$ in un punto B. Facciamo scorrere su sè stesso il piano $\gamma$, strisciando lungo la retta OB, fintantochè il punto B venga in O. Allora la retta $a$ prenderà una posizione $b$ parallela alla prima, e il piano $\alpha$ una posizione $\beta$, che passa per il punto O e che è parallela al piano $\alpha$ (§ 44 Cor. 3°).

Supposto ora che per O si possano condurre due piani $\beta$,$\beta'$ paralleli ad $\alpha$ (fig. 29), i due piani $\beta$, $\beta'$, avendo in comune il punto O, devono avere in comune anche una retta $c$, che passa per quel punto (§ 11 Teor.). Allora ogni piano $\gamma$, che tagli $\alpha$ e passi per O, senza contenere la retta $c$,

deve tagliare β, β′ secondo due rette *b*, *b′* parallele al piano α (§ 44 Cor. 1°) e quindi anche alla retta *a* intersezione dei due piani α e γ (§ 40 Teor.); ma ciò è assurdo, perchè per un punto non si può condurre più di una retta parallela a una retta *c* data.

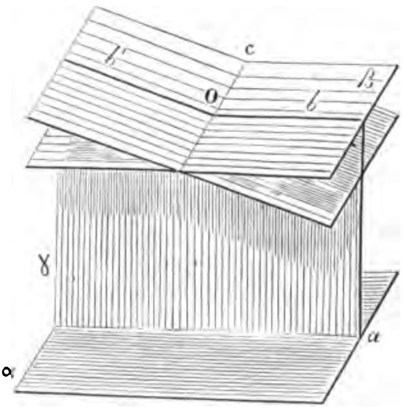


Fig. 29.

**Corollari.** — *1°. Due piani paralleli ad un terzo sono paralleli fra loro.*

Infatti, se due piani β, γ paralleli ad un terzo α s'incontrassero, per uno dei punti comuni passerebbero due piani paralleli ad α, e ciò è impossibile.

*2°. Se un piano α taglia un piano β, deve tagliare anche tutti i piani paralleli a β.*

**46. Teorema.** — *Due piani paralleli sono tagliati da un terzo secondo rette parallele, e*
*1° i diedri corrispondenti sono eguali,*
*2° „ alterni interni „ „ ,*
*3° „ alterni esterni „ „ ,*
*4° „ coniugati interni sono supplementari,*
*5° „ coniugati esterni „ „*

Infatti le due rette d'intersezione sono nel medesimo piano secante, e non possono incontrarsi, perchè, se avessero un punto comune, questo sarebbe comune anche ai due piani, i quali non sarebbero più paralleli contro l'ipotesi.

La seconda parte del teorema si dimostra per assurdo come il Teorema del § 37.

**Corollario.** — *Se due piani α e β, che si tagliano, sono rispettivamente paralleli ad altri due α′, β′, questi si tagliano pure secondo una retta* r′ *parallela alla intersezione* r *dei primi due.*

Infatti il piano α, tagliando il piano β, deve tagliare anche il piano β′ parallelo a β (§ 45 Cor. 2°) secondo una retta *r″* parallela ad *r*. Per le stesse ragioni il piano β′, tagliando il piano α secondo una retta *r″*, deve tagliare anche il piano α′, parallelo ad α, secondo una retta *r′* parallela ad *r″*, e quindi parallela anche ad *r* (§ 42 Teor.).

**47.** Risulta da ciò che precede che, se due piani sono paralleli, essi dividono lo spazio in tre parti; possiamo quindi dare la seguente:

**Definizione.** — La parte di spazio compresa fra due piani paralleli dicesi *strato*, e i due piani si dicono *facce* di esso.

È facile definire anche per gli strati, come abbiamo fatto per le striscie, i concetti di eguaglianza e diseguaglianza, di somma e differenza, ecc.

**Teorema.** — *Se più piani paralleli tagliano una trasversale, esiste una corrispondenza univoca fra i piani medesimi e i punti della trasversale, per i quali passano, tale che:*

*1°. a due o più segmenti eguali della retta corrispondono strati eguali:*

*2°. alla somma di due o più segmenti della retta corrisponde la somma degli strati corrispondenti.*

*E viceversa.*

Condotto un piano per la retta data, si faccia scorrere questo piano lungo la retta e si imiti la dimostrazione del § 38.

**Corollari.** — *1°. Dati due strati disuguali esiste un multiplo del minore maggiore dell'altro.*

*2°. Uno strato si può portare a coincidere con sè stesso scambiandone le facce.*

*3°. Se si scompone uno strato in più strati, non è possibile ricomporlo con alcuni di essi soltanto.*

Da quanto precede risulta (§ 20 Def.) che gli strati costituiscono una classe di grandezze finite.

**48. Teorema.** — *Per un punto si possono condurre infinite rette parallele ad un piano dato, le quali giacciono tutte nel piano parallelo al piano dato.*

Sia O il punto ed $\alpha$ il piano dato. Se per O conduciamo il piano $\beta$ parallelo ad $\alpha$, è chiaro che tutte le rette di $\beta$ (ed in particolare quelle che passano per O) non possono incontrare il piano $\alpha$, ossia sono ad esso parallele.

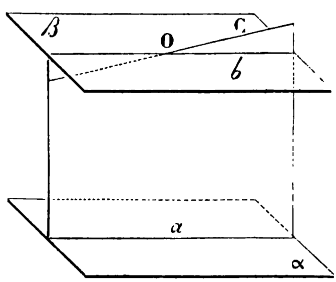


Fig. 30.

Supponiamo ora che per O si possa condurre una retta $c$ parallela ad $\alpha$ non situata nel piano $\beta$. Per la retta $c$ conduciamo un piano $\gamma$ qualunque, che tagli $\alpha$ secondo una retta $a$. Allora il piano $\gamma$, avendo il punto O comune con $\beta$, dovrà tagliarlo secondo una retta $b$ parallela alla retta $a$ (§ 46 Teor.). Ma anche la retta $c$ è parallela ad $a$ (§ 40 Teor.), e ciò è assurdo. Dunque tutte le parallele ad $\alpha$ condotte da O giacciono in $\beta$.

**Corollari.** — *1°. Se due rette, che s'incontrano, sono parallele ad un piano, esse individuano un piano parallelo al piano dato.*

*2°. Se due rette* r, r′, *che s'incontrano, sono rispettivamente parallele a due rette* s, s′ *di un altro piano, queste s'incontrano pure, e il piano individuato dalle prime due è parallelo al piano individuato dalle altre.*

Infatti le rette $s, s'$ non possono essere parallele fra loro, perchè altrimenti (§ 42 Teor.) ciascuna di esse sarebbe parallela ad entrambe le rette $r, r'$, le quali s'incontrano, e ciò è assurdo. Inoltre le $s, s'$, es-

sendo parallele alle $r, r'$ rispettivamente, sono pure parallele al loro piano (§ 39 Cor. 1°), e quindi, per il corollario precedente, anche il piano delle $s, s'$ è parallelo al piano delle $r, r'$.

**49. Definizioni.** — 1ª. Se da due punti escono due semirette parallele, si dice ch'esse sono *dirette nello stesso senso, o in senso contrario*, secondo che giacciono ambedue in una delle parti, in cui il piano resta diviso dalla retta, individuata dai due punti, oppure giacciono in parti opposte.

2ª. Se da due rette parallele escono due semipiani paralleli, si dice ch'essi sono *diretti nello stesso senso, o in senso contrario*, secondo che sono situati ambedue in una delle parti, in cui lo spazio resta diviso dal piano individuato dalle due parallele, oppure giacciono in parti opposte.

**Teorema.** — *Se due angoli hanno i lati diretti rispettivamente nello stesso senso, o in senso contrario, sono eguali; e, se hanno una coppia di lati diretti nello stesso senso e una coppia di lati diretti in senso contrario, i due angoli sono supplementari.*

Sieno (fig. 31) le rette OA, OB, che passano per O, rispettivamente parallele alle O′A′, O′B′, che passano per O′, e supponiamo dapprima che sieno situate in piani diversi.

Sia $\alpha$ il piano delle rette parallele OA, O′A′, $\beta$ quello delle rette parallele OB, O′B′. Facendo scorrere uno dei piani lungo lo spigolo OO′ finchè il punto O venga in O′, anche l'altro piano scorrerà su sè stesso (§ 15 Cor. 2°) e la OA verrà a coincidere colla sua parallela O′A′ (§ 36, Cor. 2°) e la OB colla sua parallela O′B′; perciò l'angolo $A\widehat{O}B$ verrà a coincidere coll'angolo $A'\widehat{O'}B'$; dunque gli angoli $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ che hanno i lati diretti nello stesso senso, sono uguali. Se ne deduce facilmente che, se due angoli hanno i lati diretti in senso contrario, sono pure eguali, e se due angoli hanno una coppia di lati diretti nello stesso senso ed una coppia di lati diretti in senso contrario sono supplementari.

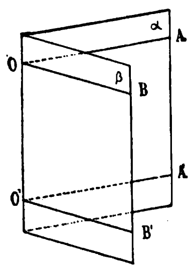


Fig. 31.

Nel caso che le quattro rette date sieno in un piano, il teorema si può dimostrare nello stesso modo, facendo scorrere il piano nel quale esse giacciono lungo la congiungente i punti comuni O, O′, finchè questi vengano a coincidere; oppure nel modo seguente.

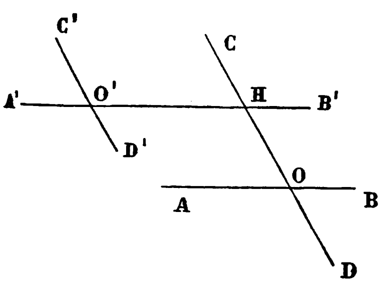


Fig. 32.

La retta A′B′ (fig. 32), incontrando in O′ la C′D′, deve incontrare pure la CD, che è parallela a C′D′, in un punto H (§ 37 Cor.). Pertanto gli angoli $A'\widehat{O'}C'$, $C'\widehat{O'}B'$, $B'\widehat{O'}D'$ $D'\widehat{O'}A'$ sono rispettivamente uguali agli angoli $A'\widehat{H}C$, $C\widehat{H}B'$ $B'\widehat{H}D$, $D\widehat{H}A'$, come corrispondenti rispetto alle rette parallele CD, C′D′ e alla trasversale A′B′. Questi ultimi poi sono rispettivamente uguali agli angoli $A\widehat{O}C$, $C\widehat{O}B$, $B\widehat{O}D$, $D\widehat{O}A$, come corrispondenti rispetto alle parallele A′B′, AB e alla trasversale CD; dunque, siccome due angoli uguali ad

un terzo sono uguali fra loro, ne segue che gli angoli $A\widehat{O}C, A'\widehat{O'}C'$, che hanno i lati diretti nello stesso senso, e gli angoli $A\widehat{O}C, B'\widehat{O'}D'$, che hanno i lati diretti in senso contrario, sono eguali; mentre gli angoli $A\widehat{O}C, B'\widehat{O'}C'$, che hanno una coppia di lati diretti nello stesso senso ed una coppia di lati diretti in senso contrario, sono supplementari.

**Definizione.** — Si chiamano ***angoli di due rette sghembe*** gli angoli formati da due rette ad esse parallele condotte per un punto.

**50. Teorema.** — *Se due diedri hanno le facce dirette rispettivamente nello stesso senso, o in senso contrario, sono eguali; e, se hanno una coppia di facce dirette nello stesso senso e una coppia di facce dirette in senso contrario, i due diedri sono supplementari.*

Sieno i due piani $\alpha$, $\beta$ (fig. 33) che si tagliano lungo la retta AB, rispettivamente paralleli ai piani $\alpha'$, $\beta'$, che si tagliano lungo la retta A′B′. Il piano $\alpha'$, incontrando $\beta'$, dovrà incontrare anche il piano $\beta$ parallelo ad esso lungo una retta HK, che sarà parallela tanto ad A′B′ quanto ad AB (§ 45 Cor. 2° e § 46).

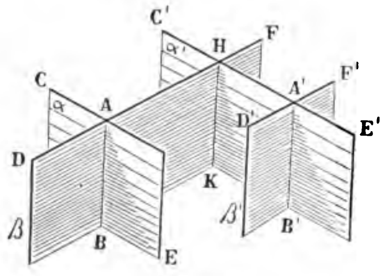



Fig. 33.

Si ha poi che i diedri $D\widehat{AB}C$, $C\widehat{AB}F$, $F\widehat{AB}E$, $E\widehat{AB}D$ sono rispettivamente uguali ai diedri $D\widehat{HK}C'$, $C'\widehat{HK}F$, $F\widehat{HK}E'$, $E'\widehat{HK}D$, come corrispondenti rispetto ai piani paralleli $\alpha$, $\alpha'$ e al piano trasversale $\beta$; ma questi sono rispettivamente uguali ai diedri $D'\widehat{A'B'}C'$, $C'\widehat{A'B'}F'$, $F'\widehat{A'B'}E'$, $E'\widehat{A'B'}D'$, come corrispondenti rispetto ai piani paralleli $\beta$, $\beta'$ e al piano trasversale $\alpha'$, quindi, siccome due diedri eguali ad un terzo sono uguali fra loro, ne viene che i diedri $D\widehat{AB}C$, $D'\widehat{A'B'}C'$, che hanno le facce dirette nello stesso senso, e i diedri $D\widehat{AB}C$, $E'\widehat{A'B'}F'$, che hanno le facce dirette in senso contrario, sono eguali; mentre i diedri DABC, D′A′B′E′, che hanno una coppia di facce dirette nello stesso senso ed una coppia di facce dirette in senso contrario, sono supplementari.

**51. Teoremi.** — *1°. Un segmento, che ha gli estremi sopra i due lati di un angolo convesso (o di una striscia) o interni ad esso, è interno a quell'angolo (o alla striscia).*

Sia $B\widehat{A}C$ l'angolo convesso dato ed MN il segmento, che termina ai lati di quest'angolo. La semiretta MN giace tutta in una delle parti, in cui la retta AB divide il piano della figura, e così pure la semiretta NM giace tutta in una delle parti del piano diviso dalla retta AC; per conseguenza il segmento MN, comune alle due semirette MN, NM, giace interamente nella parte di piano $B\widehat{A}C$, che è comune ai due semipiani considerati.

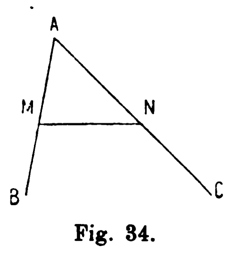



**Fig. 34.**

Analoga dimostrazione può farsi per il caso di una striscia.

La dimostrazione si estende facilmente anche al caso in cui i punti M, N sono interni all'angolo o alla striscia.

2°. *Un angolo convesso (o una striscia), che ha i lati sopra le facce di un diedro (o strato) od interni ad esso, è interno a quel diedro (o strato).*

Si imiti la dimostrazione del teorema precedente.

**52. Teorema.** — *I segmenti paralleli, che terminano a due rette parallele, sono eguali.*

Se i due segmenti A'A, B'B (fig. 35) sono paralleli e terminano alle rette parallele $n$, $n'$, devono anche essere eguali. Infatti, se si fa scorrere il piano della figura su sè stesso lungo la retta $n$, anche la $n'$ scorre su sè stessa (§ 38 Cor. 4°), e, quando il punto A sia venuto in B, la retta AA' prenderà la posizione della sua parallela BB'; perciò AA' $\equiv$ BB'.

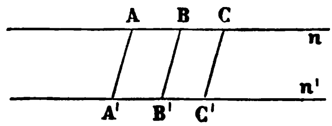


Fig. 35.

**Corollari.** — *1°. Segmenti paralleli, che terminano ad una retta e ad un piano (o a due piani) paralleli, sono eguali.*

Infatti (fig. 36), se sono AA', BB', CC',... segmenti paralleli, che terminano alla retta $a$ e al piano $\alpha$, pure paralleli, è chiaro che le rette AA', BB', CC'... individuano uno stesso piano, il quale contiene la retta $a$ e taglia il piano $\alpha$ secondo una retta $b$ parallela ad $a$, Allora i tre segmenti dati sono eguali pel teorema precedente.

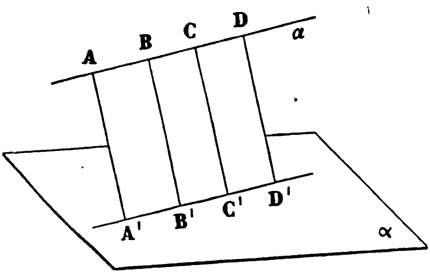


Fig. 36.

Se i segmenti paralleli terminano a due piani paralleli, considerando due a due questi segmenti, si vede che essi individuano piani, che tagliano i due piani dati secondo rette parallele. Pertanto siamo ancora condotti alla considerazione di segmenti paralleli, che terminano a rette parallele.

2°. *Strisce parallele, che terminano a piani paralleli, sono eguali.*

Infatti, se si fa scorrere su sè stesso uno dei piani dati, lungo una sua retta, non parallela ai lati delle due strisce, anche l'altro piano scorrerà su sè stesso (§ 44, Cor. 3°), e, quando un lato della prima striscia sia venuto a coincidere con un lato della seconda, il piano della prima striscia prenderà la posizione del piano della seconda striscia ad esso parallelo, e quindi anche gli altri due lati delle striscie coincideranno; perciò le due striscie sono eguali.

**53. Teorema 1°.** — *Se più rette parallele, situate in un piano, tagliano due trasversali, esse determinano una corrispondenza univoca fra i punti e i segmenti delle due trasversali, tale che:*

*1°. a due o più segmenti eguali della prima trasversale corrispondono altrettanti segmenti eguali fra loro della seconda trasversale;*

*2°. alla somma di due o più segmenti della prima trasversale corrisponde la somma dei corrispondenti segmenti della seconda trasversale.*

**Teorema** *2°. — Se due rette, comunque situate nello spazio, sono tagliate da un sistema di piani paralleli:*

*1° a segmenti eguali della prima trasversale corrispondono segmenti eguali della seconda;*

*2° alla somma di due o più segmenti della prima trasversale corrisponde la somma dei corrispondenti segmenti della seconda.*

Questi due teoremi sono conseguenze immediate di quelli dei §§ 38 e 47.

**54. Teorema.** — *È sempre possibile dividere un segmento in* n *parti eguali, e ciò in una sola maniera.*

Sia infatti AB (fig. 37) il segmento da dividersi per es. in cinque parti eguali. Per un suo estremo A si conduca una semiretta qualunque, e si portino su questa, a partire da A, cinque segmenti adiacenti eguali. Unito l'estremo M con B, dagli altri punti C, D, E, F si conducano le parallele ad MB, le quali divideranno il segmento AB in cinque parti eguali nei punti C′, D′, E′, F′ (§ 53 Teor. 1°).

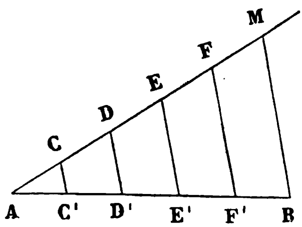



Fig. 37.

Non è poi possibile dividere il dato segmento nello stesso numero di parti eguali in un'altra maniera, perchè (§ 20 Teor. 8) gli equisummultipli di uno stesso segmento, o di segmenti eguali, sono eguali fra loro.

**Corollari.** — *1°. È sempre possibile dividere una striscia in* n *strisce eguali, e ciò in una sola maniera.*

Infatti condotta una retta *a*, che incontri i due lati della striscia, si divida il segmento di *a* compreso in essa in *n* parti eguali, e per i punti di divisione si conducano delle parallele ai lati. È chiaro che la striscia resta così divisa in *n* parti, che sono eguali fra loro (§ 38 Teor.).

La suddivisione poi è unica per il teorema precedente e per il teorema 1° del § 53.

*2°. È sempre possibile dividere uno strato in* n *strati eguali, e ciò in una sola maniera.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

**Definizione.** — La retta, che divide una striscia per metà, dicesi *bisettrice della striscia.* Il piano, che divide uno strato per metà, dicesi *bisettore dello strato.*

**55. Teorema.** — *È sempre possibile dividere un angolo qualunque per metà, e ciò in una sola maniera.*

Sui lati dell'angolo $B\widehat{O}C$ (fig. 38) si prenda $OB \equiv OC$, e si congiunga B con C. La retta MN, che passa per il vertice O e per il punto medio di BC, divide per metà tanto l'angolo convesso $B\widehat{O}C$, quanto l'angolo concavo $B\widehat{O}C$. Infatti, se portiamo l'angolo $B\widehat{O}C$ a coincidere con sè stesso, scambiandone i lati, il punto C viene in B e viceversa, ed il punto M resta fisso. Pertanto l'angolo $C\widehat{O}M$ viene a coincidere con $B\widehat{O}M$, e viceversa; e l'angolo $B\widehat{O}N$ con $C\widehat{O}N$, e viceversa, ossia l'angolo convesso $B\widehat{O}C$ è diviso per metà dalla semiretta OM, e l'angolo concavo $B\widehat{O}C$ è diviso per metà dalla semiretta ON. Inoltre anche l'angolo $O\widehat{M}C$ viene a coincidere con $O\widehat{M}B$, e viceversa; epperò resta diviso per metà anche l'angolo piatto $B\widehat{M}C$.

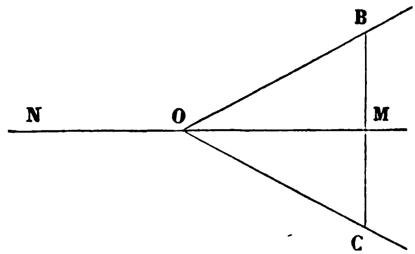


Fig. 38.

La divisione suindicata non è possibile che in una sola maniera, perchè le metà di uno stesso angolo, o di angoli eguali, sono eguali fra loro.

**Definizione.** — La semiretta, che divide un angolo per metà, dicesi *bisettrice* di quell'angolo.

**Corollari.** — *1°. Un angolo qualunque si può dividere in un'unica maniera in 4, 8, 16, 32,... parti eguali.*

*2°. Il prolungamento della bisettrice di un angolo è la bisettrice dell'angolo opposto al vertice del primo.*

Infatti, facendo rotare la figura di un mezzo giro attorno alla bisettrice, è chiaro che i due lati dell'angolo dato si scambiano fra loro, e quindi si scambiano fra loro anche i prolungamenti di questi lati. Ne segue che le due parti, in cui resta diviso dalla retta medesima l'angolo opposto al vertice di quello che si considera, vengono a coincidere, vale dire sono eguali.

**56. Teorema.** — *Si può sempre dividere un diedro in due parti eguali, e ciò in una sola maniera.*

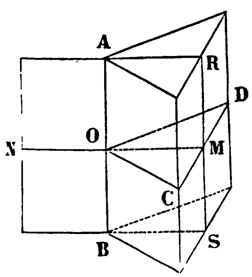


Fig. 39.

Sulla costola AB del diedro (fig. 39) si prenda un punto O, e si traccino per esso due semirette OC, OD, che giacciano rispettivamente nelle due facce del diedro e formino con la costola angoli eguali alla metà di un angolo piatto. Ciò fatto, si prenda $OC \equiv OD$, e si congiunga C con D. Essendo M il punto medio di CD, il semipiano ABM divide per metà il diedro convesso $\widehat{AB}$, e il suo prolungamento divide per metà il diedro concavo $\widehat{AB}$. Infatti, portando il diedro $\widehat{AB}$ a coincidere con sè stesso, scambiandone le facce, in modo che il punto O rimanga fisso, è chiaro che il segmento OC viene a prendere la posizione di OD e viceversa, e

quindi il punto medio M del segmento CD resta fisso. Ne segue che i diedri $CA\widehat{B}M$, $CA\widehat{B}N$ vengono a coincidere rispettivamente coi diedri $DA\widehat{B}M$, $DA\widehat{B}N$; ossia il semipiano ABM divide per metà il diedro concavo $\widehat{AB}$, ed il suo prolungamento ABN divide per metà il diedro convesso $\widehat{AB}$. Inoltre anche il diedro piatto $CR\widehat{S}D$ resta diviso dal piano ABM in due parti, le quali si sovrappongono a vicenda; dunque il piano ABM divide pure il diedro piatto per metà.

La divisione suindicata non è poi possibile che in una sola maniera, perchè le metà di uno stesso diedro, o di diedri eguali, sono eguali fra loro.

**Definizione.** — Il semipiano, che divide un diedro per metà, dicesi *bisettore* di quel diedro.

**Corollari.** — *1°. Un diedro qualunque si può dividere in un'unica maniera in 4, 8, 16, 32,.... parti eguali.*

*2°. Il prolungamento del semipiano bisettore di un diedro è bisettore del diedro opposto alla costola del primo.*

Si imiti la dimostrazione del Corollario 2° del § precedente.

# CAPITOLO V

## Rette e piani perpendicolari.

**57.** Nel capitolo precedente abbiamo veduto che si può sempre costruire un angolo (o diedro) eguale alla metà di un angolo (o diedro) piatto.

**Definizione 1ª.** — Un angolo (o diedro) dicesi *retto, acuto,* od *ottuso,* secondo che è eguale, minore, o maggiore della metà di un angolo (o diedro) piatto.

**Corollario 1°.** — *Tutti gli angoli (o diedri) retti sono eguali.*

**Definizione 2ª.** — Due angoli (o diedri), la cui somma è un retto, diconsi *complementari.*

**Corollario 2°.** — *Due angoli (o diedri), complementari di angoli (o diedri) eguali, sono eguali.*

**Definizione 3ª.** — Due rette (o due piani) si dicono *perpendicolari*, quando formano quattro angoli (o diedri) retti, e si dicono *oblique,* se non sono parallele, nè perpendicolari. Le parti di rette (o di piani) perpendicolari si dicono pure *perpendicolari.*

**Corollari.** — 3°. *Una retta, perpendicolare ad un'altra, è pure perpendicolare a tutte le rette parallele a questa.* Analogamente: *Un piano, perpendicolare ad un altro, è pure perpendicolare a tutti i piani paralleli a questo.*

4°. *Due rette (o piani), rispettivamente parallele a due rette (o piani) perpendicolari, sono pure perpendicolari fra loro.*

Infatti (§§ 49 e 50) gli angoli (o diedri) formati dalle prime due rette (o piani) sono ordinatamente eguali agli angoli (o diedri) formati dall'altre due rette (o piani).

5°. *Se due rette in un piano sono perpendicolari ad una terza, esse sono parallele.* Analogamente: *Due piani sono paralleli, se sono perpendicolari ad un terzo e lo tagliano secondo rette parallele.*

Infatti gli angoli (o diedri) corrispondenti sono eguali.

6°. *Le bisettrici (o i bisettori) degli angoli (o diedri) formati da due rette (o da due piani), che si tagliano, sono perpendicolari.*

Infatti, ogni angolo (o diedro) formato dalle due bisettrici (o dai bisettori) di due angoli (o diedri) conseguenti, è retto.

**58. Teorema** 1°. — *In un piano, per un suo punto, si può condurre una, ed una sola, retta perpendicolare a una retta del piano stesso.*

1°. Se il punto dato è sulla retta, si conduca per esso la bisettrice degli angoli piatti formati dalle due semirette, in cui la retta data è divisa da quel punto; essa sarà perpendicolare alla retta data (§ 57 Def. 3ª), e sarà unica per il Teor. del § 55.

2°. Se il punto dato è fuori della retta, si conduca per esso la parallela alla retta data. È chiaro che la perpendicolare a questa seconda retta, condotta per il punto dato, è pure perpendicolare alla retta data, ed è unica (§ 57 Cor. 3° e 5°).

**Corollario.** — *Per un punto si possono condurre infinite perpendicolari ad una retta data.*

Infatti per una retta $a$ si possono condurre infiniti piani, ed in ciascuno di essi, per un punto dato su $a$, una perpendicolare alla retta stessa.

Se poi consideriamo un punto P fuori di $a$, e per esso conduciamo la retta $a'$ parallela ad $a$, tutte le perpendicolari ad $a'$, condotte per P, sono anche perpendicolari ad $a$ (§ 57 Cor. 3°).

**Teorema** 2°. — *Per una retta di un piano si può condurre ad esso uno, ed un solo, piano perpendicolare.*

Infatti, se per la retta data si conduce il piano bisettore dei diedri piatti formati dai due semipiani, in cui il piano dato resta diviso da quella retta, evidentemente esso sarà il piano perpendicolare domandato (§ 57 Def. 3ª), e sarà unico per il teorema del § 56.

**59. Teorema.** — *Il piano, individuato da due perpendicolari ad una retta in un suo punto, è perpendicolare ad entrambi i piani individuati da ciascuna di esse e dalla retta data.*

Sia $a$ una retta data (fig. 40) e $b$, $c$ due rette ad essa perpendicolari, che la incontrano nel punto O. Tracciamo i piani $ab$, $ac$, $bc$ e facciamo rotare la figura di un mezzo giro attorno alla retta $a$. Per il teorema 3° del § 21 abbiamo che ogni semipiano, uscente dalla retta $a$,

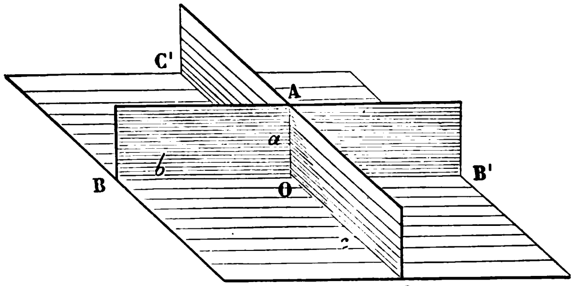



Fig. 40.

dopo la rotazione suddetta, viene a coincidere col suo prolungamento, e così il semipiano AOB viene a coincidere con AOB′, ed AOC con AOC′, e viceversa. Ne segue che, per l'eguaglianza degli angoli retti $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOB'}$; $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOC'}$, la semiretta OB viene a coincidere con la semiretta OB′ e OC con OC′, e viceversa; cosicchè il piano $bc$, nella nuova posizione, coincide con la posizione primitiva. Perciò il diedro $A\widehat{CC'}B$ è uguale al suo conseguente $A\widehat{CC'}B'$, e il diedro $AB\widehat{B'}C$ è uguale al suo conseguente $A\widehat{BB'}C'$, ossia i piani $ab$, $ac$ sono perpendicolari al piano $bc$.

**60. Teorema.** — *Tutte le perpendicolari, condotte per un punto ad una retta, giacciono in un piano.*

Supponiamo da prima (fig. 41) che il punto O′ sia preso sulla retta data $a$, e sieno $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$,... le perpendicolari ad $a$ condotte per il punto O′. I piani $c_1c_2$, $c_1c_3$, $c_1c_4$,... sono perpendicolari al piano $ac_1$, e perciò coincidono, poichè ad un piano non si può condurre per una sua retta altro che un piano perpendicolare (§ 58 Teor. 2°). Dunque le rette $c_1$, $c_2$, $c_3$,... giacciono in un piano.




Fig. 41.

Se poi è dato un punto O fuori della retta $a$, si conduca per esso la parallela $a'$ alla retta data e le perpendicolari ad $a'$. Esse sono le perpendicolari, che dal punto O si possono condurre alla retta $a$, e, per il caso precedente, giacciono in un piano.

**Corollario 1°.** — *Se una retta è perpendicolare a due rette non parallele di un piano, è perpendicolare a tutte le altre rette dello stesso piano.*

Sia $a'$ una retta qualunque (fig. 42) perpendicolare alle due rette $b$, $c$, non parallele, del piano $\alpha$, e sia $d$ una qualsivoglia altra retta del

piano $\alpha$. Se per il punto O d'intersezione delle due rette $b, c$ si conduce una retta $d'$ parallela alla $d$ ed una retta $a$ parallela alla retta $a'$, è chiaro che la $a$ è perpendicolare alle rette $b, c$ e che la $d'$ può riguardarsi come l'intersezione del piano $\alpha$ col piano individuato da essa e dalla retta $a$. Ma in questo piano, per il punto O, si può tirare una ed una sola perpendicolare alla retta $a$, la quale, per il teorema precedente, deve giacere anche nel piano $\alpha$, quindi questa perpendicolare deve coincidere con la $d'$, vale a dire la $d'$, e quindi anche la sua parallela $d$, è perpendicolare alla retta $a$, epperciò anche alla retta $a'$.

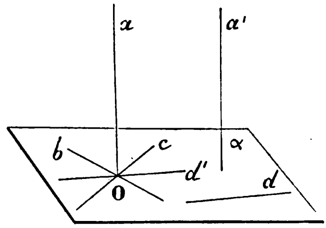


Fig. 42.

**Definizione.** — Una retta ed un piano si dicono *perpendicolari*, quando la retta è perpendicolare a tutte le rette del piano: si dicono *obliqui*, se non sono nè paralleli, nè perpendicolari.

**Corollario 2°** — *Se una retta è perpendicolare a un piano, e si fa rotare la figura attorno alla retta, il piano scorre su sè stesso, rotando attorno al punto d'incontro colla retta.*

**61. Teorema.** — *Per un punto si può sempre condurre uno ed un solo piano perpendicolare ad una retta data.*

Tale piano è quello individuato da due rette perpendicolari alla retta data, condotte per quel punto, ed è unico per il teorema del § 60.

**Corollario.** — *Due piani perpendicolari a una retta sono paralleli.*

Infatti, se due piani perpendicolari ad una medesima retta s'incontrassero, per uno dei loro punti comuni si potrebbero condurre due piani perpendicolari a una stessa retta; e sappiamo che cio è impossibile.

**62. Teorema.** — *Le parallele ad una retta, perpendicolare ad un piano, sono perpendicolari a quel piano.* Inversamente: *Le perpendicolari ad uno stesso piano sono parallele fra loro.*

1°. Se un piano $\alpha$ (fig. 43) è perpendicolare ad una retta $b$, tutte le rette di $\alpha$ sono perpendicolari a $b$ e quindi anche a una retta $c$ parallela a $b$; perciò la retta $c$ è perpendicolare al piano $\alpha$.

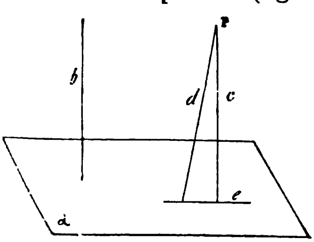


Fig. 43.

2°. Sieno $b$ e $c$ due rette perpendicolari al piano $\alpha$; dico che esse sono parallele. Infatti, se ciò non fosse, si potrebbe condurre per un punto P di $c$ una retta $d$ parallela a $b$, la quale sarebbe, per ciò che si è dimostrato sopra, perpendicolare ad $\alpha$. Allora il piano delle $c, d$ taglierebbe il piano $\alpha$ secondo una retta $e$ perpendicolare ad entrambe le rette $c$ e $d$, ciò che non è possibile (§ 58 Teor. 1°).

**63. Teorema.** — *Per un punto si può sempre condurre una, ed una sola, retta perpendicolare ad un piano.*

Bisogna distinguere il caso in cui il punto O dato è sul piano dato $\alpha$, da quello in cui è fuori di esso. Nel primo caso (fig. 44) si traccino per il punto O nel piano $\alpha$ due rette $b, c$, indi si osservi che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè una retta sia perpendicolare ad $\alpha$ nel punto O, è che essa sia perpendicolare alle rette $b, c$ nel punto O. Ma tutte le perpendicolari a $b$, che passano per O, giacciono nel piano $\beta$ condotto per O perpendicolare a $b$, e tutte le perpendicolari a $c$ nel punto O giacciono nel piano $\gamma$ perpendicolare nel punto O alla retta $c$. I due piani $\beta, \gamma$, avendo il punto O in comune, si taglieranno secondo una retta $a$ che è la perpendicolare cercata. Da questa costruzione si vede anche che essa è unica.

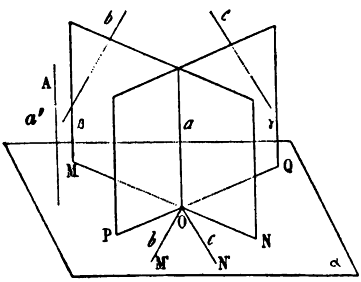


Fig. 44.

Supponiamo ora che il punto dato A sia fuori del piano $\alpha$. Per un punto O di $\alpha$ si conduca la retta $a$ perpendicolare ad $\alpha$, e per A la $a'$ parallela ad $a$. Essa è la perpendicolare cercata (§ 62 Teor.) ed è unica.

**64. Teorema.** — *Ogni piano, condotto per una retta perpendicolare ad un piano, è perpendicolare al piano.*

Sia $a$ una retta (fig. 45) perpendicolare al piano dato $\alpha$; facendo rotare la figura di un mezzo giro attorno alla retta $a$, è chiaro che il piano $\alpha$ scorre su sè stesso, e che ogni altro piano $\beta$, condotto per $a$, ritorna, dopo il movimento, a coincidere con sè stesso, in modo che le due parti, in cui esso resta diviso dalla retta $a$, si scambiano fra loro. Dunque i diedri conseguenti, formati dai due piani $\alpha$ e $\beta$ e situati da una medesima parte rispetto al piano $\alpha$, vengono a coincidere; perciò sono eguali, e i due piani $\alpha$ e $\beta$ sono perpendicolari.

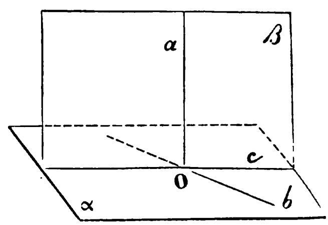


Fig. 45.

**65. Teorema.** — *Se due piani sono perpendicolari;*

*una retta, perpendicolare alla loro comune intersezione, e situata sopra uno di essi, è perpendicolare all'altro piano.*

Inversamente: *una retta, perpendicolare ad uno di essi e condotta per un punto dell'altro piano, è situata in quest'altro piano.*

1°. Sia $a$ una retta del piano $\beta$ (fig. 45) perpendicolare nel punto O alla comune intersezione $c$ dei due piani perpendicolari $\alpha$ e $\beta$. Se per O conduciamo un'altra retta $b$ perpendicolare ad $a$, il piano $b\,c$ risulta perpendicolare alla retta $a$ (§ 60 Cor. 1°) ed al piano $\beta$ (§ 59). Ma l'unico piano perpendicolare a $\beta$, e che passa per $c$, è il piano $\alpha$, dunque il piano $b\,c$ deve coincidere con $\alpha$, vale a dire la retta $a$ è perpendicolare al piano $\alpha$.

2°. La perpendicolare, condotta da un punto del piano $\beta$ sulla comune intersezione $c$ dei due piani perpendicolari $\alpha$ e $\beta$, è situata evi-

dentemente nel piano β, ed è perpendicolare al piano α per ciò che si è precedentemente dimostrato. D'altra parte non si può condurre per un punto che una sola perpendicolare ad un piano; dunque il teorema resta dimostrato.

**Corollario.** — *Se due piani perpendicolari ad un terzo si tagliano, la retta d'intersezione è perpendicolare a questo terzo piano.*

Sieno i due piani β e γ (fig. 46) perpendicolari ad uno stesso piano α, e si taglino secondo una retta AB. La perpendicolare al piano α, condotta per un punto di AB, deve giacere tanto nel piano β, quanto nel piano γ, e perciò deve coincidere con la retta AB stessa.

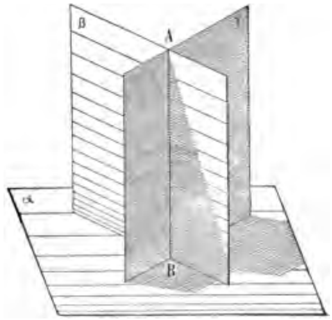


Fig. 46.

**66. Teorema.** — *Per una retta non perpendicolare ad un piano, si può sempre condurre uno ed un solo piano perpendicolare al piano dato.*

Tutte le perpendicolari (fig. 47), condotte per i vari punti della retta data *a* al piano α, sono parallele fra loro, e perciò giacciono in un piano individuato da una qualunque di esse e dalla retta *a*. Questo piano (§ 64) è perpendicolare al piano α, e non possono esistere altri piani perpendicolari ad α e che passino per *a*; perchè, se ciò accadesse, la retta *a*, intersezione di questi piani, dovrebbe essere (§ 65 Cor.) perpendicolare al piano α, il che è contrario all'ipotesi.

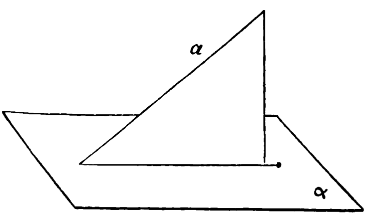


Fig. 47.

**67. Teorema.** — *Esiste una, ed una sola, retta perpendicolare a due rette sghembe, e che le incontra.*

Sieno *a* e *b* (fig. 48) due rette sghembe. Per la retta *a* si faccia passare un piano α parallelo a *b*, e per la retta *b* un piano β parallelo ad α; indi per le due rette *a*, *b* rispettivamente si conducano i piani γ, δ perpendicolari ai due piani α e β. Questi due piani devono incontrarsi, poichè, se fossero paralleli, la retta *a*, intersezione dei piani α, γ, dovrebbe essere parallela alla retta *b*, intersezione dei piani rispettivamente paralleli β, δ (§ 46 Cor.); e ciò è impossibile, avendo supposto che *a*, *b* non sieno situate in un piano. La retta *c*, intersezione dei piani γ, δ perpendicolari ai piani α, β è pure perpendicolare ai piani α, β stessi (§ 65 Cor.), e quindi anche a tutte le rette di questi piani. Siccome inoltre *c* incontra le rette *a*, *b*, essa è la retta cercata.

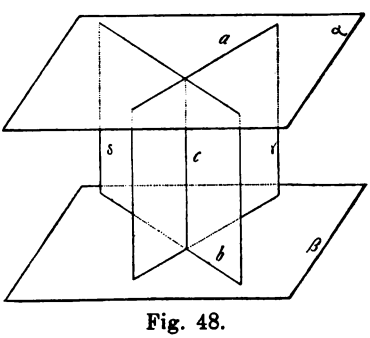


Fig. 48.

Viceversa, siccome ogni retta, perpendicolare alle due rette sghembe date, dev'essere pure perpendicolare alle parallele ad esse, e quindi anche ai due piani $\alpha$ e $\beta$, così ogni perpendicolare alle due rette sghembe, e che le incontra, dev'essere situata nei due piani $\gamma$ e $\delta$ (§ 65 Teor.), e perciò coincidere colla loro comune intersezione $c$. Resta dunque dimostrato che, oltre la retta $c$, non esistono altre perpendicolari comuni alle due rette sghembe, e che le incontrano.

**68. Teorema.** — *Se due piani paralleli incontrano la costola di un diedro, tagliano il diedro secondo angoli uguali.*

Infatti i due angoli hanno i lati diretti nello stesso senso, e perciò sono eguali.

**Corollario.** — *Due piani, perpendicolari alla costola di un diedro, lo tagliano secondo angoli uguali.*

**Definizioni.** — 1ª. Si chiama *sezione normale*, o *rettilineo di un diedro* l'angolo che si ottiene, tagliando il diedro con un piano perpendicolare alla costola.

2ª. Si chiamano *angoli di due piani* le sezioni normali dei diedri formati da essi.

**69.** Dalla data definizione si ricava facilmente che ad un diedro corrisponde un solo rettilineo, e che viceversa, dato un angolo piano $\widehat{AOB}$, si trova un diedro, ed uno solo, del quale esso è il rettilineo. Per costruirlo basta per il vertice O condurre una retta OO′ perpendicolare al piano dell'angolo, e tracciare i piani individuati da questa retta coi lati dell'angolo.

Dunque i diedri ed i loro rettilinei si corrispondono univocamente.

Sovrapponendo due diedri, in modo che la costola e una faccia dell'uno coincidano con la costola e una faccia dell'altro, indi conducendo un piano perpendicolare alla costola comune, è facile dimostrare, come si è fatto per gli archi e gli angoli al centro, per i fusi e i corrispondenti diedri al centro, il seguente

**Teorema.** — *1°. Se un diedro è maggiore, eguale, o minore di un altro, anche il rettilineo del primo è rispettivamente maggiore, uguale o minore del rettilineo del secondo, e viceversa;*

*2°. Il rettilineo di una somma o differenza di diedri è uguale alla somma o differenza dei rettilinei dei diedri dati.*

**Corollari.** — *1°. Se un diedro è doppio, triplo.... di un altro, anche il rettilineo del primo è doppio, triplo.... del rettilineo del secondo.*

*2°. Il rettilineo di un diedro piatto è un angolo piatto; il rettilineo di un diedro retto è un angolo retto. Il rettilineo di un diedro è concavo, o convesso, acuto, od ottuso, secondo che il diedro è concavo, o convesso, acuto od ottuso.*

*3°. Se due diedri sono supplementari o complementari, anche i loro rettilinei sono supplementari o complementari.*

*Ecc.*

**70. Teorema.** — *Se due rette di un piano sono rispettivamente perpendicolari a due rette dello stesso piano che s'incontrano, esse pure s'incontrano, e formano quattro angoli ordinatamente uguali o supplementari a quelli delle altre due rette.*

Sieno $a', b'$ (fig. 50) due rette date in un piano, rispettivamente perpendicolari alle rette $a, b$ situate nello stesso piano, che s'incontrano nel punto O. Per il punto O si conducano due rette $a'', b''$ parallele alle $a'\ b'$, e perciò perpendicolari alle $a, b$ rispettivamente. Le due rette $a'', b''$ non possono coincidere, perchè le $a, b$ non possono essere perpendicolari alla stessa retta, dunque anche le $a', b'$ devono incontrarsi; perchè, se fossero parallele, le due rette $a'', b''$, condotte per O, sarebbero parallele ad entrambe, ciò che è assurdo.

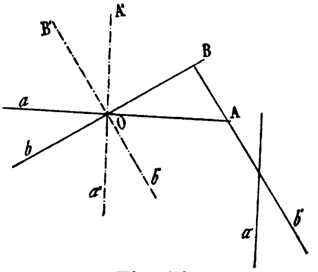


Fig. 50.

Ora gli angoli delle rette $a', b'$ sono ordinatamente eguali, o supplementari, a quelli delle loro parallele $a'', b''$; d'altra parte, se dai due angoli $B\widehat{O}B'$, $A\widehat{O}A'$ eguali, perchè retti, si toglie lo stesso angolo $A'\widehat{O}B$, si ottengono differenze $B'\widehat{O}A'$, $B\widehat{O}A$ eguali; dunque gli angoli delle $a'', b''$ sono ordinatamente eguali, o supplementari, a quelli delle $a, b$, e quindi gli angoli delle rette $a, b$ sono pure rispettivamente eguali, o supplementari, a quelli delle rette $a'\ b'$.

**71. Teorema.** — *Gli angoli, formati da due rette perpendicolari a due piani che s'incontrano, sono rispettivamente eguali o supplementari agli angoli di quei piani.*

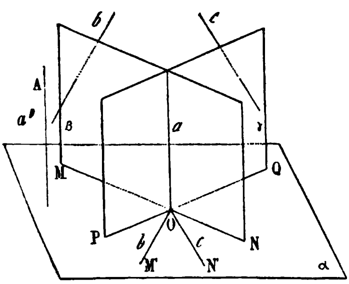


Fig. 51.

Sieno le rette $b, c$ rispettivamente perpendicolari ai due piani $\beta, \gamma$, che s'incontrano (fig. 51). Per un punto qualunque O, comune ai due piani, si conduca un piano $\alpha$ perpendicolare alla loro comune intersezione. Le rette MN, PQ, intersezioni dei piani $\beta, \gamma$ con $\alpha$, formano quattro angoli che sono i rettilinei dei diedri formati dai piani $\beta, \gamma$. Se ora per il punto O si conducono le rette OM', ON' perpendicolari ai piani $\beta, \gamma$, esse risultano parallele alle $b, c$, e giacciono (§ 65 Teor.) nel piano $\alpha$. Ma le rette OM', ON', essendo perpendicolari alle MN, PQ formano (Teor. prec.) angoli ordinatamente eguali, o supplementari a quelli di queste rette, e perciò anche gli angoli delle $b, c$ sono rispettivamente eguali, o supplementari, a quelli delle MN, PQ.

**Corollari.** — 1°. *Se per un punto della costola di un diedro si tirano due semirette rispettivamente perpendicolari alle facce, in modo che ciascuna si trovi, rispetto alla faccia alla quale è perpendicolare, dalla stessa parte della faccia rimanente, l'angolo delle due semirette è supplementare del rettilineo del diedro.*

2°. *Se per un punto della costola di un diedro si tirano due semirette rispettivamente perpendicolari alle facce e dalla stessa parte di una di esse, le due semirette si trovano dalla stessa parte anche rispetto all'altra faccia.*

Infatti, se OM', ON', si suppongono dalla stessa parte del piano $\beta$, l'angolo $M'\widehat{O}N'$ sarà acuto, perchè differenza fra un angolo retto e l'an-

golo $N\widehat{O}N'$. Ora l'angolo $P\widehat{O}N'$ è pure retto per ipotesi e quindi è maggiore di $M'\widehat{O}N'$, vale a dire OM' si trova dalla stessa parte di ON' rispetto alla retta OP, e quindi anche rispetto al piano $\gamma$.

**72. Definizioni.** — 1ª. Gli estremi di un segmento si dicono *simmetrici* rispetto al punto medio del segmento stesso. Questo punto dicesi *centro di simmetria.*

2ª. Due punti si dicono *simmetrici rispetto ad una retta,* o *ad un piano,* quando questa retta, o questo piano, divide per metà il segmento che termina a quei due punti, ed è perpendicolare ad esso. La retta ed il piano si dicono rispettivamente *asse,* o *piano,* di *simmetria.*

3ª. Due figure si dicono *simmetriche rispetto ad un centro,* o *ad un asse,* o *ad un piano,* quando tutti i punti di ciascuna sono simmetrici dei punti dell'altra rispetto a questo centro, o a quest'asse, o a questo piano.

4ª. Una figura si dice *simmetrica di sè stessa rispetto ad un punto,* o *ad una retta,* o *ad un piano,* quando coincide colla sua simmetrica rispetto a quel punto, o a quella retta, o a quel piano, i quali si dicono rispettivamente *centro,* o *asse,* o *piano principale* della figura.

Per es.: Una retta è simmetrica di sè stessa rispetto ad ogni suo punto, ed anche rispetto ad ogni retta, o piano, ad essa perpendicolare.

Un piano è simmetrico di sè stesso rispetto ad un suo punto e ad ogni sua retta, ed anche rispetto ad ogni piano ad esso perpendicolare.

Un circolo è simmetrico di sè stesso rispetto al centro e ad ogni retta, che passa pel centro.

Una superficie sferica è simmetrica di sè stessa rispetto al centro e ad ogni retta, o piano, che passa per il centro.

**Corollario.** — *Una figura e la sua simmetrica rispetto ad un punto, o ad una retta, o ad un piano, formano insieme una nuova figura, che ha per centro, o per asse, o per piano di simmetria, quel punto, o quella retta, o quel piano.*

# ESERCIZI

## TEOREMI.

**1.** Se due semirette, rispettivamente interne a due angoli conseguenti, sono perpendicolari fra loro, e una di esse è bisettrice di un angolo, anche l'altra è bisettrice dell'altro angolo.

**2.** Se due semipiani, rispettivamente interni a due diedri conseguenti, sono perpendicolari fra loro, e uno di essi è bisettore di un diedro, anche l'altro è bisettore dell'altro diedro.

**3.** Se le bisettrici di due angoli consecutivi sono perpendicolari fra loro, gli angoli sono conseguenti.

**4.** Se i piani bisettori di due diedri consecutivi sono perpendicolari fra loro, i diedri sono conseguenti.

**5.** Se di quattro semirette, uscenti da uno stesso punto, la prima e la terza sono in direzione opposta, e formano rispettivamente colla seconda e la quarta angoli eguali, anche la seconda e la quarta sono in direzione opposta.

**6.** Se di quattro semipiani, uscenti da una stessa retta, il primo e il terzo sono l'uno il prolungamento dell'altro e formano rispettivamente col secondo e col quarto diedri eguali, anche i rimanenti semipiani sono l'uno il prolungamento dell'altro.

**7.** Se quattro semirette, uscenti da uno stesso punto sono tali, che dei quattro angoli consecutivi da esse formati il primo sia eguale al terzo ed il secondo al quarto, la prima di esse è in direzione opposta della terza, la seconda della quarta.

**8.** Se quattro semipiani, uscenti da una stessa retta, sono tali, che dei quattro diedri consecutivi da essi formati il primo sia eguale al terzo ed il secondo al quarto, il primo di essi è il prolungamento del terzo, il secondo del quarto.

**9.** Se ciascuna di due rette taglia i lati di un angolo in punti equidistanti dal vertice, le due rette sono parallele.

**10.** Se due segmenti sono eguali e paralleli, i loro estremi sono situati su rette parallele.

**11.** Se due segmenti eguali, compresi fra due rette parallele, hanno un punto comune, le parti dell'uno sono eguali alle parti dell'altro.

**12.** Se sopra i lati di un angolo, a partire dal vertice, si prendono due segmenti eguali AB, AC, e consecutivamente ad essi altri due segmenti eguali BD, CE, la retta che passa per il vertice dell'angolo e per il punto d'intersezione dei due segmenti BE, CD divide l'angolo dato per metà.

**13.** Se per un punto qualunque D della bisettrice di un angolo $\widehat{B}$ si conducono le parallele ai lati, e s'indicano con A e C i punti d'intersezione, i quattro segmenti AB, BC, CD, DA sono eguali.

**14.** Se due rette di un piano sono ordinatamente parallele ad altre due, che s'incontrano, le bisettrici degli angoli formati dalle prime due rette, sono rispettivamente parallele alle bisettrici degli angoli formati dalle altre due.

**15.** Se due piani sono ordinatamente paralleli ad altri due, che s'incontrano, i piani bisettori dei diedri formati dai primi due sono rispettivamente paralleli ai piani bisettori dei diedri formati dagli altri due.

**16.** Se una retta $a$ ed un piano $\alpha$ sono perpendicolari ad una medesima retta $b$, la retta $a$, o giace nel piano $\alpha$, o è parallela ad esso.

**17.** Se una retta $a$ è perpendicolare ad un piano $\alpha$, che taglia un altro piano $\beta$ secondo una retta $b$, il piano condotto per $a$ perpendicolare a $\beta$ lo taglia secondo una retta perpendicolare a $b$.

**18.** Se due rette di un piano sono perpendicolari, e si congiungono due punti qualunque M, N dell'una con due punti A, B dell'altra, equidistanti dalla loro intersezione, le rette MA, MB incontrano rispettivamente le NB, NA in due punti H e K tali, che la retta HK risulta parallela alla AB.

**19.** Se due angoli (o diedri) sono eguali, o supplementari, ed un lato (o faccia) del primo è perpendicolare ad un lato (o faccia) dell'altro, anche il rimanente lato (o faccia) del primo è perpendicolare al rimanente lato (o faccia) dell'altro.

**20.** Se due rette, che s'incontrano, sono ordinatamente perpendicolari ad altre due rette, che pure s'incontrano, le bisettrici degli angoli formati dalle prime due rette sono rispettivamente perpendicolari alle bisettrici degli angoli formati dalle altre due.

**21.** Se due rette, che s'incontrano, sono ordinatamente perpendicolari a due piani, le bisettrici dei loro angoli sono rispettivamente perpendicolari ai piani bisettori dei diedri formati dai due piani.

**22.** Per un punto passa, in generale, una, ed una sola, retta, che incontra due rette sghembe date.

**23.** Per un punto passa, uno, ed un solo, piano parallelo a due rette sghembe date.

**24.** Date due rette sghembe, se, a partire dai loro punti d'incontro colla perpendicolare comune, si prendono su esse due segmenti eguali, la congiungente gli estremi di questi segmenti forma angoli eguali colle due rette.

**25.** Date due rette sghembe, esiste una, ed una sola, retta, che le incontra ambedue ed è parallela a una terza retta sghemba con esse.

**26.** Esistono infinite rette, che incontrano tre rette date sghembe due a due.

**27.** Esistono infinite rette, che incontrano due rette sghembe date, e sono parallele a un piano non parallelo a queste.

**28.** Se da un punto qualunque di un lato di un angolo acuto e dalla parte del lato rimanente si tirano due semirette rispettivamente perpendicolari ai lati, la bisettrice dell'angolo da esse formato taglia i lati dell'angolo dato in punti egualmente distanti del vertice.

**29.** Due figure di un piano simmetriche rispetto ad un punto sono eguali.

**30.** Due figure di un piano simmetriche di una terza, rispetto a due rette perpendicolari e situate nel medesimo piano, sono simmetriche rispetto al punto comune ai due assi di simmetria.

**31.** Due figure qualunque simmetriche di una terza rispetto a due piani perpendicolari, sono simmetriche rispetto alla retta comune ai due piani di simmetria.

**32.** Due figure, simmetriche di una terza rispetto a due centri diversi, sono eguali.

**33.** Se la figura F è simmetrica di F′ rispetto ad un punto O ed è pure simmetrica di F″ rispetto ad un piano $\alpha$, che passa per O, le figure F′, F″ sono simmetriche fra loro rispetto alla perpendicolare al piano $\alpha$, condotta per il punto O, e quindi esse sono eguali.

## LUOGHI GEOMETRICI.

**34.** Luogo dei punti medi dei segmenti, che terminano a due rette sghembe.

**35.** Luogo dei punti medi dei segmenti, che terminano a un punto e ad una retta data (o ad un piano dato).

**36.** Date due rette parallele $a$, $b$ trovare il luogo dei punti P del loro piano tali che, conducendo per essi una retta qualunque, che incontri le due rette date nei punti A e B, sia

$$PA \equiv n PB.$$

**37.** Dati due piani paralleli $\alpha$ e $\beta$, trovare il luogo dei punti P tali, che conducendo per ciascuno di essi una retta qualunque, che incontri i due piani nei punti A e B, sia PA $\equiv n$PB.

**38.** Per un punto P si tirino tutte le rette che incontrano una retta data (od un piano), e si porti su ciascuna di esse, a partire dal suo punto A d'incontro colla retta (o col piano), dalla stessa parte o dalla parte opposta di P, un segmento AB $\equiv n$PA. Qual'è il luogo dei punti P?

**39.** Luogo dei punti, che hanno una data distanza da un punto dato, e che dividono per metà tutti i segmenti condotti per essi, che terminano a due piani paralleli.

**40.** Dai punti di un circolo o di una sfera, si conducano dei segmenti eguali e diretti nello stesso senso. Qual'è il luogo dei loro estremi?

**41.** Dai punti di una retta, o di un piano, si conducano dei segmenti eguali e diretti nello stesso senso. Qual'è il luogo dei loro estremi?

**42.** Sui lati di un angolo, a partire dal vertice, si prendano delle coppie di segmenti eguali, e per i loro estremi si conducano delle parallele ai lati opposti dell'angolo. Qual'è il luogo dei punti d'incontro di queste parallele?

**43.** Luogo dei punti medi dei segmenti che hanno per estremi due punti presi su due rette sghembe a eguale distanza dal punto d'incontro colla perpendicolare comune.

**44.** Luogo dei punti di un piano equidistanti da due punti dati.

**45.** Luogo delle rette, che tagliano una retta data, e che sono parallele ad un'altra retta data.

**46.** Se due piani sono paralleli, e per i punti di una figura giacente sopra uno di essi si tirano le parallele a una retta data obliqua ai due piani, qual'è il luogo delle intersezioni di queste rette coll'altro piano?

**47.** Si stabilisca una corrispondenza univoca fra i piani, che passano per un punto, e le rette ad essi perpendicolari condotte per quel punto. Tagliando la figura con un piano $\pi$ si ha una corrispondenza univoca fra i punti e le rette di un piano. Se una retta rota attorno ad un punto P di $\pi$, qual'è il luogo dei punti corrispondenti?

## PROBLEMI.

**48.** Per un punto dato condurre una retta parallela a due piani dati, che si tagliano.

**49.** Per un punto dato in un piano condurre nel piano stesso una retta parallela ad un altro piano dato.

**50.** Dati due punti in un piano, situati dalla medesima parte rispetto a una retta del piano, trovare un punto di questa retta tale, che le sue congiungenti coi due punti dati formino angoli eguali colla retta data.

**51.** Per un punto dato condurre un piano perpendicolare a due altri.

**52.** Per un punto dato condurre un piano che tagli due piani dati secondo rette rispettivamente perpendicolari a due rette date.

**53.** Da un punto, situato fuori di un piano, condurre a questo piano un segmento parallelo ad un altro piano dato, ed eguale ad un segmento dato.

**54.** Per due punti dati in un piano far passare due rette parallele, che comprendano una striscia eguale ad una striscia data.

**55.** Per un punto, interno ad un angolo, condurre una retta tale, che il segmento interno all'angolo sia diviso per metà dal punto dato.

**56.** Per un punto, esterno ad un angolo, condurre una retta tale, che il segmento, che termina a quel punto e ad uno dei lati dell'angolo, sia diviso per metà dall'altro lato.

**57.** Per un punto P in un piano condurre una retta, che incontri due rette date nei punti A e B in modo che sia PA $\equiv n$ . PB.

**58.** Dati due piani $\alpha$ e $\beta$, che s'incontrano, condurre per un punto P una retta parallela a un piano dato, e che incontri i piani $\alpha$ e $\beta$ in due punti A e B tali, che sia PA $\equiv n$ . PB.

**59.** Per un punto P condurre una retta, che incontri tre piani $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, non paralleli, in tre punti A, B, C tali, che sia $PB \equiv m . PA$, $PC \equiv n . PA$.

**60.** Tracciare un segmento eguale ad un segmento dato, in modo che abbia i suoi estremi su due rette sghembe date, e sia parallelo a un piano dato.

**61.** Date due rette sghembe, trovare un segmento eguale ad un segmento dato che termini alle due rette date e formi con esse angoli eguali.

**62.** Per un punto condurre un piano, che tagli due coppie di piani non paralleli secondo coppie di rette parallele.

**63.** Condurre un segmento eguale a un segmento dato, che abbia i suoi estremi su due rette date in un piano, e che sia parallelo ad una retta data nello stesso piano.

**64.** Condurre un segmento eguale ad un segmento dato, che abbia i suoi estremi sopra una retta ed un circolo dati in un piano, e sia parallelo ad una retta data nello stesso piano.

**65.** Dati due circoli in un piano, condurre un segmento eguale ad un segmento dato, che abbia i suoi estremi sui due circoli, e sia parallelo ad una retta data.

**66.** Condurre una retta, che incontri una retta data, e sia parallela ad un'altra in modo che il segmento di essa, intercettato fra due piani non paralleli, sia eguale ad un segmento dato.

**67.** Condurre un segmento eguale e parallelo ad un segmento dato, e che abbia i suoi estremi sopra un piano ed una retta dati.

**68.** Condurre un segmento eguale e parallelo ad un segmento dato, e che abbia i suoi estremi sopra una sfera ed una retta data, oppure sopra una sfera ed un circolo dato.

**69.** Trovare un punto situato sopra un piano, o sopra una sfera, che divida per metà i segmenti condotti per esso e terminati a due rette parallele date.

**70.** Dal teorema 21 degli Esercizî ricavare una costruzione per dividere un diedro per metà.

**71.** Per un punto, preso nel piano di due strisce, condurre una retta, in modo che i segmenti interni alle due strisce sieno eguali.

**72.** Per un punto dato condurre un piano, in modo che le strisce interne a due strati dati sieno eguali.

**73.** Nel piano di due strisce condurre una retta in modo, che passi per un punto dato del piano, ed il segmento interno alla prima striscia sia la $n^{esima}$ parte del segmento interno all'altra.

**74.** Dati due strati, condurre un piano, che passi per un punto dato, e in modo che la striscia interna al primo strato sia la $n^{esima}$ parte di quella interna all'altro strato.

# LIBRO SECONDO

## CAPITOLO I

### Poligoni.

**73. Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *poligono* la figura formata da più di due punti, dati in un certo ordine, in modo che tre consecutivi non sieno in una stessa retta, dalle rette individuate dalle coppie di punti consecutivi e dalla retta individuata dal primo e dall'ultimo.

2ª. I punti dati si chiamano *vertici*, le rette individuate da due punti consecutivi, si chiamano *rette* del poligono. Si chiamano *lati* i segmenti limitati da due vertici consecutivi del poligono, *diagonali* i segmenti limitati da due vertici non consecutivi.

Un poligono ha tanti lati quanti sono i suoi vertici.

È facile vedere che il numero delle diagonali di un poligono, avente $n$ vertici, è $\frac{n(n-3)}{2}$. Infatti, si ottiene una diagonale ogni volta che si unisce, per mezzo di una retta, un dato vertice con un altro qualunque, esclusi i due consecutivi. Per ogni vertice passano dunque $n-3$ diagonali; perciò il numero $n(n-3)$ ci dà il doppio del numero delle diagonali, perchè ognuna di esse passa per due vertici; ossia il numero delle diagonali è appunto $\frac{n(n-3)}{2}$.

3ª. La linea formata dai lati del poligono si chiama *contorno*, ed il segmento somma dei lati si chiama *perimetro*.

Per es. (fig. 52) i cinque punti A, B, C, D, E, dati nell'ordine scritto, determinano un poligono, di cui i segmenti AB, BC, CD, DE, EA sono i lati. Un punto può percorrere il contorno andando da A in B, da B in C.... da E in A, oppure andando da B in C, da C in D.... da A in B, ecc.... Perciò il poligono s'indica indifferentemente coi simboli ABCDE, BCDEA, .... EDCBA, .... ecc.

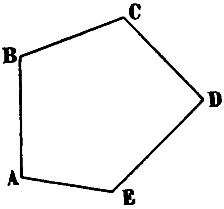


Fig. 52.

4ª. Se un poligono ha tre vertici si chiama *triangolo*, se ne ha quattro si chiama *quadrangolo* o *quadrilatero*, se ne ha cinque *pentagono*, se ne ha sei *esagono*, ecc.
5ª. Se un poligono ha tutti i suoi lati eguali, si dice *equilatero*.

Quando sono dati più di tre punti, senza che sia fissato il loro ordine, essi individuano più di un poligono. Così per es. i quattro punti A, B, C, D individuano tre quadrangoli distinti (fig. 53).

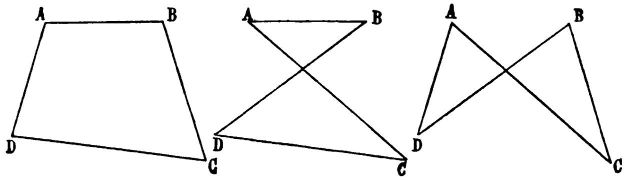



Fig. 53.

6ª. Se i vertici di un poligono sono tutti in un piano, giacciono in questo piano anche tutte le sue rette, ed il poligono si dice *piano;* in caso contrario il poligono si dice *gobbo* o *storto*.

In ciò che segue, se non è avvertito esplicitamente il contrario, intenderemo parlare di poligoni piani.

7ª. Si chiama *linea poligonale* o *spezzata* la linea formata da alcuni lati consecutivi di un poligono.
8ª. Un poligono piano, o una linea poligonale piana, si dicono *convessi*, quando tutti i suoi vertici sono da una medesima parte di una qualunque delle sue rette; *concavi* nel caso contrario, e *intrecciati* quando almeno due lati non consecutivi hanno un punto comune.

**74. Teorema.** — *Il contorno di un poligono convesso è una linea completa.*

Infatti, dal P. IV, 2° deriva che, se una linea incompleta, data sopra una superficie, ha i suoi estremi sopra una linea completa, appartenente alla stessa superficie, essa suddivide in due quella della parti (separate dall'altra linea), nella quale è contenuta.

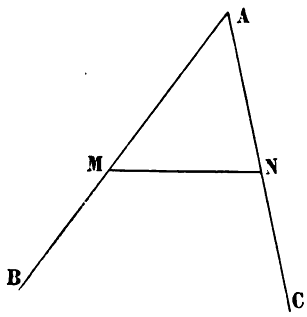



Fig. 54.

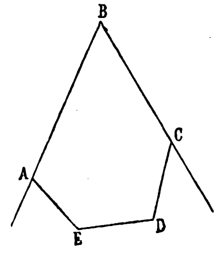



Fig. 55.

Dunque (fig. 54), dati tre punti A, M, N, non in linea retta, le due semirette AM, AN dividono il piano dei tre punti in due parti (angoli) e il segmento MN, che ha i suoi estremi sulle semirette suddette, ed è

perciò (§ 51 Teor. 1°) interno all'angolo convesso $\widehat{MAN}$, divide quest'angolo in due parti. Una di queste parti è limitata dal contorno AMN.

In generale (fig. 55), dati più punti A, B, C, D, E vertici di un poligono convesso, si sa che le due semirette BA, BC dividono il piano in due parti (angoli).

Ora poichè il poligono è convesso, epperciò tutti i vertici D, E, devono trovarsi in quello dei semipiani separati dalla retta AB, che contiene il punto C e in quello dei semipiani separati dalla retta AC che contiene il punto A, è chiaro che la spezzata AEDC deve essere compresa nell'angolo convesso $\widehat{ABC}$. Ne segue che quest'angolo è diviso in due parti dalla spezzata suddetta, delle quali una è limitata dal contorno ABCDE.

**Definizioni.** — 1ª. Ogni angolo convesso, che ha per vertice un vertice del poligono convesso, i cui lati contengono i due lati del poligono, che passano per esso, dicesi *angolo interno* del poligono, o semplicemente *angolo del poligono.*

2ª. Chiamasi *superficie di un poligono convesso* o semplicemente *poligono convesso,* quella delle due parti, in cui il piano è diviso dal suo contorno, che è interna a tutti gli angoli del poligono.

3ª. Un angolo interno dicesi *compreso* fra i due lati consecutivi del poligono, che passano per il suo vertice, oppure si dice *adiacente* ad essi. In un triangolo un angolo interno si dice *opposto* a quel lato, al quale non è adiacente.

4ª. Se un poligono ha tutti gli angoli interni eguali, dicesi *equiangolo,* e se due poligoni hanno gli angoli interni rispettivamente eguali si dicono *equiangoli fra loro;* i vertici degli angoli eguali si dicono *corrispondenti.*

5ª. Ogni angolo conseguente ad un angolo interno di un poligono convesso, dicesi *esterno* ad esso.

**Corollario.** — *Un segmento, che abbia i suoi estremi sul contorno di un poligono convesso, o interni ad esso, è interno al poligono, o è parte del contorno.*

Infatti, la superficie di un poligono convesso è parte di ciascuno dei suoi angoli; quindi dal teorema dimostrato nel § 51 risulta immediatamente che ogni segmento, avente i suoi estremi sul contorno di un poligono convesso, se non fa parte del contorno stesso, è interno a tutti gli angoli del medesimo, e perciò interno al poligono.

**75. Teorema.** — *Un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due angoli interni non conseguenti.*

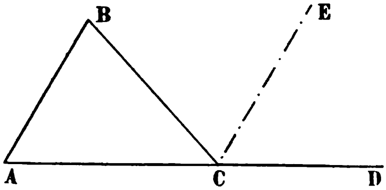


Fig. 56.

Infatti (fig. 56) essendo $\widehat{BCD}$ un angolo esterno del triangolo ABC, se dal vertice C e dalla stessa parte di AB, rispetto alla retta AD, si tira la semiretta CE parallela ad AB, questa, per non incontrare la AB, deve cadere internamente all'angolo $\widehat{BCD}$; ed allora, poichè $\widehat{BCE} \equiv \widehat{ABC}$, come angoli alterni interni formati dalle parallele AB, CE colla trasversale BC, ed inoltre $\widehat{ECD} \equiv \widehat{BAC}$, come angoli corrispondenti rispetto alle stesse parallele ed alla trasversale AD, si ha:

$$\widehat{BCD} \equiv \widehat{BCE} + \widehat{ECD} \equiv \widehat{ABC} + \widehat{BAC}.$$

**Corollario.** — *Un angolo esterno di un triangolo è maggiore di ciascun angolo interno opposto.*

**76. Definizioni.** — 1ª. Se un triangolo ha tre lati disuguali si dice *scaleno*, e, se ha soltanto due lati eguali tra loro, si dice *isoscele*. In un triangolo isoscele dicesi *base* il lato non eguale agli altri due.

2ª. Se da un vertice di un triangolo si conduce la perpendicolare sulla retta del lato opposto, il segmento di questa perpendicolare, compreso fra il vertice stesso e il punto d'incontro, si chiama *altezza* del triangolo, e si suole chiamare *base* del triangolo il lato rispetto al quale s'è condotta l'altezza.

3ª. Se si conduce la bisettrice di un angolo interno di un triangolo, il segmento di essa, compreso tra il vertice e il lato opposto, dicesi *bisettrice del triangolo.*

4ª. In un triangolo il segmento, che unisce un vertice col punto di mezzo del lato opposto, dicesi *mediana*.

**Corollario.** — *Un triangolo ha tre altezze, tre bisettrici e tre mediane.*

**77. Teorema.** — *In un triangolo isoscele:*

*1° gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali;*

*2° l'altezza, la mediana e la bisettrice, concorrenti coi lati eguali, coincidono;*

*3° le altezze, le mediane e le bisettrici, relative ai lati eguali, sono rispettivamente eguali.*

Sia (fig. 57) ABC un triangolo isoscele, nel quale è AC $\equiv$ BC. Condotta l'altezza CH relativa alla base, si ribalti il piano della figura su sè stesso in modo, che l'angolo ACB venga a coincidere con sè stesso (§ 15 Teor.). Per l'eguaglianza dei lati AC, BC, il punto B verrà in A e viceversa, e quindi tutto il triangolo coinciderà con sè stesso, cosicchè l'angolo $\widehat{ABC}$ si sovrapporrà all'angolo $\widehat{BAC}$ e viceversa, il punto di mezzo del lato BC verrà sul punto di mezzo del lato AC, e viceversa, e l'altezza CH resterà fissa (§ 58 Teor. 1°).

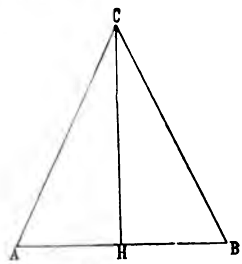


Fig. 57.

Segue da ciò che i due angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ sono eguali, che $\widehat{ACH} \equiv \widehat{BCH}$ e AH $\equiv$ BH, e perciò la CH è altezza, mediana e bisettrice del triangolo. Similmente l'altezza, la mediana e la bisettrice, condotte da A, vengono rispettivamente a coincidere coll'altezza, colla mediana e colla bisettrice condotte da B.

**Corollario.** — *In un triangolo equilatero:*

*1° i tre angoli sono eguali;*

*2° l'altezza, la mediana, la bisettrice uscenti da uno stesso vertice coincidono;*

*3° le altezze, le mediane, le bisettrici sono tutte eguali fra loro.*

**78. Teorema.** — *Se un triangolo ha due lati disuguali, l'angolo opposto al lato maggiore è maggiore di quello opposto al lato minore.*

Nel triangolo ABC (fig. 58) sia il lato AB maggiore del lato AC. Vogliamo dimostrare che l'angolo $\widehat{ACB}$, opposto al lato AB, è maggiore dell'angolo $\widehat{ABC}$ opposto al lato AC.

Dal lato maggiore AB stacchiamo una parte AD eguale al lato minore AC, ed uniamo C con D per mezzo di un segmento. L'intero triangolo viene così scomposto in due, uno dei quali ACD, avendo i due lati AC, AD eguali, ha pure eguali gli angoli $A\widehat{C}D$, $A\widehat{D}C$, opposti a questi lati. L'angolo $A\widehat{D}C$, essendo esterno al triangolo $B\widehat{D}C$, è maggiore di $D\widehat{B}C$, e quindi $A\widehat{C}B$, evidentemente maggiore di $A\widehat{C}D$, è pure maggiore di $A\widehat{D}C$ e a più forte ragione maggiore di $A\widehat{B}C$.

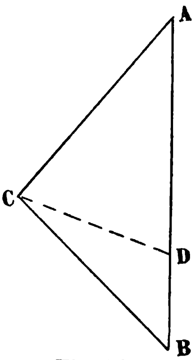


Fig. 58.

**Corollari.** — *1°. In un triangolo un lato è minore, eguale, o maggiore di un altro, secondo che l'angolo opposto al primo è minore, eguale o maggiore dell'angolo opposto all'altro.*

Infatti, abbiamo visto in questo § e nel precedente che tutte le ipotesi, che si possono fare sull'eguaglianza, o disuguaglianza di due lati di un triangolo, ci conducono a tesi, le quali si escludono a vicenda, per conseguenza (V. Preliminari § 4) anche i teoremi inversi sono veri.

*2°. Se un triangolo è equiangolo, esso è anche equilatero.*

*3°. Il segmento, che unisce un vertice di un triangolo con un punto situato sul lato opposto, o interno al triangolo, è minore di uno almeno degli altri due lati.*

Supponiamo che nel triangolo ABC (fig. 58) il lato AC sia maggiore, o almeno eguale a BC. Ne segue che l'angolo $A\widehat{B}C$ è maggiore, o almeno eguale, di $C\widehat{A}B$. Unendo allora il vertice C con un punto D della base per mezzo del segmento CD, si ha che l'angolo CDA, esterno al triangolo CDB, è maggiore di $C\widehat{B}D$ e quindi anche di $C\widehat{A}D$. Per conseguenza nel triangolo CAD il lato CA è maggiore di CD (Cor. 1°), come volevasi dimostrare.

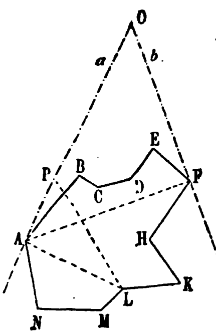


Fig. 59.

**79. Teorema.** — *Il contorno di un poligono concavo, non intrecciato, è una linea completa.*

Sia ABCDEFHKLMN un poligono concavo, non intrecciato, e fra le distanze di un vertice qualunque L del poligono dagli altri vertici, sia LA non minore delle rimanenti. È facile dimostrare che, se si conduce per A una retta *a* perpendicolare ad LA, tutti i vertici del poligono si trovano dalla stessa parte di L rispetto ad *a*. Infatti ogni punto P della retta *a*, diverso da A, ha dal punto L una distanza maggiore di AL, perchè nel triangolo ALP l'angolo esterno in A essendo maggiore dell' interno opposto $A\widehat{P}L$, sarà pure l'angolo $L\widehat{A}P$, che è eguale al primo, maggiore dell'angolo $A\widehat{P}L$, e quindi (§ 78 Cor. 1°) LP $>$ LA. A più forte ragione ogni punto del piano, che si trovi, rispetto ad *a*, dalla parte opposta del punto L,

ha da L una distanza maggiore di AL, e quindi nessun vertice del poligono, all'infuori di A, può trovarsi sulla retta *a*, od essere situato da parte opposta di L rispetto ad *a*. Analogamente, se si considera il vertice A e la sua maggiore distanza dagli altri vertici, che supponiamo essere AF, ripetendo lo stesso ragionamento si dimostra che i vertici del poligono dato giacciono tutti dalla stessa parte di A, rispetto alla retta *b* perpendicolare ad AF nel punto F.

Ora può darsi che le due rette *a*, *b* si taglino in un punto O, o sieno parallele; in ogni caso tutti i vertici del poligono, e quindi anche tutti i punti del suo contorno, sono interni all'angolo $A\widehat{O}P$, o alla striscia, che ha per lati le due rette *a*, *b*, eccettuati i due vertici del poligono, che si trovano sui due lati. Ne segue (§ 51 e P. IV, 2) che le due spezzate ABCDEF, FHKLMNA, che formano il contorno del poligono, dividono l'angolo (o la striscia) $A\widehat{O}F$ in tre parti; quella intermedia all'altre due è limitata dal contorno ABCDEFHKLMNA.

**Definizione.** — La parte di piano, limitata dal contorno di un poligono concavo, non intrecciato e che è compresa, come risulta dalla dimostrazione precedente, tra altre due parti di questo piano, dicesi *superficie del poligono*, o semplicemente *poligono*.

**80. Teorema** *1°*. — *Una retta, situata nel piano di un poligono, non intrecciato, e che passa per un punto interno ad esso, incontra il contorno almeno in due punti.*

Sia P il punto della retta data *a* interno al poligono ABCDEF, e fra le distanze PA, PB.... del punto P dai vertici del poligono sia PF quella che non è minore delle altre. È chiaro che (§ 78 Cor. 3°) tutti i punti del contorno, o interni al poligono dato, hanno da P una distanza minore di PF, ossia si trovano nell'interno del circolo, descritto nel piano del poligono col centro in P e con raggio arbitrario maggiore di PF.

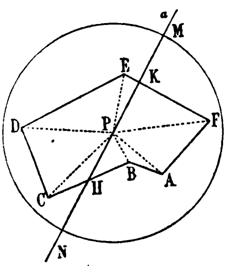


Fig. 60.

Siccome poi la retta *a* passa per il centro del circolo, ciascuna delle due semirette, in cui essa resta divisa dal punto P, incontra il circolo in un punto esterno al poligono. Abbiamo così due punti M, N esterni al poligono; d'onde deriva che, siccome per andare dal punto P, interno al poligono, al punto M o al punto N, esterni al poligono stesso, bisogna traversare il contorno almeno in un punto, così la retta *a* deve incontrare il contorno del poligono almeno in due punti.

**Teorema** *2°*. — *Una retta non può incontrare il contorno di un poligono convesso in più di due punti.*

Se infatti (fig. 61) una retta *a* avesse tre punti K, L, M in comune col contorno di un poligono ABCDEFGH, uno di essi, per es. L, sarebbe interno al segmento KM; allora i punti M, K, e quindi anche i lati CB, DE, che passano per essi, e i vertici B, E si troverebbero in parti opposte rispetto alla retta CD del poligono, che passa per L. Il dato poligono dunque sarebbe concavo, e ciò è contrario all'ipotesi.

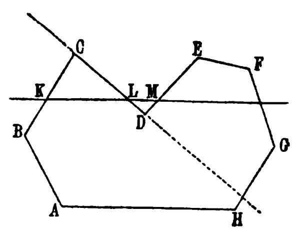


Fig. 61.

**Corollario.** — *Una semiretta, uscente dal vertice di un poligono convesso, incontra, oppure no, il contorno in un punto distinto dal vertice stesso, secondo che è interna, oppure esterna, all'angolo del poligono, che ha per vertice quel punto.*

Infatti, se una semiretta, uscente da un vertice di un poligono, è esterna all'angolo del poligono, che ha per vertice quel punto, essa è tutta esterna al poligono e non può incontrare il contorno. Se invece essa è interna a quell'angolo del poligono, necessariamente contiene punti interni al poligono stesso, epperciò incontra il contorno in due punti distinti, vale a dire ha in comune col contorno un altro punto, all'infuori del vertice che si considera.

**81. Teorema.** — *In ogni poligono un lato è minore della somma di tutti gli altri.*

1°. Dimostriamo prima il teorema pel caso di un triangolo. Pertanto sia il triangolo ACB (fig. 62), nel quale si vuol dimostrare che è $AB < AC + CB$. Si prolunghi AC di un segmento CD eguale a CB, e si unisca D con B. Ne risulta un triangolo CDB isoscele, epperciò gli angoli $C\widehat{D}B$, $C\widehat{B}D$ sono eguali. Nel triangolo ABD l'angolo $A\widehat{B}D$, evidentemente maggiore di $C\widehat{B}D$, è pure maggiore di $B\widehat{D}A$, e quindi il lato AD opposto ad $A\widehat{B}D$ è maggiore del lato AB opposto all'angolo minore $B\widehat{D}A$.

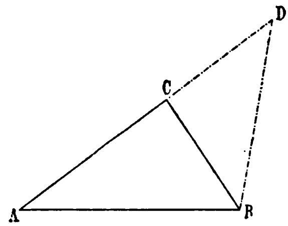


Fig. 62.

Ma $AD \equiv AC + CD \equiv AC + CB$, perciò $AB < AC + CB$.

2°. Nel poligono ABCDEF (fig. 63) un lato AF è minore della somma di tutti gli altri. Si conducano infatti tutte le diagonali che passano per uno degli estremi A del lato AF. Poichè in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, abbiamo le disuguaglianze

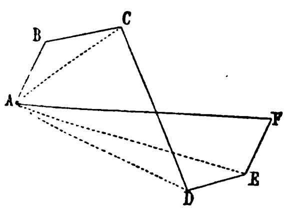


Fig. 63.

$$AC < AB + BC$$
$$AD < AC + CD$$
$$AE < AD + DE$$
$$AF < AE + EF,$$

dalle quali si ricava

$$AF < AB + BC + CD + DE + EF.$$

**Corollario.** — *In ogni triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due.*

Infatti (fig. 62), se $AB < AC + CB$, supponendo $AB > AC$, si ricava $AB - AC < CB$, e, supponendo $AB > CB$, si ha pure

$$AB - CB < AC.$$

**82. Definizione.** — Si dice che un poligono è *inviluppato* da un altro poligono non intrecciato, quando nessun punto del contorno del primo è esterno all'altro.

**Teorema.** — *Il perimetro di un poligono convesso è minore del perimetro di un altro poligono non intrecciato che lo inviluppa.*

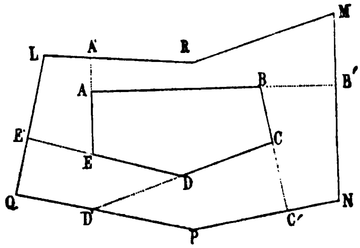



Fig. 64.

Sia ABCDE un poligono convesso inviluppato da un altro LRMNPQ e sieno A′, B′, C′, D′, E′ i punti d'incontro delle semirette EA, AB, BC, CD, DE col contorno del secondo poligono (§ 80 Teor. 1°). Dai poligoni EE′LA′, AA′RMB′, BB′NC′, CC′PD′, DD′QE′ si ricavano le diseguaglianze (§ 81 Teor.)

$$\begin{aligned} EA + AA' &< EE' + E'L + LA' \\ AB + BB' &< AA' + A'R + RM + MB' \\ BC + CC' &< BB' + B'N + NC' \\ CD + DD' &< CC' + C'P + PD' \\ DE + EE' &< DD' + D'Q + QE', \end{aligned}$$

dalle quali per addizione si ricava

$$EA + AB + BC + CD + DE < LR + RM + MN + NP + PQ + QL,$$

come volevasi dimostrare.

**83. Teorema.** — *La somma degli angoli interni di un poligono convesso è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due.*

1°. Consideriamo prima il caso di un triangolo (fig. 56). È chiaro che, essendo (§ 75) $\widehat{BCD} \equiv \widehat{ABC} + \widehat{BAC}$, si ha

$$\widehat{BCD} + \widehat{BCA} \equiv \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA},$$

ossia $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{BCA}$ è eguale ad un angolo piatto.

2°. Consideriamo ora un poligono convesso qualunque ABCDEF. Le diagonali condotte da uno stesso vertice A del poligono scompongono (§ 73) il poligono stesso in tanti triangoli quanti sono i lati meno due: ed è evidente che la somma degli angoli di tutti questi triangoli è eguale alla somma degli angoli interni del poligono. Ora si è dimostrato che la somma degli angoli di un triangolo è eguale ad un angolo piatto, quindi la somma degli angoli di tutti questi triangoli, e conseguentemente anche la somma degli angoli interni del poligono, è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati del poligono meno due.

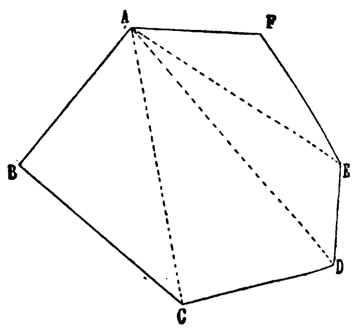



Fig. 65.

**Corollari.** — *1°. Se due rette, tagliate da una terza, non formano gli angoli coniugati interni supplementari, esse s'incontrano dalla parte della trasversale, dove la somma degli angoli coniugati interni è minore di un angolo piatto.*

*2°. Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente eguali, essi hanno eguale anche il terzo.*

Infatti questo terzo angolo è eguale alla differenza fra un angolo piatto e la somma dei primi due.

*3°. Se un triangolo ha un angolo retto (od ottuso), gli altri due suoi angoli sono acuti.*

Infatti la somma di questi due angoli è eguale (o minore) di un angolo retto, e perciò sono ambedue acuti.

**Definizioni.** — 1ª. Un triangolo si dice *acutangolo*, se ha i tre angoli acuti, *rettangolo*, se ha un angolo retto, ed *ottusangolo*, se ha un angolo ottuso.

2ª. In un triangolo rettangolo si chiama *ipotenusa* il lato opposto all'angolo retto, *cateti* gli altri due lati.

**Corollario 4°.** — *Se una retta ha un punto interno ad un cerchio (o ad una sfera) incontra il circolo (o la superficie sferica) in due punti.*

Supponiamo che la retta *a* passi per il punto B interno al cerchio (o alla sfera) di centro O. Si unisca il punto O con B e si tiri da O la perpendicolare OA alla retta *a*. Dal triangolo rettangolo OBA si ricava che OB > OA, e quindi il punto A è interno al circolo (o alla sfera). Se ora si porta sulla retta *a*, a partire da A, due segmenti adiacenti AC, AC′ eguali al raggio, dai triangoli rettangoli OAC, OAC′ si ricava che tanto OC quanto OC′ sono maggiori del raggio, e perciò i punti C e C′ sono esterni al circolo (o alla sfera). Ne segue che su ciascuna delle semirette BC, BC′ deve esistere un punto d'incontro col circolo (o colla superficie sferica) di centro O (§ 27).

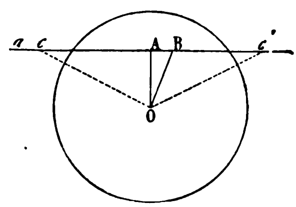


Fig. 66.

È chiaro poi che la retta *a* non può incontrare il circolo (o la superficie sferica) in più di due punti, poichè se esistesse un terzo punto d'incontro, uno di essi dovrebbe essere interno al segmento limitato dagli altri due, ed allora, costruito il triangolo che ha per vertici il centro e quei due punti estremi, la congiungente il centro con quel terzo punto dovrebbe essere eguale agli altri due lati del triangolo, ciò che è assurdo (§ 78 Cor. 3°).

**84. Teorema.** — *La somma degli angoli esterni di un poligono convesso, formati da ciascun lato colla retta del lato precedente, è eguale a due angoli piatti.*

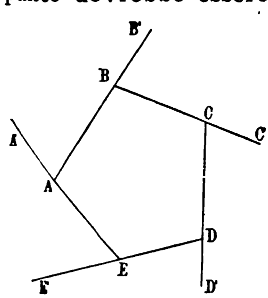


Fig. 67.

Infatti (fig. 67) ogni angolo esterno del poligono sommato coll'interno conseguente dà per risultato un angolo piatto; perciò la somma degli angoli esterni ed interni del poligono è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due, dunque per il teorema del § 83 la somma degli angoli esterni è eguale a due angoli piatti.

**85. Teorema.** — *Se per il punto medio di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad uno degli altri due lati, il terzo lato viene pure diviso per metà, e il segmento, che termina ai punti medi dei due lati, è eguale alla metà del terzo lato.*

Sia M (fig. 68) il punto medio del lato AB di un triangolo dato ABC, e sia MN la parallela al lato BC condotta da M. Se per il vertice A si conduce una parallela al lato opposto, si ottiene un sistema di tre rette parallele tagliate da due trasversali, ed allora (§ 53 Teor. 1°), essendo AM ≡ MB, si ha pure AN ≡ NC. Analogamente, conducendo da N la parallela ad AB, si dimostra che P è il punto medio di BC; ma MN e BP sono eguali, come segmenti paralleli compresi fra rette parallele, dunque MN è la metà di BC.

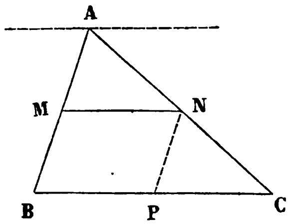


Fig. 68.

**Corollario.** — *La congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato ed eguale alla metà di esso.*

**86. Teorema.** — *Se due rette parallele sono tagliate da una serie di trasversali che passano per un punto, fra i punti e i segmenti di esse viene stabilita una corrispondenza univoca, nella quale*

*1° a segmenti eguali della prima retta corrispondono segmenti eguali della seconda;*

*2° alla somma di due o più segmenti della prima corrisponde la somma dei segmenti corrispondenti della seconda.*

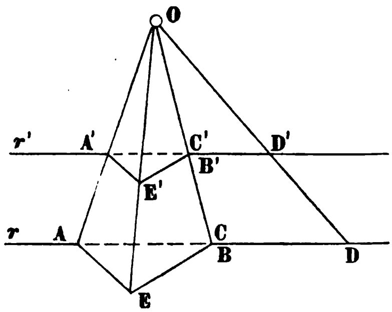


Fig. 69.

1°. Le due rette parallele $r$ ed $r'$ sieno tagliate dalle trasversali OA, OB, OC, OD nei punti A, B, C, D; A′, B′, C′, D′ rispettivamente. Dico che, se AB ≡ CD, dev'essere anche A′B′ ≡ C′D′.

Supposto dapprima che le rette OB, OC coincidano (fig. 69), si faccia rotare il semipiano OBD intorno alla retta OB di un diedro minore di un diedro piatto. Sia OBE il semipiano nella nuova posizione, e si congiunga A con E, A′ con E′. I piani ABE; A′B′E′ sono paralleli, perchè sono individuati da rette parallele, ed AE risulta parallela ad A′E′ (§ 46 Teor.) Ne viene che gli angoli $A'\widehat{E'}B'$, $E'\widehat{A'}B'$ sono rispettivamente eguali agli angoli $A\widehat{E}B$, $E\widehat{A}B$; ma quest'ultimi sono eguali fra loro, perchè il triangolo ABE è isoscele per ipotesi, quindi si ha pure $A'\widehat{E'}B' \equiv E'\widehat{A'}B'$, ed anche A′B′ ≡ B′E′, ossia A′B′ ≡ B′D′.

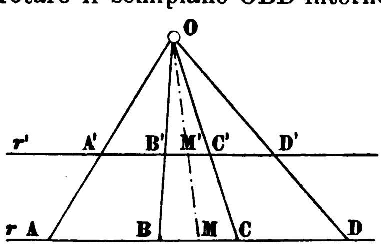


Fig. 70.

Se le rette OB, OC non coincidono (fig. 70), si unisca O col punto di mezzo M del segmento BC, e sia M′ il punto d'incontro di OM con la retta $r'$. Se AB ≡ CD, BM ≡ MC è anche AM ≡ MD, e da ciò che si è dimostrato sopra risulta A′M′ ≡ M′D′, B′M′ ≡ M′C′, ed anche A′B′ ≡ C′D′.

2°. È poi evidente che, se AD è la somma dei segmenti AB, BC, CD, il segmento A′D′, corrispondente ad AD, è la somma dei segmenti A′B′, B′C′, C′D′ rispettivamente corrispondenti ai primi.

## EGUAGLIANZA DI TRIANGOLI E DI POLIGONI.

**87. Teorema.** — *Due triangoli sono eguali, se hanno un lato e due angoli rispettivamente eguali e disposti nello stesso modo.*

Supponiamo che i due triangoli ABC, A′B′C′ (fig. 71) abbiano il lato BC eguale al lato B′C′, l'angolo $\widehat{B}$ eguale all'angolo $\widehat{B'}$ e l'angolo $\widehat{C}$ eguale all'angolo $\widehat{C'}$.

Portiamo a coincidere l'angolo $\widehat{B'}$ coll'angolo $\widehat{B}$, in modo che il lato BC coincida col lato eguale B′C′; allora anche l'angolo $\widehat{C'}$ coinciderà col suo eguale $\widehat{C}$, ed il punto A′ cadrà in A. I due triangoli possono dunque portarsi a coincidere, e perciò sono eguali.

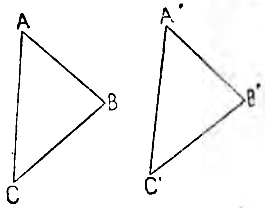


Fig. 71.

Si dimostrerebbe nello stesso modo l'eguaglianza dei triangoli ABC, A′B′C′, quando fosse nota l'eguaglianza dei lati BC, B′C′, degli angoli ad essi opposti $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$ e degli angoli adiacenti $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$, poichè dall'eguaglianza degli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$ e degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$ deriva (§ 83 Cor. 2°) l'eguaglianza degli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$, e quindi si ricade nel caso precedente.

**88. Teorema.** — *Due triangoli sono eguali, se hanno due lati e l'angolo opposto ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè gli angoli opposti agli altri due lati eguali sieno della stessa specie.*

Nei due triangoli ABC, A′B′C′ (fig. 72), sia AB ≡ A′B′, BC ≡ B′C′, $\widehat{A}$ ≡ $\widehat{A'}$. Dico che i due triangoli devono essere eguali, purchè si sappia che gli angoli $\widehat{C}$, $\widehat{C'}$ opposti ai lati eguali AB, A′B′ sono della stessa specie. Portiamo infatti a coincidere l'angolo $\widehat{A'}$ coll'angolo $\widehat{A}$, in modo che il lato B′A′ venga a coincidere col lato BA. Allora se il lato B′C′ non coincidesse con BC, ma prendesse una posizione diversa BD, si otterrebbe un triangolo isoscele BCD, nel quale i due angoli $\widehat{BCD}$, $\widehat{BDC}$ sarebbero eguali, e perciò acuti, mentre l'angolo $\widehat{ACB}$ sarebbe ottuso; e ciò è contrario all'ipotesi. Dunque B′C′ deve coincidere con BC, ossia i due triangoli sono eguali.

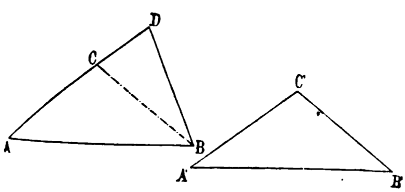


Fig. 72.

**89. Teorema.** — *Due triangoli sono eguali, se hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente eguali.*

Abbiansi i due triangoli ABC, A′B′C′ (fig. 71), nei quali i lati AB, BC sieno rispettivamente eguali ai lati A′B′, B′C′, e l'angolo $\widehat{ABC}$ sia eguale all'angolo $\widehat{A'B'C'}$. Se portiamo il triangolo A′B′C′ sopra il triangolo ABC, in modo che il lato A′B′ coincida col lato AB, è chiaro che, per l'eguaglianza degli angoli $\widehat{A'B'C'}$, $\widehat{ABC}$, il lato B′C′ prenderà la direzione del lato BC, e, per l'eguaglianza di questi lati, C′ cadrà in C. Ne segue che il lato A′C′ è eguale al lato AC, l'angolo $\widehat{A'}$ è eguale all'angolo $\widehat{A}$ e $\widehat{C'}$ a $\widehat{C}$, e i due triangoli sono eguali.

**90. Teorema.** — *Se un triangolo ha due lati rispettivamente eguali a due lati di un altro triangolo, ma l'angolo compreso fra i primi è maggiore dell'angolo compreso fra i secondi, il terzo lato del primo triangolo è maggiore del terzo lato dell'altro.*

Portiamo i due triangoli uno accanto all'altro in modo che abbiano un lato eguale AB in comune, che sieno situati uno da una parte e uno dall'altra rispetto alla retta del lato comune, e che gli altri due lati eguali AC, A′C′ sieno consecutivi. Essendo per ipotesi l'angolo $\widehat{BAC} < \widehat{BAC''}$, si deve dimostrare che è BC < BC″. Pertanto dividiamo per metà l'angolo $\widehat{CAC''}$ (concavo o convesso) somma dei due $\widehat{CAB}$, $\widehat{BAC''}$, e sia AD la bisettrice di quest'angolo, la quale cadrà nell'interno dell'angolo maggiore BAC″, e taglierà perciò il lato BC″ in un punto D. Uniamo il punto D con C per mezzo di una retta. I due triangoli CAD, C″AD, avendo il lato AD comune, i lati AC, AC″ eguali per ipotesi e gli angoli $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAC''}$ eguali per costruzione, sono eguali, e perciò è CD ≡ C″D. Dal triangolo BDC abbiamo poi (§ 81 Teor.)

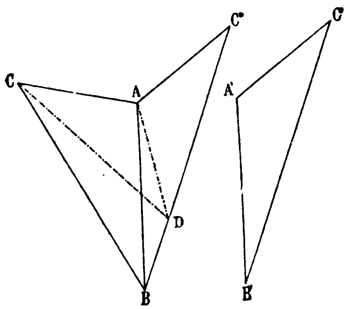


Fig. 73.

$$BC < BD + DC,$$

e perciò

$$BC < BD + DC'',$$

ossia

$$BC < BC''.$$

**Corollari.** — *1°. Se due lati di un triangolo sono rispettivamente eguali a due lati di un altro triangolo, l'angolo compreso fra i primi due è maggiore, eguale, o minore dell'angolo compreso fra i secondi, secondo che il terzo lato del primo triangolo è maggiore, eguale, o minore del terzo lato del secondo.*

Infatti abbiamo dimostrato che, dati due triangoli ABC, A′B′C′, aventi due lati rispettivamente eguali (AB ≡ A′B′, AC ≡ A′C′):

1° se l'angolo compreso $\widehat{A} > \widehat{A'}$, anche $BC > B'C'$
2° " " $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ " $BC \equiv B'C'$
3° " " $\widehat{A} < \widehat{A'}$ " $BC < B'C'$.

Ne segue (Preliminari § 4°) che sono veri anche i teoremi inversi.

2°. *Due triangoli, che hanno i tre lati rispettivamente eguali sono eguali.*

**91.** Riepilogando, abbiamo dimostrato che:

*Due triangoli sono eguali,*
*1° se hanno un lato e due angoli rispettivamente eguali e disposti nello stesso modo* (§ 87);
*2° se hanno due lati e l'angolo opposto ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè gli angoli opposti ai rimanenti lati eguali sieno della stessa specie* (§ 88);
*3° se hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente eguali* (§ 89);
*4° se hanno i tre lati rispettivamente eguali* (§ 90 Cor. 2°).

Questi casi si possono riassumere dicendo che, per poter asserire l'eguaglianza di due triangoli, basta conoscere l'eguaglianza di tre elementi rispettivamente disposti nello stesso modo, purchè fra questi elementi sia compreso almeno un lato, e non dimenticando la condizione stabilita per il caso, in cui gli elementi eguali sono due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

**Corollari.** — *Due triangoli rettangoli sono eguali,*
*1° se hanno un lato (cateto o ipotenusa) e un angolo acuto rispettivamente eguali e disposti nello stesso modo;*
*2° se hanno l'ipotenusa e un cateto rispettivamente eguali;*
*3° se hanno i due cateti rispettivamente eguali.*

Infatti tutti i triangoli rettangoli hanno un angolo eguale, l'angolo retto; perciò, per asserire l'eguaglianza di due triangoli rettangoli, basta che si conosca l'eguaglianza di altri due elementi, fra i quali si trovi almeno un lato. Pertanto, applicando i quattro casi di eguaglianza, dimostrati per i triangoli in generale, ai triangoli rettangoli, si ottengono ordinatamente i corollari enunciati.

**92.** In un triangolo esistono sei elementi, tre lati e tre angoli, ed abbiamo veduto che in certi casi si può asserire l'eguaglianza di due triangoli, quando si conosca che tre elementi dell'uno sono rispettivamente eguali a tre elementi dell'altro (§ 91). In generale, in un poligono di $n$ vertici esistono $2n$ elementi, $n$ lati ed $n$ angoli; in certi casi per asserire che due poligoni convessi di $n$ lati sono eguali basta conoscere che $2n-3$ elementi dell'uno sono eguali rispettivamente ad altrettanti elementi dell'altro, come apparisce dai seguenti teoremi.

**Teorema.** — *Due poligoni convessi di* n *lati sono eguali, quando hanno* $n-1$ *lati ordinatamente eguali, ed hanno eguali gli angoli compresi fra i lati eguali.*

Siano ABCDEF, A'B'C'D'E'F' (fig. 74) due poligoni, che abbiano

$$AB \equiv A'B',\ BC \equiv B'C',\ CD \equiv C'D',\ DE \equiv D'E',\ EF \equiv E'F',$$
$$\widehat{B} \equiv \widehat{B'},\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'},\ \widehat{D} \equiv \widehat{D'},\ \widehat{E} \equiv \widehat{E'};$$

si vuol dimostrare che essi sono eguali. Trasportiamo il piano del secondo poligono su quello del primo, in modo che il segmento A′B′ coincida col segmento eguale AB, e che i due poligoni si trovino similmente disposti rispetto alla retta AB. A causa dell'eguaglianza degli angoli $\widehat{B'}$, $\widehat{B}$ il segmento B′C′ viene sulla semiretta BC, ed essendo B′C′ ≡ BC, il punto C′ cade in C. Nello stesso modo si dimostra successivamente che il punto D′ deve venire a coincidere col punto D, il punto E′ col punto E, il punto F′ col punto F. Così tutti i vertici del secondo poligono vengono a coincidere coi vertici del primo, e perciò i due poligoni coincidono completamente; dunque essi sono eguali.

**93. Teorema.** — *Due poligoni convessi di* n *lati sono eguali, quando hanno* n — 1 *angoli ordinatamente eguali, ed hanno eguali i lati che congiungono i vertici degli angoli eguali.*

Sieno ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ (fig. 74) due poligoni, che abbiano $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, $\widehat{D} \equiv \widehat{D'}$, $\widehat{E} \equiv \widehat{E'}$ e AB ≡ A′B′, BC ≡ B′C′, CD ≡ C′D′, DE ≡ D′E′; si vuol dimostrare che essi sono eguali.

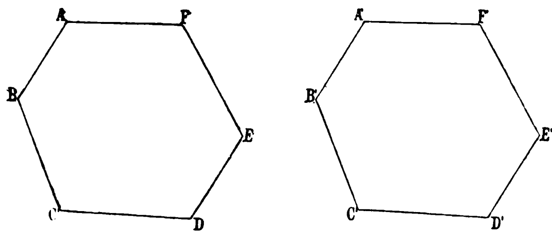



Fig. 74.

Portiamo infatti il poligono A′B′C′D′E′F′ sull'altro in modo che il segmento A′B′ venga a coincidere col suo eguale AB, e che i due poligoni sieno similmente disposti rispetto alla retta AB. A causa della eguaglianza degli angoli $\widehat{B'}$, $\widehat{B}$, il segmento B′C′ viene sulla semiretta BC, ed essendo B′C′ ≡ BC, il punto C′ cade nel punto C; inoltre per la eguaglianza degli angoli $\widehat{A'}$, $\widehat{A}$ anche il lato A′F′ si dispone sulla semiretta AF.

Analogamente si dimostra che il punto D′ viene a coincidere col punto D, il punto E′ col punto E e il lato E′F′ cade sulla semiretta EF. Poichè i due segmenti A′F′, E′F′ cadono sulle semirette AF, EF rispettivamente, è chiaro che il loro punto d'incontro F′ deve coincidere col punto F. I due poligoni dunque si possono portare a coincidere, e perciò sono eguali.

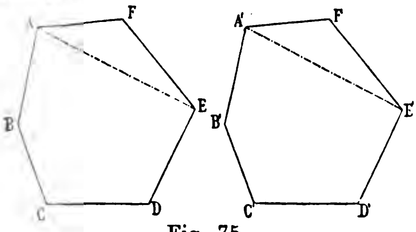



Fig. 75.

**94. Teorema.** — *Due poligoni convessi di* n *lati sono eguali, quando hanno tutti i lati rispettivamente eguali ed* n — 3 *angoli consecutivi eguali e disposti nello stesso modo.*

Sieno ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ (fig. 75) due poligoni, aventi AB ≡ A′B′,

$BC \equiv B'C'$, $CD \equiv C'D'$, $DE \equiv D'E'$, $EF \equiv E'F'$, $FA \equiv F'A'$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, $\widehat{D} \equiv \widehat{D'}$. Tracciamo le due diagonali AE, A'E', le quali scompongono ciascuno dei due poligoni dati in un nuovo poligono ed in un triangolo. I due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' sono eguali per il teorema del § 92, perciò è $AE \equiv A'E'$, e i due triangoli AFE, A'F'E', avendo i tre lati rispettivamente eguali, sono pure eguali. Se dunque portiamo il poligono A'B'C'D'E' a coincidere col poligono ABCDE, è chiaro che anche il triangolo A'E'F' viene a coincidere col triangolo eguale AEF, e i due dati poligoni coincidono interamente, e perciò sono eguali.

## COSTRUZIONI DI TRIANGOLI E POLIGONI.

**95.** Nei §§ 87-91 abbiamo veduto i vari casi, nei quali l'eguaglianza di tre elementi di un triangolo (fra i quali si trovi almeno un lato) a tre elementi di un altro triangolo basta per affermare l'eguaglianza dei due triangoli.

Quando, per esempio, diciamo che due triangoli sono eguali, se hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali, veniamo a dire che due lati e l'angolo compreso sono sufficienti per individuare un triangolo; di guisa che, costruito un triangolo che abbia quegli elementi, tutti gli altri, che si potessero costruire con gli stessi elementi, sarebbero eguali al primo. Lo stesso ripetasi per gli altri casi di eguaglianza considerati.

Vediamo ora come si costruisca un triangolo, dati tre elementi che servano a individuarlo. Premettiamo a tal uopo il seguente

**Problema.** — *Per un punto, dato sopra una retta, condurre un'altra retta tale che formi con essa un angolo eguale ad un angolo dato.*

Si descriva con raggio qualunque e col centro nel vertice A' dell'angolo dato un circolo, il quale taglierà i lati in due punti B', C'. Si descriva poi con raggio eguale ad A'B', e con centro nel punto dato A, un circolo, il quale incontrerà una delle semirette di $a$, uscenti da A, in un punto B. Con raggio eguale alla distanza B'C', e col centro in B, si descriva un altro circolo, il quale taglierà il circolo di centro A in due punti C, $C_1$. Le rette AC, $AC_1$ sono le soluzioni del problema. Infatti i triangoli A'B'C', ABC, $ABC_1$, avendo i lati rispettivamente eguali, sono eguali, e perciò gli angoli $\widehat{B'A'C'}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAC_1}$ sono eguali.

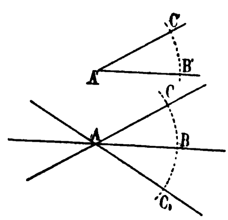


Fig. 76.

**96. Problema.** — *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo compreso.*

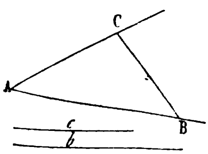


Fig. 77.

Sia $\widehat{A}$ l'angolo, $b, c$ i lati dati. Sui lati dell'angolo $\widehat{A}$ si stacchino, a partire da A, due segmenti AB, AC eguali a $b, c$ rispettivamente, e si conduca la retta BC. Evidentemente il triangolo ABC è quello richiesto.

**97. Problema.** — *Costruire un triangolo dato un lato e i due angoli adiacenti.*

Sia (fig. 78) MN il lato, $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ gli angoli dati: sopra una retta si prenda un segmento AB eguale ad MN, e per i punti A, B si conducano due rette tali che gli angoli coniugati interni, che esse formano con la retta AB, sieno eguali agli angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ rispettivamente. Se la somma degli angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ è minore di un angolo piatto, le due rette suddette s'incontreranno (§ 83 Cor. 1°), e si otterrà un triangolo ABC, che è quello richiesto.

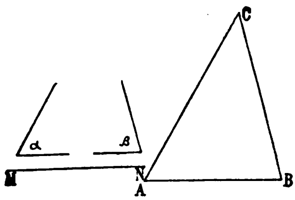


Fig. 78.

Se la somma degli angoli $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ fosse eguale, o maggiore di un angolo piatto, il triangolo evidentemente non si potrebbe costruire, perchè sappiamo che in ogni triangolo la somma di due angoli deve essere minore di un angolo piatto.

**98. Problema.** — *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.*

Sieno $a$ e $b$ i due segmenti dati ($a > b$) ed $\alpha$ l'angolo dato.
Il problema presenta due casi:
1° l'angolo $\alpha$ è opposto al lato maggiore;
2° l'angolo $\alpha$ è opposto al lato minore.
Nel 1° caso (fig. 79) l'angolo $\alpha$ può essere acuto, retto, od ottuso.

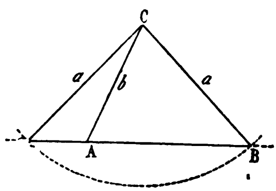


Fig. 79.

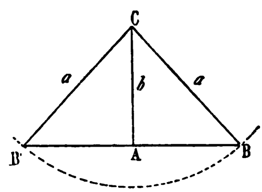


Fig. 80.

Sopra un lato di un angolo eguale ad $\alpha$ si porti, a partire dal vertice, il segmento AC (fig. 79) eguale a $b$, poi col centro in C e con raggio $a$. si descriva un circolo. Siccome, per ipotesi, $a$ è maggiore di AC, il vertice A dell'angolo sarà interno al cerchio descritto, e quindi la retta AB dovrà incontrare la circonferenza in due punti B e B′, situati da parti opposte rispetto ad A (§ 83 Cor. 4°). Unendo C con B o con B′, secondo che l'angolo dato è acuto od ottuso, si ha che il triangolo richiesto è ABC, oppure AB′C.

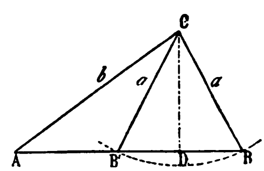


Fig. 81.

Se l'angolo $\alpha$ è retto (fig. 80), ciascuno dei due triangoli eguali ABC, AB′C è il richiesto, e quindi il problema è sempre determinato ed ammette una sola soluzione.

Nel 2° caso (fig. 81) l'angolo dato $\alpha$ non può essere che acuto, perchè in un triangolo al lato minore è opposto l'angolo minore.

Pertanto sia $\widehat{BAC}$ un angolo acuto eguale ad $\alpha$. Fatto $AC \equiv b$, con

centro C e con raggio $a$ si descriva un circolo. Se $b$ è maggiore del segmento perpendicolare CD condotto alla retta AB, il punto D sarà interno al circolo descritto, e quindi la retta AB taglierà il circolo in due punti B e B′ (§ 83 Cor. 4°), i quali dovranno essere situati sulla semiretta AB, perchè, essendo l'angolo $C\widehat{A}B$ acuto, tutti i punti della retta AB situati da parte opposta di D rispetto al punto A hanno dal centro C del circolo una distanza maggiore di AC, e quindi sono esterni al cerchio medesimo. Ne segue che entrambi i triangoli ABC, AB′C sono soluzioni del problema.

Se poi $a$ è eguale al segmento CD, il solo triangolo, che soddisfa al problema, è ACD. Infine, se $a$ è minore di CD, tutti i punti della retta AB hanno da C una distanza maggiore di $a$, e quindi sono esterni al cerchio descritto, e il problema è impossibile.

Dunque nel 2° caso il problema ammette due, una o nessuna soluzione.

**99. Problema.** — *Costruire un triangolo, i cui lati sieno eguali a tre segmenti dati, tali che ciascuno sia minore della somma degli altri due.*

Sappiamo già che, se tre segmenti sono lati di uno stesso triangolo, è necessario che ciascuno sia minore della somma degli altri due (§ 81 Teor.): ora mostreremo che queste condizioni sono anche sufficienti, cioè che se $M_1N_1$, $M_2N_2$, $M_3N_3$ sono tre segmenti, tali che sia $M_1N_1 < M_2N_2 + M_3N_3$, $M_2N_2 < M_1N_1 + M_3N_3$, $M_3N_3 < M_1N_1 + M_2N_2$, è possibile costruire un triangolo, che abbia per lati questi segmenti. Osserviamo intanto che, supposto $M_1N_1$ non inferiore agli altri due segmenti, le ultime due condizioni sono evidentemente verificate, e resta effettivamente una sola condizione, che è la prima.

Sopra una retta prendiamo un segmento AB eguale al segmento $M_1N_1$, che supponiamo non minore di ciascuno degli altri due; quindi descriviamo due circoli, uno col centro in A e con raggio $M_2N_2$ e l'altro col centro in B e con raggio $M_3N_3$. Il primo di questi incontra la retta AB in un punto D, interno al segmento AB, se $M_1N_1 > M_2N_2$, oppure coincidente con B, se $M_1N_1 \equiv M_2N_2$, ed in un altro punto E, situato rispetto ad A dalla parte opposta di B. L'altro circolo incontra la retta AB in un punto K, interno al segmento AB, se $M_1N_1 > M_3N_3$, oppure coincidente con A, se $M_1N_1 \equiv M_3N_3$, ed in un altro punto H, situato rispetto a B dalla parte opposta di A.

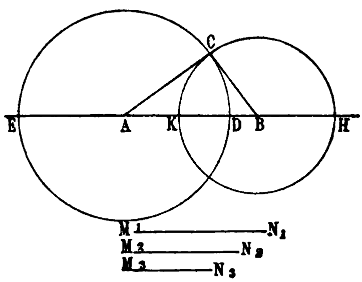


Fig. 82.

Siccome, per ipotesi, è

$$M_1N_1 < M_2N_2 + M_3N_3,$$

sarà pure AB < AD + BK, e quindi AB − BK < AD, ovvero AK < AD. In ogni caso dunque il punto K è interno, ed il punto H esterno al cerchio, che ha per centro A; perciò i due circoli descritti devono avere almeno due punti, comuni (§ 27 Cor. 1°). Se C è uno di questi punti, è chiaro che ABC è il triangolo domandato.

**Corollario.** — *È sempre possibile costruire un triangolo equilatero, che abbia i suoi lati eguali ad un segmento dato.*

Se infatti sono dati tre segmenti eguali, è soddisfatta la condizione che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due.

**100. Problema.** — *Costruire un poligono, che abbia gli elementi disposti in un certo ordine, e di cui si conoscono i lati e gli angoli, eccettuati:*
*1° due lati consecutivi e l'angolo compreso;*
*2° un lato e i due angoli adiacenti ad esso;*
*3° tre angoli consecutivi.*

I primi due casi non presentano alcuna difficoltà, perchè essi si riducono alla costruzione successiva di angoli e segmenti rispettivamente eguali ad angoli e segmenti dati; il terzo caso poi si riduce al secondo ed alla costruzione di un triangolo, dati i tre lati (§ 99 Prob.)

## QUADRANGOLI.

**101.** Dalle proprietà generali dei poligoni studiate nei §§ precedenti si ricavano, relativamente ai quadrangoli, i seguenti

**Corollari.** — *1°. In un quadrangolo esistono due diagonali.*

*2°. Un lato di un quadrangolo, piano o gobbo, è minore della somma di tutti gli altri.*

*3°. In un quadrangolo convesso la somma degli angoli interni è eguale a due angoli piatti. In un quadrangolo convesso la somma degli angoli esterni è pure eguale a due angoli piatti.*

*4°. Se un quadrangolo è equiangolo, esso ha tutti gli angoli retti.*

*5°. Due quadrangoli convessi sono eguali:*

a) *se hanno tre coppie di lati ordinatamente eguali, ed eguali le due coppie di angoli, compresi fra i lati eguali;*

b) *se hanno tre coppie di angoli rispettivamente eguali, ed eguali le due coppie di lati, che uniscono i vertici degli angoli eguali;*

c) *se hanno i lati rispettivamente eguali, ed eguale un angolo compreso fra i lati eguali.*

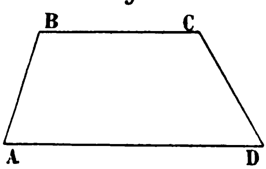


Fig. 83.

**102. Definizioni.** — 1ª. In un quadrangolo si dicono *opposti* due vertici non situati in un lato, *opposti* due angoli che hanno per vertici due vertici opposti del quadrangolo, *opposti* due lati non consecutivi.

2ª. Si chiama *trapezio* ogni quadrangolo, che ha i due lati opposti paralleli. In un trapezio si chiamano *basi* i lati paralleli, *altezza* il segmento perpendicolare alle basi compreso tra esse, *mediana* il segmento che unisce i punti medi dei lati paralleli, *sezione media* il segmento che unisce i punti medi degli altri due lati.

**Teorema.** — *La sezione media di un trapezio è eguale alla semisomma delle due basi ed è parallela ad esse.*

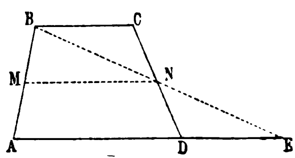


Fig. 84.

Sia MN la sezione media del trapezio dato ABCD, e sia E il punto d'incontro della retta BN col prolungamento dell'altra base AD del trapezio. I due triangoli BNC, DNE sono eguali, avendo il lato CN ≡ ND per ipotesi, l'angolo $B\widehat{N}C \equiv D\widehat{N}E$, perchè opposti al ver-

tice e l'angolo $\widehat{NBC} \equiv \widehat{NED}$, perchè alterni interni, rispetto alle parallele BC, AE e alla trasversale BE; dunque $BC \equiv DE$, $BN \equiv NE$. Allora, nel triangolo BAE, il segmento MN unisce i punti medi di due lati, e quindi (§ 85 Cor.) è parallelo ed eguale alla metà del terzo lato AE. Ma $AE \equiv AD + DE \equiv AD + BC$; quindi il teorema resta dimostrato.

**103. Definizione.** — Si chiama *parallelogrammo* ogni quadrangolo, che ha ciascun lato parallelo al suo opposto.

Un parallelogrammo può riguardarsi in doppio modo come un trapezio, secondo che si prendono per basi due lati opposti, oppure gli altri due. Per conseguenza un parallelogrammo ha due altezze e due mediane.

**Teorema.** — *In ogni parallelogrammo:*
*1° i lati opposti sono eguali;*
*2° gli angoli opposti sono eguali;*
*3° le due diagonali si tagliano nel loro punto medio.*

Sia ABCD un parallelogrammo.

1°. I lati AD, BC sono eguali, come segmenti paralleli compresi fra rette parallele (§ 52 Teor.); e per la stessa ragione sono pure eguali i lati AB, CD.

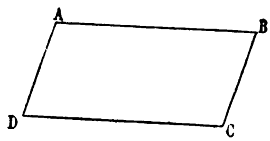


Fig. 85.

2°. Gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ hanno i lati diretti in senso contrario, e perciò sono eguali (§ 49 Teor.). Per la stessa ragione sono eguali gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{C}$.

3°. Sia O il punto d'incontro delle diagonali del parallelogrammo ABCD. I due triangoli ABO, CDO hanno i lati AB, CD eguali come lati opposti del parallelogrammo dato, gli angoli $\widehat{BAO}$, $\widehat{OCD}$ eguali, come alterni interni rispetto alle parallele AB, CD ed alla trasversale AC, e gli angoli AOB, COD eguali, perchè opposti al vertice; essi perciò sono eguali, ed è $BO \equiv OD$, $AO \equiv OC$; ossia O è il punto medio tanto della diagonale AC, quanto della diagonale BD.

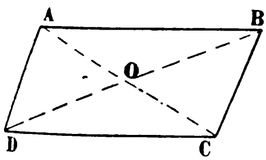


Fig. 86.

**Corollari.** — *1°. Due parallelogrammi sono eguali, se hanno due lati consecutivi e l'angolo compreso rispettivamente eguali.*

*2°. Due parallelogrammi eguali si possono portare a coincidere in due modi diversi.*

**104. Teorema.** — *Un quadrangolo convesso è un parallelogrammo;*
*1° se ha ogni lato eguale al suo opposto;*
*2° se ha ogni angolo eguale al suo opposto;*
*3° se le sue diagonali si tagliano nel loro punto medio.*

1°. Abbiasi (fig. 87) il quadrangolo ABCD, nel quale sia $AB \equiv CD$, $AD \equiv CB$. Condotta la diagonale AC, si ottengono due triangoli ABC, ADC eguali, perchè hanno un lato AC comune e gli altri due lati rispettivamente eguali. Ne segue che gli angoli $\widehat{ACB}$, $\widehat{CAD}$ sono eguali, e poichè questi sono

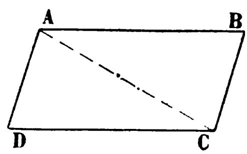


Fig. 87.

alterni interni rispetto alle rette AD, BC e alla trasversale AC, le due rette AD, BC sono parallele. Parimente, essendo eguali i due angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACD}$ le due rette AB, CD sono parallele, e perciò il quadrangolo ABCD è un parallelogrammo.

2°. Nel quadrangolo ABCD (fig. 85) si abbia $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$. Da queste eguaglianze deriva $\widehat{A} + \widehat{B} \equiv \widehat{C} + \widehat{D}$; e siccome la somma dei quattro angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ è eguale a due angoli piatti, se ne ricava che la somma degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, coniugati interni rispetto alle rette AD, BC e alla trasversale AB, è eguale ad un angolo piatto. Perciò le rette AD, BC sono parallele. Nello stesso modo si dimostra che le rette AB, DC son parallele; e resta così dimostrato che il quadrangolo ABCD è un parallelogrammo.

3°. Il punto O, comune alle diagonali del quadrangolo convesso ABCD, sia il punto medio di ambedue le diagonali stesse (fig. 86). I due triangoli OAB, OCD sono eguali, perchè hanno due lati rispettivamente eguali per ipotesi, e gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$, compresi fra essi, eguali come opposti al vertice. Ne segue che gli angoli $\widehat{BAO}$, $\widehat{OCD}$, alterni interni rispetto alle rette AB, CD e alla trasversale AC, sono eguali, e perciò le rette AB, CD sono parallele. Nello stesso modo, osservando che i triangoli AOD, BOC sono eguali, si può dimostrare che le rette AD, BC sono parallele. Il quadrangolo ABCD è dunque un parallelogrammo.

**Corollario.** — *Ogni diagonale di un parallelogrammo forma coi lati del medesimo due triangoli eguali.*

**105. Teorema.** — *Un quadrangolo convesso è un parallelogrammo, se ha due lati opposti eguali e paralleli.*

Nel quadrangolo convesso ABCD (fig. 87) i lati opposti AB, CD, sieno eguali e paralleli. Condotta una diagonale AC, si ottengono i due triangoli ABC, CDA eguali, perchè hanno il lato AC comune, i lati AB, CD eguali per ipotesi, e gli angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACD}$ eguali come alterni interni rispetto alle rette parallele AB, CD e alla trasversale AC. Ne segue che anche gli angoli $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAD}$, alterni interni rispetto alle rette BC, AD e alla trasversale AC, sono eguali, e quindi le rette BC, AD sono parallele. Perciò il quadrangolo ABCD è un parallelogrammo.

**106. Teorema** — *Esiste un parallelogrammo, che ha due lati consecutivi e l'angolo compreso eguali a due segmenti e ad un angolo dati.*

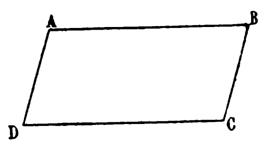


Fig. 88.

Sui lati del dato angolo $\widehat{A}$ si prendano due segmenti AB, AD eguali ai segmenti dati, e per gli estremi B, D di questi si conducano le parallele ai lati AD, AB rispettivamente. Si ottiene così un parallelogrammo, che è il richiesto. Tutti i parallelogrammi poi che si possono costruire, in modo che abbiano due lati consecutivi e l'angolo compreso eguali a due segmenti e ad un angolo dato, sono eguali fra loro (§ 104 Cor. 5°).

Osservazione. — I segmenti AB, AD e l'angolo $\widehat{A}$ si possono prendere come si vuole, e quindi potranno darsi i seguenti casi particolari:

1°. L'angolo $\widehat{A}$ è retto. Allora l'angolo $\widehat{C}$, eguale ad $\widehat{A}$, e gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{D}$, supplementari di $\widehat{A}$, sono pure retti.

2°. I lati AB, AD sono eguali. Allora tutti i quattro lati AB, BC, CD, AD sono eguali.

3°. L'angolo $\widehat{A}$ è retto, e contemporaneamente i lati AB, CD sono eguali; in tal caso tutti i lati sono eguali, e tutti gli angoli sono retti.

**Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *rettangolo* ogni quadrangolo equiangolo.
2ª. Chiamasi *rombo* o *losanga* ogni quadrangolo equilatero.
3ª. Chiamasi *quadrato* ogni quadrangolo equiangolo ed equilatero.

I rettangoli, le losanghe, i quadrati sono parallelogrammi; un quadrato poi si può considerare come rettangolo e come losanga.

**107. Teorema.** — *Le diagonali di un rettangolo sono eguali.* Inversamente: *un parallelogrammo, avente le diagonali eguali, è un rettangolo.*

1°. Sieno AC, BD (fig. 89) le diagonali del rettangolo ABCD. I triangoli rettangoli ABD, DCA sono eguali, perchè hanno il cateto AD comune e i cateti AB, DC eguali, come lati opposti di un rettangolo, perciò hanno le ipotenuse AC, BD eguali.

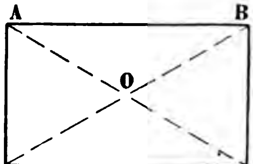


Fig. 89.

2°. Inversamente: sia ABCD un parallelogrammo, avente le diagonali AC, BD eguali. I due triangoli ABD, DCA sono eguali, perchè hanno il lato AD comune, i lati AC, BD eguali per ipotesi, e i lati AB, CD pure eguali, come lati opposti di un parallelogrammo; perciò gli angoli $B\widehat{A}D$, $C\widehat{D}A$ sono eguali, e, siccome sono anche supplementari, sono retti.

**108. Teorema.** — *In ogni losanga le diagonali sono perpendicolari.* Inversamente: *un parallelogrammo, avente le diagonali perpendicolari, è una losanga.*

1°. Se il parallelogrammo ABCD è una losanga (fig. 90), il triangolo ADB è isoscele, e perciò la mediana AO è perpendicolare alla base DB.

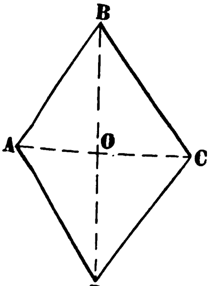


Fig. 90.

2°. Inversamente, se ABCD è un parallelogrammo avente le diagonali perpendicolari, i due lati consecutivi AB, AD sono eguali, come ipotenuse di triangoli rettangoli AOB, AOD che sono eguali, perchè hanno i cateti rispettivamente eguali.

**Corollario.** — *In ogni quadrato le diagonali sono eguali e perpendicolari.* Inversamente: *ogni parallelogrammo, avente le diagonali eguali e perpendicolari, è un quadrato.*

1°. Abbiamo visto che il quadrato può considerarsi come rettangolo e come losanga; quindi, considerando il quadrato (fig. 91) come rettangolo, si ha che le sue diagonali sono eguali, e considerandolo come losanga, si ha che le sue diagonali sono perpendicolari.

2°. Inversamente: se un parallelogrammo ha le diagonali eguali e perpendicolari fra loro, esso è un rettangolo ed una losanga, vale dire è un quadrato.

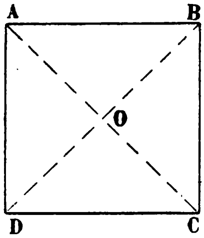



Fig. 91.

**109.** Nel § 106 abbiamo dimostrato, che si può costruire un parallelogrammo, avente due lati consecutivi e l'angolo compreso rispettivamente eguali a due segmenti e ad un angolo dato. Si possono perciò costruire infiniti parallelogrammi, aventi un angolo dato e un lato adiacente eguale ad un segmento dato; tutti questi parallelogrammi si dice che costituiscono *una serie di parallelogrammi.* Variando poi il lato e l'angolo comune a tutti i parallelogrammi di una serie, si possono ottenere infinite altre serie di parallelogrammi, tutte diverse tra loro.

È chiaro che un parallelogrammo di una serie è individuato quando è dato il segmento, al quale deve essere eguale l'altro lato adiacente all'angolo comune ai parallelogrammi della serie, e viceversa; di guisa che fra i parallelogrammi e i segmenti suddetti esiste una corrispondenza univoca.

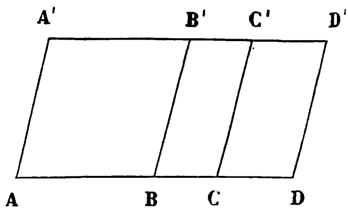



Fig. 92.

Dati due parallelogrammi di una serie AA'B'B, BB'C'C, se portiamo l'uno adiacente all'altro, in modo che il lato BB' dell'uno coincida col lato eguale BB' dell'altro, gli angoli $B'\widehat{B}C$, $B\widehat{B'}C'$ essendo i supplementi rispettivamente degli angoli $B'\widehat{B}A$, $B\widehat{B'}A'$, i segmenti BC, B'C' cadono rispettivamente sui prolungamenti di AB, A'B', e i lati BB' CC' risultano paralleli; quindi i due parallelogrammi dati formano insieme un nuovo parallelogrammo della serie.

**Definizioni.** — 1ª. Due parallelogrammi di una serie si dicono *adiacenti,* quando hanno un lato eguale in comune, sono situati nello stesso piano da parti opposte della retta comune, ed hanno gli altri due lati consecutivi.

2ª. Dati più parallelogrammi di una serie, se si porta il secondo adiacente al primo, il terzo adiacente al secondo, ma non dalla stessa parte del primo, e così di seguito, il parallelogrammo, che risulta dall'insieme di tutti i parallelogrammi dati, si dice la loro *somma.*

In seguito alle date definizioni ed alla proprietà enunciata nel Cor. 1° del § 103, risulta che le serie di parallelogrammi costituiscono infinite altre classi di grandezze, per le quali sussistono tutte le proprietà, che si sono dimostrate per le altre serie di grandezze finora studiate. Ammetteremo dunque senz'altro come dimostrate anche per le serie di parallelogrammi la proprietà commutativa e associativa della somma, e le conseguenze che ne derivano. Inoltre intenderemo estese anche a queste nuove serie di grandezze le definizioni di differenza, multiplo, summultiplo, ecc. e i teoremi del § 20.

**Teoremi.** — 1°. *Un parallelogrammo di una serie è maggiore, eguale, o minore di un altro della stessa serie, secondo che il segmento ad esso corrispondente è maggiore, eguale, o minore del segmento corrispondente al secondo.*

*2°. Se un parallelogrammo di una serie è somma di più altri parallelogrammi della serie, anche il segmento corrispondente ad esso è somma dei segmenti corrispondenti alle sue parti; e viceversa.*

Si imiti la dimostrazione del § 33.

**Corollari.** — *1°. Se un parallelogrammo di una serie è multiplo (o summultiplo) di un altro, il segmento corrispondente al primo è equimultiplo (o equisummultiplo) del segmento corrispondente al secondo; e viceversa.*

*2°. Se un parallelogrammo di una serie è differenza di due altri, anche il segmento corrispondente ad esso è differenza dei segmenti corrispondenti agli altri due; e viceversa.*

# CAPITOLO II

## Angoloidi.

**110. Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *angoloide*, o *angolo solido*, o *angolo poliedro* la figura individuata da tre o più semirette, uscenti da un punto, date in un certo ordine, e tali che tre di esse consecutive non stieno in un piano, dai piani individuati dalle coppie di semirette consecutive, e da quello individuato dalla prima e dall'ultima.

2ª. Le semirette date si chiamano gli *spigoli* o *costole*, il punto, dal quale esse escono, *vertice* dell'angoloide; gli angoli convessi, formati da due spigoli successivi e quello formato dal primo e dall'ultimo, si chiamano le *facce* dell'angoloide; i piani delle facce si chiamano i *piani* dell'angoloide.

3ª. Si chiama *superficie* di un angoloide, la superficie formata dalle facce.

4ª. Un angoloide avente tutti i diedri eguali si dice *equiedro*.

Per es. le cinque semirette VA, VB, VC, VD, VE (fig. 93), uscenti dallo stesso punto V e date nell'ordine scritto, individuano un angoloide, di cui le semirette stesse sono gli spigoli e gli angoli $A\widehat{V}B$, $B\widehat{V}C$, $C\widehat{V}D$, $D\widehat{V}E$, $E\widehat{V}A$ sono le facce.

È evidente che un angoloide ha tante facce quanti sono i suoi spigoli.

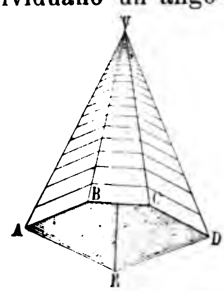


Fig. 93.

Una semiretta può percorrere la superficie dell'angoloide, andando dalla posizione dello spigolo VA a quella di VB, da questa a quella di VC,...., infine dalla posizione di VE a quella di VA; oppure andando dalla posizione di VA a quella di VE, da questa a quella di VD,...., infine dalla posizione di VB a quella di VA. Perciò l'angoloide s'indica indifferentemente coi simboli $\widehat{V}$.ABCDE...., $\widehat{V}$.EDCBA,.....

Spesse volte un angoloide s'indica anche colla sola lettera, che indica il vertice, purchè ciò non possa dar luogo ad equivoci.

5ª. Un angoloide si chiama *triedro* o *trispigolo*, *tetraedro* o *quadrispigolo*, ecc....., secondo che ha 3, 4.... facce. Un angoloide triedro si chiama brevemente un *triedro*.

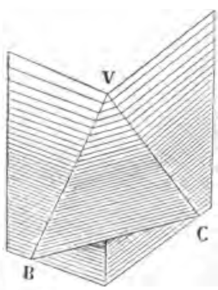
6ª. Un angoloide è *convesso,* quando tutti i suoi spigoli si trovano da una stessa parte di un suo piano qualunque; *concavo* nel caso contrario; *intrecciato,* quando almeno due facce hanno in comune una semiretta interna ad entrambe.

È chiaro che, se per il vertice di un angoloide qualunque si può far passare un piano, in modo che l'angoloide giaccia tutto in una delle parti, in cui il piano divide lo spazio, ogni piano parallelo al primo, e che incontra uno degli spigoli, incontra anche tutti gli altri, e taglia la superficie dell'angoloide secondo il contorno di un poligono, il quale è convesso, concavo, o intrecciato, secondo che l'angoloide stesso è convesso, concavo o intrecciato.

Inversamente: dato un poligono piano ed un punto fuori del suo piano, le semirette uscenti da quel punto e passanti per i vertici del poligono, prese nel medesimo ordine dei vertici del poligono, individuano un angoloide, il quale è convesso, concavo o intrecciato, secondo che il poligono stesso è convesso, concavo o intrecciato.

**III. Teorema.** — *La superficie di un angoloide convesso è una superficie completa.*

Infatti, dal P. IV, 1° deriva che, se una superficie incompleta ha i suoi limiti sopra una superficie completa, essa suddivide in due quella delle parti dello spazio (separate dall'altra superficie), nella quale è contenuta. Dunque date tre semirette VA, VB, VC, non situate nello stesso piano (fig. 94) i due semipiani AVB, AVC dividono lo spazio in due parti (diedri), e l'angolo $B\widehat{V}C$, che ha i lati sui due semipiani suddetti, e che perciò è interno al diedro convesso BAVC (§ 51 Teor. 2°) divide questo diedro in due parti. Una di queste parti è limitata dalla superficie VABC del triedro.



A

Fig. 94.

In generale, date più semirette VA, VB, VC, VD, VE (fig. 95) spigoli di un angoloide convesso, si sa che i due semipiani $\alpha$ e $\beta$, contenenti le facce $A\widehat{V}B$, $A\widehat{V}E$, dividono lo spazio in due parti (diedri). Ora, poichè l'angoloide è convesso, e perciò tutti gli spigoli devono trovarsi in quella delle parti dello spazio separate dal piano $\alpha$, la quale contiene lo spigolo VE, e in quella delle parti di spazio separate dal piano $\beta$ la quale contiene lo spigolo VB, è chiaro che la parte di superficie VBCDE dev'essere compresa nel diedro convesso $B\widehat{V}AE$. Ne segue che questo diedro è diviso dalla superficie suddetta in due parti delle quali una è limitata dalla superficie dell'angoloide che si considera.

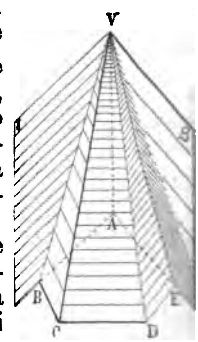



Fig. 95.

**Corollario** *1°.* — *La superficie di un angoloide convesso divide lo spazio in due parti, una delle quali contiene tutti i prolungamenti delle costole, e l'altra non ne contiene nessuna.*

**Definizioni.** — 1ª. La parte di spazio, limitata dalla superficie di un angoloide convesso, che non contiene i prolungamenti delle costole, dicesi *solido dell'angoloide* o semplicemente *angoloide.*

2ª. Ogni diedro convesso, che ha per costola uno spigolo dell'angoloide, e le ui facce contengono le facce dell'angoloide, che passano per esso, dicesi *diedro interno* dell'angoloide.

3ª. Un diedro interno dicesi *compreso* fra le due facce consecutive dell'angoloide, he passano per la sua costola, oppure si dice *adiacente* ad esse. In un triedo un liedro interno dicesi *opposto* a quella faccia, alla quale non è adiacente.

**Corollario 2°.** — *Ogni angolo, o poligono, il quale abbia i lati sulla uperficie di un angoloide convesso, o interni ad esso, è interno all'angoloide, è parte della superficie del medesimo.*

La dimostrazione è identica a quella del corollario del § 74.

**112. Teorema.** — *Una retta non può incontrare in più di due punti a superficie di un angoloide convesso.*

Si imiti la dimostrazione del Teor. 2° del § 80.

**113.** I prolungamenti degli spigoli di un angoloide, presi nel medesimo ordine degli spigoli stessi, individuano un secondo angoloide.

**Definizione 1ª.** — Due angoloidi si dicono *opposti al vertice*, quando gli spigoli di ciascuno di essi sono i prolungamenti degli spigoli dell'altro, presi nel medesimo ordine.

Le facce di due angoloidi opposti sono rispettivamente eguali, come ngoli opposti al vertice, e i diedri sono pure rispettivamente eguali, come diedri opposti alla costola.

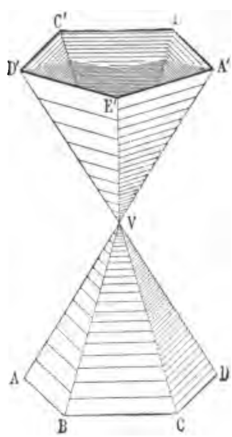


Fig. 96.

È facile convincersi che due angoloidi, opposti l vertice, hanno bensì tutti i loro elementi rispettivamente eguali, ma la disposizione dei medesimi on è la stessa in entrambi. Infatti sieno, per fissare le idee, due angoloidi opposti $\widehat{V}$.ABCDE, $\widehat{V}$.A′B′C′D′E′, e immaginiamo che un osservatore listeso lungo lo spigolo VA del primo colla testa ivolta verso il vertice, abbracci l'angoloide medesimo; egli vedrà succedersi gli spigoli da destra erso sinistra nell'ordine seguente: VB, VC, VD, VE. Se invece lo stesso osservatore prendesse una osizione analoga sul corrispondente spigolo VA′ dell'altro angoloide, egli vedrebbe succedersi gli pigoli da destra a sinistra nell'ordine seguente: VE′, VD′, VC′, VB′; vale a dire nell'ordine inverso del primo. Da questa differenza di disposizione degli elementi risulta l seguente

**Teorema.** — *Due angoloidi opposti al vertice non si possono generalmente portare a coincidere.*

Infatti consideriamo, per esempio, i due triedri opposti $\widehat{V}$.ABC, $\widehat{V}$.A′B′C′. È manifesto che per ottenere la coincidenza (se è possibile) lobbiamo sovrapporre le due facce eguali AVB, A′VB′, ciò che si può are in due maniere differenti: o facendo scorrere il piano delle due acce su sè stesso, rotando uno dei triedri di un mezzo giro intorno

al punto V; oppure ribaltando una di queste facce sull'altra attorno alla bisettrice degli angoli $A'\widehat{V}B$, $B'\widehat{V}A$.

Evidentemente nel primo caso i due angoloidi vengono a cadere da parti opposte rispetto alla faccia comune, e perciò non coincidono.

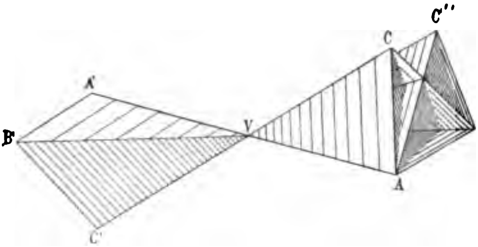


Fig. 97.

Nel secondo caso lo spigolo VA′ cadrà su VB e VB′ su VA, mentre VC′ prenderà la posizione VC″ non coincidente generalmente con VC, perchè i diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VB}$ essendo generalmente disuguali saranno pure disuguali i diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VB'}$ e per conseguenza i piani delle facce AVC, A′VC″ non possono coincidere.

Però da quanto si è detto si capisce facilmente che la coincidenza avrebbe luogo in questo secondo caso, se il triedro $\widehat{V}.ABC$ avesse due diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VB}$ eguali; perchè allora, a causa dell'eguaglianza dei diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{VB}$, e quindi anche dei loro opposti $\widehat{VA'}$, $\widehat{VB'}$, la faccia $A'\widehat{V}C'$ verrebbe sulla faccia $B\widehat{V}C$ e la faccia $B'\widehat{V}C'$ su $A\widehat{V}C$, di modo che lo spigolo VC′ verrebbe a coincidere con VC. Pertanto la faccia AVC sarebbe eguale alla faccia A′VC′, e quindi anche alla faccia BVC; vale a dire l'eguaglianza di due diedri del triedro porterebbe come conseguenza l'eguaglianza delle due facce opposte, dunque:

**Corollario 1°.** — *In un triedro a diedri eguali sono opposte facce eguali.*

**Definizione 2ª.** — Un diedro si dice *isoedro* quando ha due diedri, e quindi due facce eguali.

**Corollario 2°.** — *Un triedro isoedro è eguale al suo opposto al vertice.*

**114. Teorema.** — *In ogni angoloide una faccia è minore della somma delle altre.*

1°. Cominciamo a dimostrare questo teorema per il caso di un triedro. È evidente che una faccia di un triedro, minore od eguale ad una delle rimanenti, è minore della somma di queste. Basta dunque dimostrare che, se in un triedro $\widehat{V}.ABC$ (fig. 98) una faccia $A\widehat{V}C$ è maggiore di ciascuna delle altre due, è però minore della loro somma.

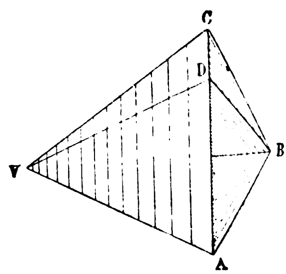


Fig. 98.

Dall'angolo $A\widehat{V}C$ stacchiamo una parte $A\widehat{V}D$ eguale alla faccia $A\widehat{V}B$; poi sulle semirette VD, VB prendiamo due segmenti VD, VB eguali, e tracciamo un piano che passi per i punti B, D ed incontri i due spigoli VA, VC in due punti A, C. I triangoli AVD, AVB, avendo il lato VA comune, gli angoli $A\widehat{V}D$, $A\widehat{V}B$ eguali per costruzione, i lati VD, VB pure eguali per costruzione, sono eguali ed è perciò $AD \equiv AB$.

Nel triangolo ABC si ha $BC > AC - AB$, ossia $BC > AC - AD$, e perciò è $BC > DC$. I triangoli VCD, VBC hanno il lato VC comune, e i lati VD, VB eguali, ma il terzo lato CD dell'uno è minore del terzo lato BC dell'altro; perciò è anche $C\widehat{V}D < B\widehat{V}C$ (§ 90 Cor. 1°), e quindi $A\widehat{V}D + D\widehat{V}C < B\widehat{V}A + B\widehat{V}C$, ossia $A\widehat{V}C < B\widehat{V}A + B\widehat{V}C$.

2°. Consideriamo ora un angoloide qualunque $V.\widehat{ABCDE}$ (fig. 99).

Si vuol dimostrare che una faccia qualunque, per es. $\widehat{AVE}$, è minore della somma delle altre. Conduciamo i piani che passano per uno degli spigoli situati sulla faccia $A\widehat{V}E$, p. es.: VA, e per gli altri spigoli ordinatamente. Considerando i triedri $V.\widehat{ABC}$, $V.\widehat{ACD}$, $V.\widehat{ADE}$, si hanno le disuguaglianze

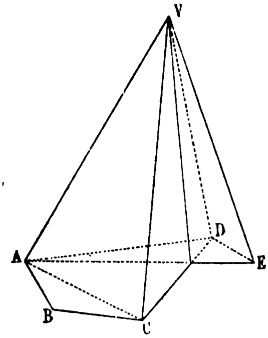


Fig. 99.

$$A\widehat{V}C < A\widehat{V}B + B\widehat{V}C$$
$$A\widehat{V}D < A\widehat{V}C + C\widehat{V}D$$
$$A\widehat{V}E < A\widehat{V}D + D\widehat{V}E;$$

e da queste si ricava

$$A\widehat{V}E < A\widehat{V}B + B\widehat{V}C + C\widehat{V}D + D\widehat{V}E.$$

**Corollari.** — *1°. In ogni triedro una faccia è maggiore della differenza dell'altre due.*

*2°. Se due diedri di un triedro sono diseguali, anche le facce opposte sono diseguali, ed è maggiore quella che è opposta al diedro maggiore.*

Nel triedro $V.\widehat{ABC}$ (fig. 98) sia il diedro $\widehat{VB}$ maggiore del diedro $\widehat{VA}$. Per lo spigolo VB conduciamo un semipiano, interno al diedro $CV\widehat{B}A$, tale che il diedro $DV\widehat{B}A$ sia eguale al diedro $\widehat{VA}$. Il triedro $V.\widehat{ABD}$, avendo due diedri eguali, ha le facce $A\widehat{V}D$, $B\widehat{V}D$, ad essi opposte, pure eguali. Dal triedro $V.\widehat{BDC}$, si ha poi $B\widehat{V}C < B\widehat{V}D + D\widehat{V}C$, e quindi $B\widehat{V}C < A\widehat{V}D + D\widehat{V}C$, ossia $B\widehat{V}C < A\widehat{V}C$; *c. v. d.*

*3°. In un triedro un diedro è minore, eguale o maggiore di un altro, secondo che la faccia opposta al primo è minore, eguale o maggiore della faccia opposta all'altro.*

Abbiamo visto nel § precedente ed in questo, che tutte le ipotesi che si possono fare sull'eguaglianza o disuguaglianza di due diedri di un triedro, ci conducono a tesi, che si escludono a vicenda, per conseguenza (v. Prelim., § 4) anche i teoremi inversi sono veri.

*4°. Se in un triedro le tre faccie sono eguali, anche i tre diedri sono eguali; e viceversa.*

**115. Teorema.** — *In ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di due angoli piatti.*

Sia V.ABCDE l'angoloide convesso dato, ABCDE una sezione di esso con un piano che ne incontra tutti gli spigoli. È chiaro che il numero dei lati della sezione è eguale al numero delle facce dell'angoloide, e perciò (§ 83 Teor.) la somma degli angoli interni del poligono ABCDE, aumentata di due angoli piatti, è eguale alla somma degli angoli interni dei triangoli AVB, BVC, CVD, DVE, EVA.

Se ora consideriamo i triedri A.BVE, B.AVC, C.BVD, D.CVE, E.AVD, per il teorema del § precedente, si ha

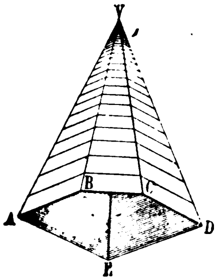



Fig. 100.

$$B\widehat{A}E < B\widehat{A}V + E\widehat{A}V$$
$$A\widehat{B}C < A\widehat{B}V + C\widehat{B}V$$
$$B\widehat{C}D < B\widehat{C}V + D\widehat{C}V$$
$$C\widehat{D}E < C\widehat{D}V + E\widehat{D}V$$
$$A\widehat{E}D < A\widehat{E}V + D\widehat{E}V,$$

dalle quali, si ricava, indicando con S la somma degli angoli del poligono,

$$S < B\widehat{A}V + A\widehat{B}V + B\widehat{C}V + C\widehat{B}V + C\widehat{D}V + D\widehat{C}V + E\widehat{D}V + D\widehat{E}V + A\widehat{E}V + E\widehat{A}V.$$

Ora, siccome abbiamo visto che S, aumentata di due angoli piatti, è eguale al secondo membro della precedente disuguaglianza, aumentato della somma delle facce dell'angoloide, così la somma delle facce dell'angoloide dev'essere necessariamente minore di due angoli piatti.

**116. Definizione.** — Se dal vertice di un angoloide convesso si conducono delle semirette perpendicolari alle successive facce, e situate dalla medesima parte degli spigoli dell'angoloide rispetto al piano della faccia stessa, le semirette così ottenute, prese nello stesso ordine delle facce, a cui sono perpendicolari, individuano un nuovo angoloide, che si dice *supplementare* del primo.

**Teorema.** — *Se un angoloide è supplementare di un altro, questo è anche supplementare del primo.*

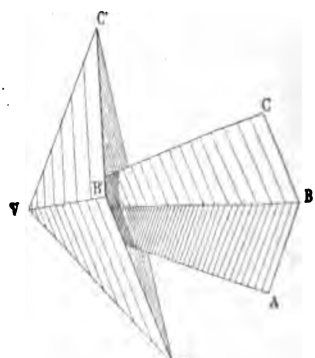



Fig. 101.

Sia per es. il triedro V.A'B'C' supplementare del triedro V.ABC (fig. 101). Dico che V.ABC è il supplementare di V.A'B'C'. Infatti, essendo la semiretta VB' perpendicolare al piano AVC, VB' è perpendicolare alla retta VA contenuta in quel piano, e per la stessa ragione VC' è perpendicolare a VA. Per conseguenza VA, essendo perpendicolare tanto a VB', quanto a VC', è perpendicolare al piano di queste due rette, ossia alla faccia B'VC' (§ 60 Cor. 1°).

Nello stesso modo si dimostra che tutti gli spigoli VA, VB, VC del primo angoloide V.ABC sono perpendicolari alle facce dell'altro.

Inoltre gli spigoli VB, VB', essendo rispettivamente perpendicolari

alle facce $A'\widehat{VC}'$, $A\widehat{VC}$ e dalla stessa parte della faccia $A\widehat{VC}$, saranno pure dalla stessa parte rispetto alla faccia $A'\widehat{VC}'$ (§ 71 Cor. 2°). Lo stesso potendosi ripetere per tutti gli spigoli, il teorema resta dimostrato.

**117. Teorema.** — *Se due angoloidi sono supplementari, le facce dell'uno sono supplementari dei rettilinei dei diedri dell'altro.*

Siano per es. $V\widehat{.ABC}$, $V\widehat{.A'B'C'}$ due triedri supplementari (fig. 101). Gli spigoli $VB'$, $VC'$, essendo perpendicolari alle facce $A\widehat{VC}$, $A\widehat{VB}$ del diedro $\widehat{VA}$, l'angolo $B'\widehat{VC}'$ è supplementare del rettilineo del diedro $\widehat{VA}$ (§ 71 Cor. 1°). Analogamente si dimostra che le altre facce del triedro $V\widehat{.A'B'C'}$ o $V\widehat{.ABC}$ sono supplementari dei rettilinei degli altri diedri del triedro $V.\widehat{ABC}$ o $V.\widehat{A'B'C'}$ rispettivamente. Lo stesso ragionamento può ripetersi per due angoloidi supplementari di un numero qualunque di facce.

**118. Teorema.** — *In ogni angoloide convesso:*

*1° un diedro, aumentato di tanti diedri piatti quante sono le facce meno due, è maggiore della somma degli altri diedri.*

*2° la somma di tutti i diedri è minore di tanti diedri piatti quante sono le facce, ed è maggiore di tanti diedri piatti quante sono le facce meno due.*

1°. Indichiamo per brevità con $A, B, C, D, \ldots$ gli $n$ diedri dell'angoloide V dato, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ i loro rettilinei, con $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \ldots$ i supplementi di questi rettilinei, ossia le facce dell'angoloide V', supplementare dell'angoloide dato, con $p$ un angolo piatto e con $\pi$ un diedro piatto. Nell'angoloide supplementare V' una faccia è minore della somma di tutte le altre, e quindi

$$\alpha' < \beta' + \gamma' + \delta' + \ldots,$$

da cui, aggiungendo ad ambo i membri la somma delle facce dell'angoloide V, si ottiene

$$\alpha' + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots < \alpha + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') + (\delta + \delta') + \ldots.,$$

ossia, essendo

$$\alpha + \alpha' \equiv \beta + \beta' \equiv \gamma + \gamma' \equiv \delta + \delta' \equiv \ldots \equiv p,$$

si ha

$$p + \beta + \gamma + \delta + \ldots < \alpha + (n-1)p,$$

e quindi

$$\beta + \gamma + \delta + \ldots < \alpha + (n-2)p.$$

Passando dai rettilinei ai diedri corrispondenti, si ha infine

$$B + C + D + \ldots < A + (n-2)\pi.$$

2°. Nello stesso angoloide V', supplementare di V, la somma delle facce è minore di due angoli piatti, cioè

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \ldots < 2p,$$

e perciò

$$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') + (\delta + \delta') + \ldots < 2p + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots,$$

ossia

$$n.p < 2p + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$$

e quindi

$$(n-2).p < \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$$

Passando dai rettilinei ai diedri corrispondenti

$$(n-2)\pi < A + B + C + D + \ldots$$

È poi evidente che, essendo ogni diedro del dato angoloide minore di un diedro piatto, si ha

$$A + B + C + D + \ldots < n.\pi.$$

**Corollario.** — *In ogni triedro:*

*1° ciascun diedro, aumentato di un diedro piatto, è maggiore della somma degli altri due.*

*2° la somma dei diedri è maggiore di uno, e minore di tre diedri piatti.*

*3° la differenza di due diedri è minore del diedro esterno conseguente al terzo.*

**119. Teorema.** — *In ogni angoloide convesso la somma dei diedri esterni, formati da ciascuna faccia col prolungamento della seguente, è minore di due diedri piatti.*

Infatti, la somma di ogni diedro esterno dell'angoloide col suo conseguente interno è eguale a un diedro piatto; perciò la somma di tutti i diedri interni ed esterni dell'angoloide è eguale a tanti diedri piatti quante sono le facce; ma la somma dei diedri interni si è dimostrata maggiore di tanti diedri piatti quante sono le facce meno due, dunque la somma dei diedri esterni dev'essere minore di due diedri piatti.

**Corollario.** — *Un angoloide convesso non può avere più di tre diedri acuti.*

## EGUAGLIANZA DI TRIEDRI E ANGOLOIDI.

**120. Teoremi.** — *1°. Se due triedri hanno una faccia eguale e i due diedri adiacenti rispettivamente eguali, sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.*

Sieno $\widehat{V}$, $\widehat{V'}$ due triedri aventi $A\widehat{V}B \equiv A'\widehat{V'}B'$, $\widehat{VA} \equiv \widehat{V'A'}$, $\widehat{VB} \equiv \widehat{V'B'}$. Se questi elementi sono disposti nello stesso modo, portando il secondo triedro sul primo, in maniera che la faccia $A'\widehat{V'}B'$ coincida colla faccia eguale $A\widehat{V}B$, le facce $A'\widehat{V'}C'$, $B'\widehat{V'}C'$ si disporranno sui piani AVC, BVC rispettivamente, e perciò lo spigolo V'C' verrà a coincidere collo spigolo VC, di guisa che i due triedri coincideranno; dunque sono eguali.

Se invece i suddetti elementi sono disposti in ordine inverso, si dimostra nello stesso modo, che il triedro $\widehat{V'}$ può portarsi a coincidere con quello opposto al vertice di $\widehat{V}$.

In ambedue i casi si ha $\widehat{V'C'} \equiv \widehat{VC}$, $A'\widehat{V'}C' \equiv A\widehat{V}C$, $B'\widehat{V'}C' \equiv B\widehat{V}C$.

*2°. Se due triedri hanno un diedro eguale, compreso tra facce rispettivamente eguali, sono eguali, oppure l'uno è eguale all'opposto del vertice dell'altro.*

Infatti, sieno $\widehat{V}$ e $\widehat{V'}$ i triedri dati, e $\widehat{T}$, $\widehat{T'}$ i triedri supplementari ad essi. Per le proprietà dei triedri supplementari sappiamo che a facce eguali di $\widehat{V}$ e $\widehat{V'}$ corrispondono diedri eguali di $\widehat{T}$ e $\widehat{T'}$, e viceversa;

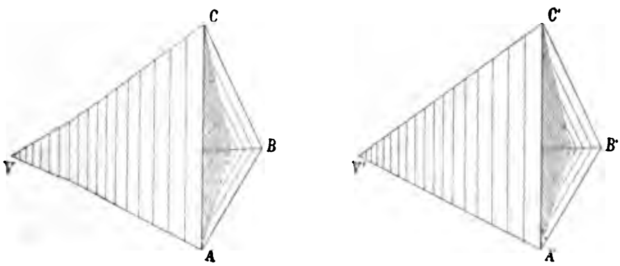



Fig. 102.

per conseguenza i due triedri supplementari, avendo eguali rispettivamente due diedri e la faccia ad essi adiacente, pel teorema precedente avranno anche tutti gli altri elementi rispettivamente eguali; ed allora anche i triedri dati avranno tutti i loro elementi ordinatamente eguali e saranno eguali, o l'uno eguale all'opposto al vertice dell'altro.

**121. Teoremi.** — *1°. Due diedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro, se hanno due facce e il diedro opposto ad una di esse rispettivamente eguali, purchè i diedri opposti alle altre due facce eguali sieno ambedue acuti, o ambedue retti, o ambedue ottusi, e gli spigoli comuni alle facce eguali non sieno perpendicolari alle rimanenti facce.*

Nei due triedri $\widehat{V}.ABC$, e $\widehat{V'}.A'B'C'$ sia $A\widehat{V}B = A'\widehat{V'}B'$, $B\widehat{V}C = B'\widehat{V'}C'$; $\widehat{VA} = \widehat{V'A'}$. Io dico che i due triedri sono eguali o simmetrici, purchè i diedri $\widehat{VC}$, $\widehat{V'C'}$ opposti alle facce eguali $A\widehat{V}B$, $A'\widehat{V'}B'$ sieno della me-

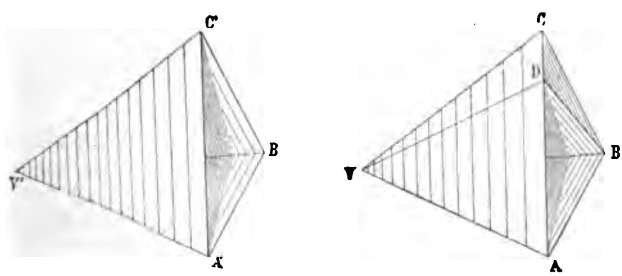



Fig. 103.

desima specie, e gli spigoli VB, V'B' non sieno perpendicolari alle facce $A\widehat{V}C$, $A'\widehat{V'}C'$ rispettivamente.

Se gli elementi dei due triedri sono egualmente disposti, portiamo

la faccia $A'\widehat{V'}B'$ a coincidere colla sua eguale $A\widehat{V}B$, in modo che lo spigolo V'A' venga a coincidere collo spigolo VA e lo spigolo V'B' con VB. Poichè i diedri $\widehat{VA}$, $\widehat{V'A'}$ sono eguali e gli elementi sono disposti nello stesso modo, la faccia $A'\widehat{V'}C'$ si disporrà sul semipiano AVC. Devo dimostrare che lo spigolo V'C' viene a coincidere con VC. Se infatti esso prendesse una posizione diversa VD, si otterrebbe un triedro $\widehat{V.BCD}$ isoedro, nel quale sarebbe il diedro $B\widehat{VC}D$ eguale al diedro $C\widehat{VD}B$, e perciò supplementare di AVDB; ma i due diedri $B\widehat{VC}D$, $A\widehat{VD}B$ sono per ipotesi della stessa specie, quindi per essere supplementari dovrebbero essere retti. Allora i piani delle due facce $D\widehat{V}B$, $C\widehat{V}B$, entrambi perpendicolari al piano della faccia $A\widehat{V}C$, si taglierebbero secondo una retta VB perpendicolare a questo piano (§ 65 Cor.) ciò che è contrario alla ipotesi.

Se gli elementi eguali dei due triedri non fossero disposti nello stesso modo, si dimostrerebbe, con ragionamento analogo, che il triedro $\widehat{V'}$ è eguale all'opposto al vertice del triedro $\widehat{V}$.

In ambedue i casi è $A\widehat{V}C \equiv A'\widehat{V'}C'$, $\widehat{VB} \equiv \widehat{V'B'}$, $\widehat{VC} \equiv \widehat{V'C'}$.

2°. *Due triedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro, se hanno due diedri e la faccia opposta ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè le facce opposte agli altri due diedri eguali sieno della stessa specie, e le facce comuni ai diedri eguali non sieno perpendicolari ai rimanenti spigoli.*

Dimostrazione simile a quella fatta per il teorema 2° del § precedente.

**122. Teorema** *1°. — Se due facce di un triedro sono rispettivamente eguali a due facce di un altro triedro, e il diedro compreso fra le due facce del primo è maggiore di quello compreso fra le facce eguali del secondo, la terza faccia del primo triedro è maggiore della terza faccia del secondo.*

Le due facce $B\widehat{V}C$, $A\widehat{V}B$ del triedro $\widehat{V}$ (fig. 104) sieno rispettivamente eguali alle facce $B'\widehat{V'}C'$, $A'\widehat{V'}B'$ del triedro $\widehat{V'}$, ma sia il diedro $\widehat{VB}$ maggiore del diedro $\widehat{V'B'}$; dico che la faccia $A\widehat{V}C$ è maggiore della faccia $A'\widehat{V'}C'$.

Supposto che gli elementi dei due triedri siano disposti in ordine inverso, portiamo la faccia $A'\widehat{V'}B'$ a coincidere colla faccia eguale $A\widehat{V}B$, in modo che i due triedri giacciano da parti opposte della faccia comune. Nel caso in cui gli elementi fossero disposti nello stesso ordine, possiamo considerare uno dei triedri dati e l'opposto al vertice dell'altro e ripetere la stessa costruzione.

Conduciamo il piano BVD bisettore del diedro $CV\widehat{BC_1}$, il quale si troverà nell'interno del diedro $AB\widehat{V}C$ maggiore di $AB\widehat{V}C_1$, e taglierà perciò la faccia $A\widehat{V}C$ secondo una semiretta VD. I due triedri $\widehat{V.BDC}$ $\widehat{V.BDC_1}$, avendo un diedro eguale compreso tra facce rispettivamente

eguali, hanno anche le facce $C\widehat{V}D, C_1\widehat{V}D$ eguali. Dal triedro $V.\widehat{ADC_1}$ poi si ha (§ 114 Teor.) $AVC_1 < AVD + DVC_1$, e quindi

$$A\widehat{V}C_1 < A\widehat{V}D + D\widehat{V}C,$$

ossia

$$A\widehat{V}C_1 < A\widehat{V}C.$$

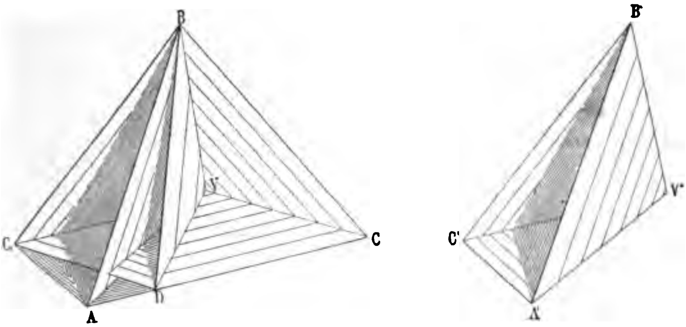



Fig. 104.

**Corollario 1°.** — *Se un triedro ha due facce rispettivamente eguali a due facce di un altro, il diedro compreso fra le due facce del primo triedro è maggiore, eguale, o minore di quello compreso fra le due facce dell'altro, secondo che la terza faccia del primo triedro è maggiore, eguale, o minore della terza faccia dell'altro triedro.*

Infatti abbiamo dimostrato che, se un triedro ha due facce rispettivamente eguali a quelle di un altro, la terza faccia del primo è maggiore, eguale, o minore della terza faccia dell'altro, secondo che il diedro compreso fra le due facce suddette del primo è maggiore, eguale, o minore del diedro compreso fra le due facce del secondo; ne segue (Preliminari, § 4) che i teoremi inversi sono veri.

**Teorema 2°.** — *Se due diedri di un triedro sono rispettivamente eguali a due diedri di un altro triedro, e la faccia adiacente ai due diedri del primo è maggiore di quella adiacente ai due diedri del secondo, il terzo diedro del primo triedro è maggiore del terzo diedro del secondo.*

Dimostrazione simile a quella del Teor. 2° del § 120.

**Corollario 2°.** — *Se un triedro ha due diedri rispettivamente eguali a due diedri di un altro, la faccia adiacente ai due diedri del primo triedro è maggiore, eguale o minore di quella adiacente ai due diedri dell'altro, secondo che il terzo diedro del primo è maggiore, eguale, o minore del terzo diedro dell'altro triedro.*

Dimostrazione simile a quella del corollario precedente.

**123. Teoremi.** — *1°. Due triedri, aventi le tre facce rispettivamente eguali, sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.*

Infatti, (§ 122 Cor. 1°) se due triedri hanno le facce rispettivamente eguali, esse hanno pure eguali i diedri opposti alle facce eguali, e perciò sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.

2°. *Due triedri aventi i tre diedri rispettivamente eguali sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.*

Dimostrazione simile a quella del Teor. 2° del § 120.

**124.** Abbiamo veduto che in vari casi basta conoscere l'eguaglianza di tre elementi di due triedri, per asserire che sono pure eguali gli altri elementi. Tutti questi casi si possono riassumere nel seguente enunciato:

*Due triedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro:*
*1° se hanno una faccia e i due diedri adiacenti rispettivamente eguali;*
*2° se hanno un diedro eguale compreso tra facce eguali;*
*3° se hanno due facce e il diedro opposto ad una di esse, rispettivamente eguali, purchè i diedri opposti alle altre due facce eguali sieno della stessa specie, e gli spigoli comuni alle facce eguali non sieno perpendicolari alle rimanenti facce;*
*4° se hanno due diedri e la faccia opposta ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè le facce opposte agli altri due diedri eguali sieno della stessa specie, e le facce comuni ai diedri eguali non sieno perpendicolari ai rimanenti spigoli;*
*5° se hanno le tre facce rispettivamente eguali;*
*6° se hanno i tre diedri rispettivamente eguali.*

In generale si può dire che due triedri sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro, quando hanno tre elementi rispettivamente eguali, non dimenticando però le condizioni che si debbono aggiungere per il 3° e 4° caso.

**125. Teorema.** — *Due angoloidi convessi di* n *facce sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto vertice dell'altro:*
*1° se hanno* n — 1 *facce rispettivamente eguali, ed hanno eguali i diedri compresi tra le facce eguali;*
*2° se hanno* n — 1 *diedri rispettivamente eguali, ed hanno eguali le facce aventi per lati gli spigoli dei diedri eguali;*
*3° se hanno tutte le facce ed* n — 3 *diedri consecutivi, compresi tra facce eguali, rispettivamente eguali;*
*4° se hanno tutti i diedri ed* n — 3 *facce consecutive, adiacenti a diedri eguali, rispettivamente eguali.*

Le dimostrazioni dei primi tre casi sono simili a quelle dei teoremi analoghi relativi ai poligoni (§§ 92, 93, 94). L'ultimo caso poi si ricava dal precedente mediante la considerazione degli angoloidi supplementari.

## COSTRUZIONI DI TRIEDRI E ANGOLOIDI.

**126.** Nei §§ precedenti abbiamo veduto che in vari casi due triedri sono eguali, quando hanno tre elementi rispettivamente eguali e disposti nello stesso modo.

Per esempio, abbiamo visto che due triedri sono eguali, se hanno due facce e il diedro compreso rispettivamente eguali, e similmente disposti. Ciò vuol dire che, se riusciamo a costruire un triedro, che abbia due facce e il diedro compreso rispettivamente eguali a due angoli e ad un diedro convessi dati, e disposti in un dato modo, tutti gli altri triedri, costruiti con gli stessi elementi disposti nello stesso modo, sono eguali al primo. Lo stesso può ripetersi per gli altri casi di eguaglianza dei triedri.

Vediamo ora come si può costruire un triedro con tre elementi dati, disposti in un certo ordine.

**Problemi.** — *1°. Costruire un triedro, che abbia gli elementi disposti in un certo ordine, ed abbia due facce e il diedro compreso rispettivamente eguali a due angoli e ad un diedro convesso dato.*

*2°. Costruire un triedro, che abbia i suoi elementi disposti in un dato modo, ed abbia una faccia e i due diedri adiacenti rispettivamente eguali a un angolo e a due diedri convessi dati.*

Lasciamo al lettore la facile risoluzione di questi due problemi.

**127.** — *3°. Costruire un triedro, che abbia le sue facce disposte in un dato modo ed eguali a tre angoli convessi dati, tali che la loro somma sia minore di due angoli piatti, e che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due.*

Sappiamo che, affinchè tre angoli sieno facce di un triedro, è necessario che la loro somma sia minore di due angoli piatti, e che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due; ora faremo vedere che queste condizioni sono anche sufficienti.

In un piano $\alpha$ (fig. 105) prendiamo tre angoli consecutivi $A'\widehat{V}B$, $B\widehat{V}C$, $C\widehat{V}A''$ rispettivamente eguali ai tre angoli dati, in modo che quello intermedio $B\widehat{V}C$ non sia minore di alcuno degli altri due. Ammettendo che sia $B\widehat{V}C < A'\widehat{V}B + C\widehat{V}A''$, è evidente che ciascuno dei due angoli $A'\widehat{V}B$, $C\widehat{V}A''$ è minore della somma degli altri. Ammettendo inoltre che la somma dei tre angoli sia minore di due angoli piatti, è chiaro che questa somma sarà un angolo concavo o convesso $A'\widehat{V}A''$, ma non ricoprirà l'intiero piano, cioè non conterrà alcun giro.

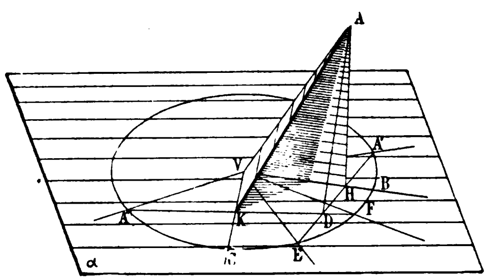


Fig. 105.

Nello stesso piano conduciamo una semiretta VE, dalla parte opposta di VA' rispetto alla retta VB, in modo che gli angoli $A'\widehat{V}B$, $B\widehat{V}E$ sieno eguali, ed una semiretta VF, dalla parte opposta di VA'' rispetto alla retta VC, in modo che gli angoli $A''\widehat{V}C$, $C\widehat{V}F$, sieno eguali. Per le ipotesi fatte, essendo l'angolo $B\widehat{V}C$ non minore di ciascuno degli altri due angoli $B\widehat{V}E$, $C\widehat{V}F$, la semiretta VE

è interna all'angolo $B\widehat{V}C$, o coincide con VC, e la semiretta VF è pure interna dell'angolo $B\widehat{V}C$, o coincide con VB.

Inoltre, essendo $B\widehat{V}C < B\widehat{V}E + C\widehat{V}F$, è chiaro che le semirette VF, VC debbono trovarsi da parti opposte della retta VE, e le semirette VE, VB devono trovarsi da parti opposte della retta VF.

Nel piano $\alpha$ con raggio arbitrario descriviamo ora un circolo, il quale incontri le semirette VA′, VB, VF, VE, VC, VA″ nei punti A′, B, F, E, C, A″, disposti nell'ordine scritto. Ne segue che i punti A′, E sono situati da parte opposta della retta A″F, e i punti A″, F sono da parti opposte della retta A′E, e perciò i due segmenti A′E, FA″ hanno un punto comune D. Si osservi ancora che i due triangoli $A'\widehat{V}E$, $F\widehat{V}A''$ sono isosceli, quindi le semirette VB, VC, bisettrici degli angoli $A'\widehat{V}E$, $F\widehat{V}A''$, risultano perpendicolari ai segmenti A′E, FA″ e li dividono per metà nei punti H, K (§ 77 Teor.)

Per il punto D si elevi la retta DA, perpendicolare al piano $\alpha$, e nel piano $\beta$, individuato dalle rette DA, DA″, il quale è perpendicolare al piano $\alpha$ (§ 64), descriviamo un circolo col centro in K e con raggio $KA'' \equiv KF$. La retta DA, avendo un punto D interno a questo circolo, lo taglierà in due punti A, $A_1$ situati da parti opposte del piano $\alpha$. Condotte le semirette VA, $VA_1$ si ottengono due triedri $V\widehat{.ABC}$, $V\widehat{.A_1BC}$, ciascuno dei quali è eguale all'opposto al vertice dell'altro, che hanno per facce i tre angoli dati, di guisa che uno di essi sarà il triedro domandato.

Consideriamo infatti uno di essi $V\widehat{.ABC}$. I due triangoli VAK, VA″K hanno gli angoli $V\widehat{K}A$, $V\widehat{K}A''$ retti, perchè la retta VK, perpendicolare alla retta A″D, intersezione del piano $\alpha$ col piano ADA″ ad esso perpendicolare, è pure perpendicolare al piano ADA″ (§ 65 Teor.); hanno il cateto VK comune e i cateti KA, KA″ eguali; ne segue che è $A\widehat{V}K \equiv K\widehat{V}A''$ e $VA'' \equiv VA$.

Analogamente i triangoli AVH, A′VH sono eguali, perchè hanno gli angoli $V\widehat{H}A$, $V\widehat{H}A'$ retti, il cateto VH comune, e le ipotenuse VA, VA′ eguali ambedue a VA″, perciò è $A\widehat{V}H \equiv H\widehat{V}A'$.

**Corollari.** — *1°. È sempre possibile costruire un triedro avente le facce eguali fra loro, purchè la loro somma sia minore di due angoli piatti.*

*2°. È sempre possibile costruire un triedro avente per facce tre angoli retti.*

**Definizione.** — Un triedro, avente per facce tre angoli retti, dicesi *trirettangolo.*

I diedri di un triedro trirettangolo sono retti. Un triedro trirettangolo coincide col suo supplementare.

**128. Problema** 4°. — *Costruire un triedro che abbia i suoi diedri disposti in un dato modo ed eguali a tre diedri convessi dati, tali che la loro somma sia maggiore di un diedro piatto, e che ognuno di essi, aumentato di un diedro piatto, sia maggiore della somma degli altri due.*

Vedemmo già (§ 118) che, se tre diedri appartengono ad un triedro, è necessario che sieno verificate le condizioni suddette. Dimostreremo ora che tali condizioni sono anche sufficienti.

Pertanto sieno $\alpha, \beta, \gamma$ i rettilinei dei diedri dati, $\alpha', \beta', \gamma'$ i loro supplementi, e sia $p$ un angolo piatto. Si ha per ipotesi

$$\alpha + \beta + \gamma > p$$
$$\alpha + p > \beta + \gamma$$
$$\beta + p > \gamma + \alpha$$
$$\gamma + p > \alpha + \beta.$$

Dalla prima diseguaglianza si ricava

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' > p + \alpha' + \beta' + \gamma';$$

e siccome

$$\alpha + \alpha' \equiv p, \quad \beta + \beta' \equiv p, \quad \gamma + \gamma' \equiv p,$$

si ha

$$3p > p + \alpha' + \beta' + \gamma';$$

ossia

$$2p > \alpha' + \beta' + \gamma' \dots . \qquad (1)$$

Dalla seconda diseguaglianza si ricava pure

$$\alpha + \alpha' + \beta' + \gamma' + p > \alpha' + \beta' + \beta + \gamma' + \gamma,$$

ossia

$$2p + \beta' + \gamma' > 2p + \alpha',$$

ossia

$$\beta' + \gamma' > \alpha'. \qquad (2)$$

Analogamente dalle altre due si ricava

$$\gamma' + \alpha' > \beta', \qquad (3)$$
$$\alpha' + \beta' > \gamma'. \qquad (4)$$

Ma le disuguaglianze (1), (2), (3), (4) sono le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè $\alpha', \beta', \gamma'$ sieno le facce di un triedro; dunque potremo, applicando la costruzione del § precedente, costruire due triedri, ciascuno eguale all'opposto al vertice dell'altro, che abbiano le facce eguali ad $\alpha', \beta', \gamma'$. Il supplementare di uno di essi sarà il triedro domandato.

**129.** Abbiamo veduto come si possa costruire un triedro, del quale si conoscano tre elementi. In pratica però occorre più spesso di ricavare, per mezzo di costruzioni da eseguirsi in un piano, gli elementi incogniti di un triedro dagli elementi cogniti. Eccone un esempio.

**Problema 5°.** — *Date le tre facce di un triedro, determinare per mezzo di costruzioni piane, i rettilinei dei suoi tre diedri.*

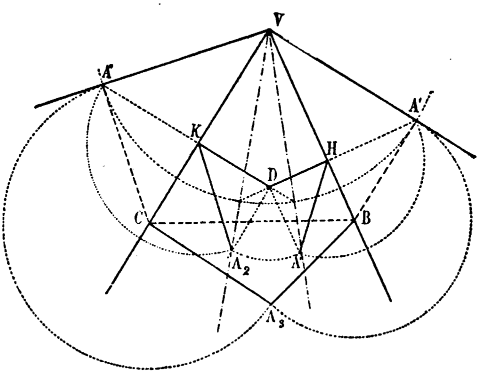


Fig. 106.

Su di un piano riportiamo tre angoli $A'\widehat{V}B$, $B\widehat{V}C$, $C\widehat{V}A''$ consecutivi eguali alle tre facce del triedro, le quali supponiamo che soddisfino alle note condizioni, disponendole in modo che l'angolo intermedio $B\widehat{V}C$ sia non minore di ciascuno degli altri due. Sulle semirette VA', VA'' prendiamo

due segmenti VA′ VA″ eguali fra loro, e conduciamo per A′ una retta A′H perpendicolare alla VB e per A″ una retta A″K perpendicolare alla VC; per il punto d'incontro D di queste perpendicolari conduciamo una retta $DA_1$ perpendicolare ad A′D, ossia parallela a VB, ed una retta $DA_2$ perpendicolare alla A″D, ossia parallela alla VC. Preso come centro il punto H si descriva con raggio HA′ un circolo, e sia $A_1$ uno dei punti d'incontro di esso colla $DA_1$. Preso poi come centro il punto K si descriva con raggio KA″ un altro circolo e sia $A_2$ uno dei punti d'incontro di esso colla $DA_2$. Gli angoli $D\widehat{H}A_1$, $D\widehat{K}A_2$ sono i rettilinei dei diedri, che hanno per costola VB e VC rispettivamente. Ciò apparisce evidente, se si riflette che la costruzione indicata non è altro che quella del § 127, quando in esso (fig. 105) si supponga di far ruotare i piani HDA, KDA attorno alle rette A′D, A″D, finchè vengano a coincidere col piano $\alpha$.

Per determinare il rettilineo del terzo diedro, per i punti A′, A″ si conducano le rette A′B, A″C rispettivamente perpendicolari alle rette VA′, VA″, e si costruisca un triangolo $BCA_3$ che abbia per lati i segmenti BC, BA′, CA″. È facile dimostrare che l'angolo $B\widehat{A_3}C$ è il rettilineo del diedro che ha per costola VA.

Questa costruzione cade in difetto, se uno o ambedue gli angoli $A'\widehat{V}B$, $A''\widehat{V}C$ sono retti. Lasciamo al lettore lo studio di questo caso.

**130. Problema.** — *Costruire un angoloide, che abbia i suoi elementi disposti in un certo ordine, e di cui si conoscano le facce e i diedri eccetto:*
*1° due diedri e la faccia compresa;*
*2° due facce e il diedro compreso;*
*3° tre diedri consecutivi:*
*4° tre facce consecutive.*

La risoluzione dei primi tre problemi si riduce alla costruzione successiva di angoli e diedri eguali rispettivamente ad angoli e diedri dati. La risoluzione dell'ultimo si fa dipendere da quella del precedente per mezzo della considerazione dei triedri supplementari.

**Corollario.** — *È sempre possibile costruire un angoloide, avente le facce eguali fra loro, purchè la loro somma sia minore di due angoli piatti.*

# CAPITOLO III

## Poliedri.

**131. Definizioni.** — 1ª. La figura individuata da quattro punti, non situati in un piano, e dai quattro triangoli, che hanno per vertici i detti punti, presi tre a tre, dicesi *tetraedro*.

Per es. la fig. 107 rappresenta un tetraedro.

2ª. I quattro punti dati A, B, C, D e i quattro triangoli, che hanno per vertici quei punti, si dicono rispettivamente *vertici* e *facce* del tetraedro. I piani, le rette, i lati delle facce si dicono i *piani, le rette, gli spigoli* (*o costole*) del tetraedro.

3ª. La superficie formata dalle facce chiamasi *superficie* del tetraedro.

4ª. Un vertice e la faccia individuata dagli altri tre vertici si dicono *opposti*. Due spigoli, che non hanno un vertice comune, si dicono *opposti*.

5ª. Il segmento di perpendicolare, condotta da un vertice sul piano della faccia opposta, compreso fra questo punto e il piano, dicesi *altezza*.

Da quanto abbiamo detto risulta che il tetraedro ha quattro vertici, quattro facce, sei spigoli (o costole), e quattro altezze. In ogni vertice del tetraedro concorrono tre spigoli. Un tetraedro si nomina con le quattro lettere dei vertici.

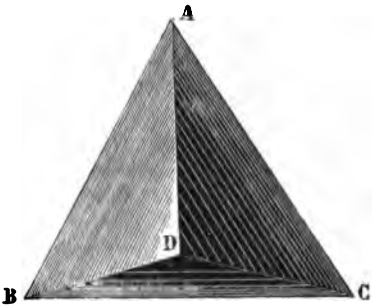


Fig. 107.

**Teorema.** — *La superficie di un tetraedro è una superficie completa.*

Infatti dal P. IV, 3° deriva che, se una superficie incompleta ha i suoi limiti sopra una superficie completa, essa suddivide in due quella delle parti dello spazio (separate dall'altra superficie) nella quale è contenuta. Dato dunque il tetraedro ABCD (fig. 107), la superficie formata dai tre angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAB}$ divide lo spazio in due parti, una delle quali è il triedro $A\widehat{.}BCD$; e il triangolo DBC, che ha i lati sulla superficie del triedro convesso A.BCD, e che perciò (§ 111 Cor. 2°) è interno ad esso, divide questo triedro in due parti. Una di queste parti è limitata dalla superficie dal tetraedro.

**Definizione** 6ª. — La parte di spazio, limitata dalla superficie di un tetraedro, dicesi *solido del tetraedro*, o semplicemente *tetraedro*.

**132.** Il piano individuato da tre punti B′, C′, D′, presi sugli spigoli AB, AC, AD, concorrenti in un vertice di un tetraedro ABCD, divide il tetraedro dato in due parti, delle quali una, ossia A . B′C′D′, è un nuovo tetraedro, e l'altra è una figura limitata da cinque poligoni piani. Ripetendo questa costruzione più volte si vede chiaramente la possibilità dell'esistenza di figure formate da più di tre poligoni situati in piani diversi, e in modo che ciascun lato sia comune a due di essi.

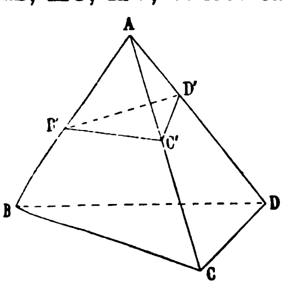


Fig. 108.

**Definizioni.** — 1ª. Dicesi *poliedro* la figura determinata da più di tre poligoni situati in piani diversi, e in modo che ciascun lato sia comune a due di essi.

2ª. I poligoni, che formano un poliedro, si dicono *facce*, e la superficie formata dalle facce dicesi *superficie* del poliedro.

3ª. Le rette, i piani, i vertici, i lati delle facce si dicono le *rette*, i *piani*, i *vertici*, gli *spigoli* (o *costole*) del poliedro.

4ª. Chiamansi *diagonali* i segmenti che hanno per estremi due vertici non situati sopra una medesima faccia.

5ª. Un poliedro prende il nome di *pentaedro, esaedro, eptaedro, ottaedro, ennaedro. decaedro,.... dodecaedro,.... icosaedro,....* secondo che ha 5, 6, 7, 8, 9, 10,.... 12,.... 20.... facce.

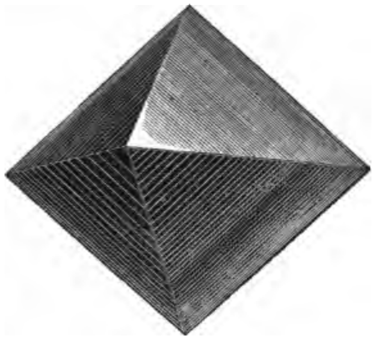


Fig. 109.

Per esempio, la fig. 109 rappresenta un ottaedro. Un poliedro si nomina per mezzo delle lettere che ne indicano i vertici.

6ª. Un poliedro si dice *convesso*, se ha tutti i suoi vertici situati da una medesima parte di uno qualunque dei suoi piani; *concavo* nel caso contrario. Un poliedro si dice *intrecciato*, se è intrecciata qualcuna delle sue facce.

È chiaro che un poliedro intrecciato è sempre anche concavo.

**133. Teorema.** — *La superficie di un poliedro convesso è una superficie completa.*

Si dimostra come l'analogo teorema sugli angoloidi.

Risulta dal teorema precedente che ogni superficie poliedrica convessa limita una parte dello spazio, di guisa che ogni linea che congiunga un punto interno ad essa con uno esterno, deve incontrare la superficie almeno in un punto. Pertanto si suol dire che una superficie poliedrica convessa è una *superficie chiusa.*

**Definizioni.** — 1ª. Ogni diedro convesso, il cui spigolo coincide con una delle rette del poliedro convesso, le cui facce contengono due facce consecutive del poliedro, si chiama *un diedro interno*, o semplicemente *diedro del poliedro.*

2ª. Chiamasi *solido di un poliedro convesso* o semplicemente *poliedro convesso* quella delle due parti, in cui lo spazio è diviso dalla superficie, che è interna a tutti i diedri del poliedro.

3ª. Ogni angoloide, avente per vertice un vertice del poliedro convesso, e le cui facce contengono le facce del poliedro, che hanno il vertice in quel punto, si chiama *un angoloide del poliedro.*

4ª. Una parte della superficie di un poliedro convesso dicesi *superficie poliedrica convessa aperta*, e valgono per essa tutte le definizioni date per le superficie poliedriche chiuse.

**134. Teoremi.** — *1°. Se una retta ha un punto interno ad un poliedro non intrecciato, deve tagliarne la superficie almeno in due punti.*

*2°. Una retta non può incontrare la superficie di un poliedro convesso in più di due punti.*

Si dimostrano questi teoremi come i teoremi analoghi relativi ai poligoni (§ 80).

**135. Definizione.** — In un poliedro qualunque possiamo scomporre ogni faccia, che non sia un triangolo, in varî triangoli per mezzo delle diagonali della faccia stessa, passanti per un vertice. Pensando a ciò, si vede che un poliedro si può considerare come una figura formata da tanti triangoli, disposti in modo che ogni lato sia comune a due di essi, di guisa che col loro insieme formino una superficie com-

pleta, potendo alcuni triangoli consecutivi essere in un piano. Chiameremo *rete di triangoli* un poliedro considerato sotto questo nuovo aspetto, e chiameremo anche in questo caso *facce, spigoli, vertici*, i triangoli che lo formano e i lati e vertici di essi triangoli.

**Teorema.** — *In una rete di triangoli il doppio del numero dei vertici supera di 4 il numero delle facce.*

Indichiamo con F, V i numeri delle facce e dei vertici di una rete di triangoli. Si vuol dimostrare che è

$$2V - F = 4 \ldots. \qquad (1)$$

Infatti, se dalla rete di triangoli togliamo un vertice con le $f$ facce triangolari che vi si riuniscono, e nel poligono (piano o gobbo) formato dalle basi di questi triangoli conduciamo da uno qualunque dei suoi vertici le $f-3$ diagonali, otterremo una nuova rete di triangoli avente $V-1$ vertici e $F-2$ facce. La differenza fra i numeri $2(V-1)$ e $F-2$ essendo eguale a quella fra i numeri 2V ed F, possiamo dire che la differenza fra il doppio del numero dei vertici e il numero delle facce della data rete si mantiene costante per tutte le reti, che da essa si possono ricavare, applicandovi successivamente la costruzione precedente. Ora è chiaro che, applicando un numero sufficiente di volte questa costruzione, potremo giungere ad un tetraedro, nel quale, essendo $V = F = 4$, si ha $2V - F = 4$. Perciò questa proprietà sussiste per una rete di triangoli qualunque.

**136. Teoremi** *1°.* — *Se tutte le facce di un poliedro sono poligoni di* m *lati, il doppio del numero delle costole del poliedro è eguale a* m *volte il numero delle facce.*

Infatti, ogni faccia contenendo $m$ spigoli, ed ognuno di questi appartenendo a due facce, è evidente che, essendo F il numero delle facce e C quello degli spigoli del poliedro, si deve avere

$$mF = 2C.$$

*2°. Se tutti gli angoloidi di un poliedro hanno* n *spigoli, il doppio del numero delle costole del poliedro è eguale a* n *volte il numero dei vertici.*

Indicando con V il numero dei vertici e con C il numero delle costole del poliedro, si dimostra, come per il Teorema precedente che

$$nF = 2C.$$

**Corollario.** — *In una rete di triangoli il doppio del numero delle costole è eguale al triplo del numero delle facce, ossia* $2C = 3F$.

**137. Teorema (di Eulero).** — *In un poliedro qualunque il numero dei vertici, aumentato del numero delle facce, supera di due il numero degli spigoli.*

Infatti, addizionando membro a membro le eguaglianze

$$2V - F = 4, \quad 3F = 2C,$$

date dai due teoremi precedenti, si ricava che per una rete di triangoli sussiste la relazione

$$V + F = C + 2.$$

D'altra parte è chiaro che, se due triangoli della rete si riuniscono insieme per formare una sola faccia, il numero dei vertici resta invariato mentre si diminuisce di uno tanto il numero delle facce quanto il numero degli spigoli, e quindi l'eguaglianza precedente continua a sussistere. Allora, potendosi considerare un poliedro qualunque come risultante da una rete di triangoli, alla quale sia stata applicata un sufficiente numero di volte la trasformazione suindicata, ne segue che anche per il dato poliedro resta verificata la eguaglianza soprascritta, e quindi il teorema è dimostrato.

**138. Teorema.** — *La somma degli angoli delle facce di un poliedro convesso è eguale a tante volte due angoli piatti quanti sono i vertici del poliedro meno due.*

Scomponiamo il poliedro in una rete di triangoli. Allora, indicando con F e V i numeri delle facce e dei vertici della rete, dal § 135 si ricava

$$F = 2(V - 2).$$

Ma la somma degli angoli interni dei poligoni del poliedro è eguale a tanti angoli piatti quanti sono i triangoli, in cui questi poligoni si decompongono, ossia F; dunque la somma degli angoli dei poligoni del poliedro è eguale a $2(V - 2)$ angoli piatti, ossia a tante volte due angoli piatti quanti sono i vertici meno due.

## PIRAMIDE.

**139. Definizioni.** — 1ª. Il poliedro, che ha per facce un dato poligono piano e i triangoli, aventi per vertice uno stesso punto preso fuori del piano del poligono e per base i lati del medesimo, si chiama *piramide*.

2ª. La faccia poligonale si chiama *base* della piramide, le altre facce triangolari si chiamano *facce laterali*. La superficie, formata dalle facce laterali, si chiama *superficie laterale*, e quella, formata dalla base e dalle facce laterali, si chiama *superficie totale* della piramide.

3ª. Gli spigoli, che concorrono nel vertice, si chiamano *spigoli laterali*.

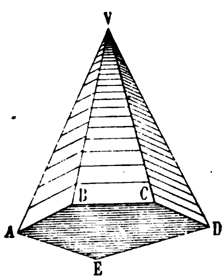


Fig. 110.

Colle parole *vertice della piramide*, quando non si avverta esplicitamente il contrario, si suole indicare il vertice non situato sulla base.

4ª. Si chiama *altezza* della piramide il segmento di perpendicolare condotta dal vertice al piano della base, compreso fra il vertice e il piano stesso.

È chiaro, che una piramide si può anche ottenere, tagliando un angoloide con un piano che ne incontri tutti gli spigoli.

5ª. L'angoloide, che ha per vertice il vertice della piramide, e i cui spigoli contengono gli spigolí laterali della piramide, presi nello stesso ordine, si dice *angoloide della piramide.*

È evidente, che se una piramide è *convessa*, *concava* o *intrecciata* anche la sua base ed il suo angoloide sono ordinatamente *convessi*, *concavi* o *intrecciati;* e viceversa.

6ª. Una piramide si chiama *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale* . . . . ., secondo che la sua base ha 3, 4, 5 . . . . . lati, ovvero il suo angoloide è di 3, 4, 5 . . . . facce.

Un tetraedro è una piramide triangolare, qualunque sia la faccia che si considera come base.

7ª. Un piano, che incontri tutti gli spigoli laterali di una piramide, la scompone in una piramide ed in un altro solido, che si chiama *tronco di piramide.*

Il poligono base della piramide, e il poligono, ottenuto come intersezione del piano di sezione colla superficie laterale della piramide, si chiamano le *basi* del tronco di piramide. Le altre facce che sono quadrangoli, si chiamano *facce laterali*, e la superficie formata da esse si chiama *superficie laterale* del tronco.

Se il piano di sezione è parallelo alle basi, il tronco di piramide ottenuto si dice a *basi parallele*

8ª. Se per il punto medio di uno spigolo laterale di una piramide (o di un tronco di piramide a basi parallele) si conduce un piano parallelo alla base (o alle due basi), gli altri spigoli laterali restano pure divisi per metà e la sezione prodotta si dice *sezione media.*

**140. Teorema.** — *Due piramidi sono eguali, se hannò i loro angoloidi e tre spigoli laterali corrispondenti rispettivamente eguali.*

Le due piramidi V, V′ (fig. 111) abbiano i loro angoloidi $\widehat{V.A}BCDE$, $\widehat{V'.A'}B'C'D'E'$, eguali; inoltre sia per es. $VA \equiv V'A'$, $VC \equiv V'C'$, $VD \equiv V'D'$. Portando l'angoloide $\widehat{V'.A'}B'C'D'E'$ sul suo eguale $\widehat{V.A}BCBE$, i punti A′, C′, D′, cadranno, per le ipotesi stabilite, rispettivamente nei punti

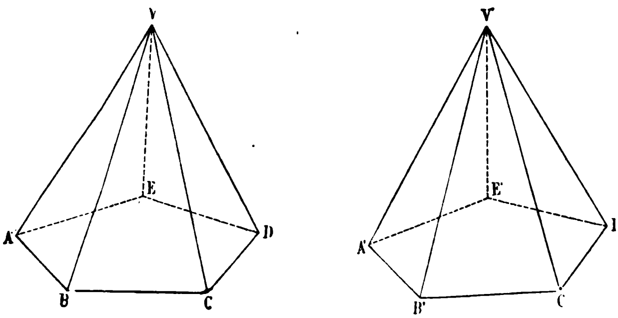



Fig. 111.

A, C, D; perciò il piano A′C′D′ coinciderà col piano ACD, e quindi le due piramidi coincideranno completamente.

**141. Teorema.** — *Due piramidi sono eguali, se hanno tre facce, concorrenti in uno stesso vertice della base, rispettivamente eguali e similmente disposte.*

Supponiamo che nelle piramidi V e V′ (fig. 111) sieno le facce AVB, AVE, ABCDE rispettivamente eguali alle facce A′V′B′, A′V′E′, A′B′C′D′E′ e disposte nello stesso modo. In conseguenza della identica disposizione delle facce eguali, i tre angoli $\widehat{VAB}$, $\widehat{VAE}$, $\widehat{BAE}$ sono pure rispettivamente eguali agli angoli $\widehat{V'A'B'}$, $\widehat{V'A'E'}$, $\widehat{B'A'E'}$ e similmente disposti; perciò i triedri $\widehat{A}.VBE$, $\widehat{A'}.V'B'E'$ (§ 123 Teor. 1°) sono eguali. Portando allora la faccia A′B′C′D′E′ a coincidere colla sua eguale ABCDE, è chiaro che le facce V′A′B′, V′A′E′ vengono a coincidere colle facce eguali VAB, VAE, ed il vertice V′ viene sul vertice V; dunque le due piramidi coincidono.

**142. Teorema.** — *Un piano, parallelo a due spigoli opposti di un tetraedro, taglia i piani di questo secondo le rette di un parallelogrammo.*

Sia $\alpha$ un piano parallelo ai due spigoli opposti AB, V′V″ di un tetraedro ABV′V″ (fig. 112). Una qualunque delle rimanenti rette, p. es. V′A, deve incontrare il piano $\alpha$, poichè, se fosse ad esso parallelo i due piani individuati dalle coppie di rette V′A, V′V″ e V′A, AB dovrebbero esser paralleli ad $\alpha$, il che è assurdo. Sieno dunque A′, B′, A″, B″ i punti d'incontro del piano $\alpha$ colle rette V′A, V′B, V″A, V″B del tetraedro. Le rette A′B′, A″B″ son parallele alla retta AB (§ 40 Teor.), e perciò parallele fra loro; e similmente le rette A′A″, B′B″ sono parallele alla V′V″, e perciò parallele fra loro. Dunque la figura A′B′ B″A″ è un parallelogrammo.

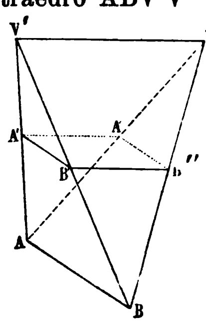


Fig. 112.

**143. Teorema.** — *Se due piani, che sono paralleli ai piani delle basi di due piramidi, aventi basi ed altezze eguali, e che staccano sulle altezze segmenti eguali, tagliano le superfici laterali delle medesime, le sezioni prodotte da essi sono poligoni eguali.*

Se due piramidi P′, P″ hanno basi ed altezze eguali, possiamo disporle in modo che le loro basi giacciano in un medesimo piano $\beta$, che i loro vertici V′, V″ sieno situati dalla stessa parte del piano delle basi, e che un lato AB della base dell'una coincida col lato eguale dell'altra (fig. 112). È chiaro allora, che i due vertici V′, V″, essendo eguali le due altezze dei tetraedri, giacciono sopra una retta parallela al piano $\beta$, e che i piani secanti, paralleli al piano delle basi, e che staccano sulle altezze segmenti eguali, coincidono in un piano $\alpha$, parallelo a $\beta$ ed anche alla retta V′V″.

Se allora consideriamo il tetraedro, che ha per vertici i vertici V′, V″ delle due piramidi e gli estremi A, B dello spigolo considerato, si vede che esso è tagliato dal piano $\alpha$ secondo un parallelogrammo A′B′B″A″ che ha i lati opposti A′B′, A″B″ eguali.

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le coppie di lati e di diagonali (se ve ne sono) delle basi delle due piramidi, si vede che

poligoni sezioni hanno tutti i lati e tutte le diagonali corrispondenti rispettivamente eguali, e perciò o sono triangoli eguali, o sono poligoni risultanti dalla riunione di più triangoli eguali disposti nello stesso modo, e quindi eguali.

## PRISMA.

**144. Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *prisma illimitato* la figura formata da tre o più rette parallele, prese in un dato ordine, tali che tre consecutive non siano in un piano, dalle strisce limitate dalle coppie di rette parallele successive, e dalla striscia limitata dalla prima e dall'ultima retta.

2ª. Le rette diconsi *spigoli* e le strisce, che hanno per lati due spigoli consecutivi, si dicono *facce* del prisma. Un prisma illimitato si dice *triangolare, quadrangolare, pentagonale* ..., secondo che ha 3, 4, 5 ... spigoli.

3ª. Un prisma dicesi *convesso* o *concavo*, secondo che tutti i suoi spigoli si trovano, oppur no, da una stessa parte del piano di ciascuna sua faccia; e dicesi *intrecciato* quando almeno due facce non consecutive si tagliano.

4ª. Un piano, non parallelo agli spigoli, taglia il prisma secondo un poligono, che si dice una *sezione normale* od *obliqua* del prisma, secondo che il piano stesso è perpendicolare od obliquo agli spigoli.

**Corollario.** — *Una sezione qualunque normale od obliqua di un prisma illimitato è un poligono concavo, convesso o intrecciato, secondo che il prisma è concavo, convesso o intrecciato; e viceversa.*

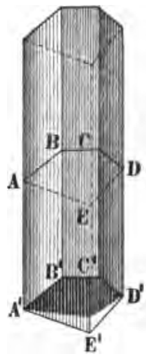


Fig. 113.

**145. Teorema.** — *Due sezioni parallele di un prisma sono poligoni eguali.*

Sieno ABCDE, A′B′C′D′E′ (fig. 113) due sezioni parallele di un prisma.

I lati corrispondenti di questi poligoni sono paralleli, come intersezioni di piani paralleli con un terzo, ed eguali come segmenti paralleli compresi fra rette parallele. Inoltre gli angoli corrispondenti dei poligoni stessi sono eguali, perchè hanno i lati diretti nello stesso senso; dunque i due poligoni sono eguali.

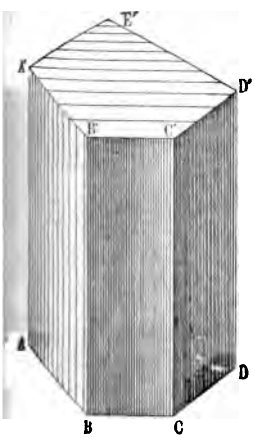


Fig. 114.

**Corollario.** — *Le sezioni normali di un prisma sono eguali fra loro.*

**146. Definizione 1ª.** — La parte di prisma illimitato, compresa fra due sezioni parallele, è un poliedro che dicesi *prisma finito*, o semplicemente *prisma*. Le due sezioni si dicono *basi* del prisma e le altre sue facce, che sono parallelogrammi, diconsi *facce laterali*.

**Corollario.** — *Le basi di un prisma sono eguali.*

**Definizioni.** — 2ª. Un prisma si dice *retto* od *obliquo*, secondo che gli spigoli laterali sono *perpendicolari* od *obliqui* alle basi.

3ª. Dicesi *altezza* di un prisma il segmento perpendicolare ai piani delle due basi e compreso fra i piani medesimi.

4ª. La superficie, formata dalle facce laterali di un prisma, si dice *superficie laterale* del prisma, mentre per *superficie totale* s'intende quella formata da tutte le facce, comprese le basi.

**147. Teorema.** — *Due prismi sono eguali, se hanno tre facce, concorrenti nello stesso vertice, rispettivamente eguali e similmente disposte.*

Dimostrazione analoga a quella del Teorema del § 141.

**Corollario.** — *Due prismi retti sono eguali, se hanno eguali le basi e le altezze.*

**148. Teorema.** — *I semipiani, uscenti dalle rette della base di un prisma triangolare e interni ai diedri, che hanno per spigoli le stesse rette, s'incontrano in un punto.*

Ogni piano uscente da un lato della base di un prisma triangolare, che non contenga la faccia laterale passante per quel lato, incontra evidentemente la retta dello spigolo opposto, poichè non è ad esso parallelo; ed il punto comune è situato nel semipiano interno al diedro del prisma che ha per spigolo quel lato, poichè il suo prolungamento e la retta dello spigolo opposto sono da parti opposte rispetto al piano della faccia laterale, che contiene quel lato. In simil guisa si vede che un semipiano uscente da un altro lato della base, e interno al diedro del prisma, che ha per spigolo quel lato, incontra la retta comune al primo semipiano considerato e alla terza faccia; e che finalmente la retta comune ai due semipiani considerati incontra un semipiano, uscente dal terzo lato della base, e interno al diedro che ha per spigolo quel lato.

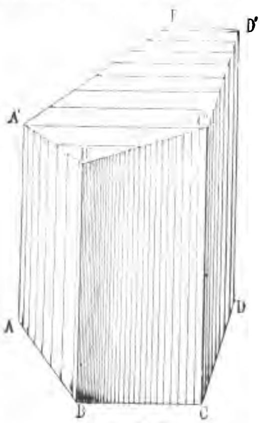


Fig. 115.

**Corollario.** — *I semipiani, uscenti dalle tre rette di un triangolo, situati da una medesima parte rispetto al piano del triangolo, e formanti diedri acuti col semipiano che contiene il triangolo, s'incontrano in un punto.*

**149. Definizioni.** — 1ª. La parte di prisma illimitato, compresa fra due piani non paralleli agli spigoli e non paralleli fra loro, la cui intersezione non incontri la superficie del prisma, è un poliedro, che dicesi *tronco di prisma.*

2ª. I due poligoni sezioni si dicono le *basi* del tronco, e le rimanenti facce, che sono trapezi, si dicono *facce laterali.*

3ª. La superficie, formata dalle facce laterali di un tronco di prisma, si dice *superficie laterale;* quella formata da tutte le facce si dice *superficie totale* del tronco.

**150.** Abbiamo dimostrato (§ 147) che due prismi sono eguali, se hanno tre facce, concorrenti in un vertice, rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo; d'altra parte sappiamo che due parallelogrammi sono eguali, se hanno rispettivamente eguali due lati consecutivi e l'angolo compreso; quindi si ricava che due prismi sono anche eguali, se hanno un triedro, la base e gli spigoli laterali rispettivamente eguali. È perciò evidente che si possono costruire infiniti prismi,

aventi soltanto un triedro e la base rispettivamente eguali ad un triedro e ad un poligono dati, prendendo gli spigoli laterali eguali a un segmento arbitrario.

Tutti questi infiniti prismi si dice che costituiscono *una serie di prismi*. Variando poi il poligono base, o il triedro, comune a tutti i prismi di una serie, è facile vedere come si possano ottenere infinite altre serie di prismi.

È chiaro inoltre che un prisma di una serie è individuato, quando è dato il segmento, a cui devono essere eguali gli spigoli laterali, e viceversa; di guisa che possiamo dire che fra i prismi e i segmenti suddetti esiste una corrispondenza univoca.

**Definizione 1ª.** — Due prismi di una serie si dicono *adiacenti*, quando hanno una base eguale in comune, gli spigoli laterali sulle medesime rette, e sono situati da parti opposte del piano della base comune.

È chiaro che, se portiamo due prismi della stessa serie l'uno adiacente all'altro, e sopprimiamo la base comune, si ottiene un nuovo prisma, il quale appartiene alla serie dei primi due. Possiamo dunque enunciare la seguente

**Definizione 2ª.** — Dati due o più prismi di una serie, se si porta il secondo adiacente al primo, il terzo adiacente al secondo, ma non dalla stessa parte del primo, e così di seguito, il prisma, che risulta dall'insieme di tutti i prismi dati, appartiene ancora alla stessa serie, e si dice la loro *somma*.

Da quanto si è detto risulta, che le serie di prismi costituiscono infinite classi di grandezze, per le quali sussistono tutte le proprietà, che si sono dimostrate per le altre serie di grandezze finora studiate. Ammetteremo dunque, senz'altro, come dimostrate anche per le serie di prismi le proprietà commutativa e associativa della somma, e le conseguenze che ne derivano. Inoltre intenderemo estese anche a queste nuove serie di grandezze le definizioni di differenza, maggiore, minore, multiplo, summultiplo, ecc. ed i teoremi del § 20.

**151. Teorema.** — *1°. Un prisma di una serie è maggiore, eguale, o minore di un altro prisma della stessa serie, secondo che il segmento corrispondente al primo è maggiore, eguale, o minore del segmento corrispondente al secondo.*

*2°. Se un prisma di una serie è somma di più altri prismi della stessa serie, anche il segmento corrispondente ad esso è somma dei segmenti corrispondenti alle parti della somma.*

*E viceversa.*

Si imiti la dimostrazione dei Teoremi del § 33.

**Corollari.** — *1°. Se un prisma di una serie è multiplo (o summultiplo) di un altro, il segmento corrispondente al primo è equimultiplo (o equisummultiplo) del segmento corrispondente al secondo; e viceversa.*

*2°. Se un prisma di una data serie è differenza di due altri, anche il segmento corrispondente ad esso è differenza dei segmenti corrispondenti agli altri due; e viceversa.*

## PARALLELEPIPEDO.

**152. Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *parallelepipedo* un prisma, che ha per basi due parallelogrammi.

2ª. In un prisma quadrangolare, e quindi anche in un parallelepipedo, due facce non aventi vertici comuni, si dicono *opposte;* e gli spigoli, i diedri, i vertici, i triedri determinati da facce opposte, si chiamano *opposti.*

In un parallelepipedo è chiaro che esistono sei facce, otto vertici, dodici spigoli, quattro diagonali, ciascuna delle quali termina a due vertici opposti.

3ª. Un parallelepipedo retto, che ha per base un rettangolo, si chiama *parallelepipedo rettangolo* o *parallelepipedo ortogonale.*

Nel parallelepipedo retto le facce laterali sono rettangoli, nel parallelepipedo rettangolo tutte le sei facce sono rettangoli.

**153. Teorema.** — *In un parallelepipedo.*

*1° le facce opposte sono eguali e parallele;*

*2° i diedri opposti sono eguali;*

*3° ogni triedro è eguale all'opposto al vertice del triedro opposto;*

*4° le quattro diagonali passano per uno stesso punto, che le divide per metà.*

1°. Nel parallelepipedo ABCDA'B'C'D' (fig. 116) le basi ABCD, A'B'C'D' sono per definizione eguali e situate in piani paralleli. I segmenti AA', DD' sono eguali e paralleli; i segmenti AB, DC sono pure eguali e paralleli; perciò gli angoli $A'\widehat{A}B$, $D'\widehat{D}C$ sono eguali e situati in piani paralleli, e i parallelogrammi ABB'A', DCC'D' sono eguali.

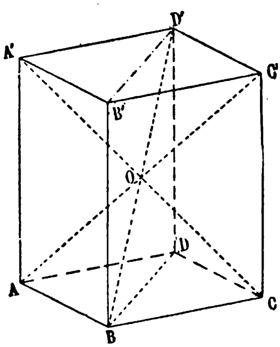


Fig. 116.

Similmente le facce ADD'A', BCC'B' sono eguali, e i loro piani sono paralleli.

2°. Due diedri opposti, per es. $\widehat{AB}$, $\widehat{D'C'}$, hanno le facce dirette in senso opposto, e perciò sono eguali (§ 50 Teor.)

3°. Due triedri opposti, per es. $\widehat{A}$, $\widehat{C'}$, hanno, per quello che abbiamo già detto avanti, le facce e i diedri eguali, ma disposti in modo diverso; perciò l'uno è eguale all'opposto al vertice dell'altro.

4°. Due diagonali qualunque, per es. AC', A'C, giacciono nel piano di due spigoli opposti AA', CC', e sono le diagonali del parallelogrammo AA'C'C; perciò esse s'incontrano in un punto O, ed in esso si dividono per metà (§ 103 Teor.) Similmente considerando una delle diagonali precedenti, per es. AC', ed una delle rimanenti BD', si vede che esse sono le diagonali del parallelogrammo ABC'D', e perciò s'incontrano nel loro punto di mezzo, che è precisamente il punto O.

Nello stesso modo si dimostra che la quarta diagonale B′D passa per il punto O, il quale la divide per metà.

**Corollari.** — *1°. Un parallelepipedo si può considerare in tre modi come un prisma, prendendo per basi due facce opposte qualunque, ed ha perciò tre altezze.*

*2°. Le dodici costole si dividono in tre gruppi, di quattro ciascuno, le quali sono fra loro eguali e parallele.*

*3°. Se un piano incontra quattro spigoli paralleli di un parallelepipedo, la sezione da esso prodotta è un parallelogrammo.*

**154. Teorema.** — *Un prisma quadrangolare convesso è un parallelepipedo,*

*1° se ciascuna faccia laterale è eguale all'opposta;*

*2° se ciascuna faccia laterale è parallela all'opposta;*

*3° se due facce opposte sono eguali e parallele;*

*4° se due triedri, aventi per vertici due vertici consecutivi di una base, sono eguali agli opposti al vertice dei loro opposti;*

*5° se due diagonali, che terminano a due vertici consecutivi di una base, si dividono per metà.*

1°. Sia ABCD A′B′C′D′ (fig. 116) un prisma quadrangolare, nel quale ogni faccia è eguale alla sua opposta. Dall'eguaglianza delle facce AD D′A′, BC C′B′ deriva che i segmenti AD, BC sono eguali, e dall'eguaglianza delle facce AB B′A′, CD D′C′ deriva che i segmenti AB, CD sono pure eguali. Perciò il quadrilatero ABCD, avendo ogni lato eguale al suo opposto, è un parallelogrammo, e quindi il dato prisma è un parallelepipedo.

2°. Sia ABCD A′B′C′D′ un prisma quadrangolare, nel quale ogni faccia è parallela all'opposta. Le rette AB, CD e le rette AD, BC sono parallele, come intersezioni di due piani paralleli con un terzo, e perciò il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo, ed il dato prisma è un parallelepipedo.

3°. Nel prisma quadrangolare ABCD A′B′C′D′ sia la faccia AA′B′B eguale e parallela alla faccia DD′C′C; ne segue che lo spigolo AB è eguale e parallelo a DC, quindi il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo, ed il dato prisma è un parallelepipedo.

4°. Nel prisma quadrangolare ABCD A′B′C′D′ siano i triedri $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ eguali agli opposti al vertice dei loro opposti $\widehat{C'}$, $\widehat{D'}$; allora dovrà essere $A'\widehat{D'}C' \equiv A\widehat{B}C$, e quindi anche $A\widehat{D}C \equiv A\widehat{B}C$, perchè $A'\widehat{D'}C' \equiv A\widehat{D}C$. Analogamente si dimostra che $B\widehat{A}D \equiv B\widehat{C}D$; e perciò il quadrilatero ABCD, avendo ogni angolo eguale al suo opposto, è un parallelogrammo, e il dato prisma è un parallelepipedo.

5°. Nel prisma quadrangolare ABCD A′B′C′D′ sia O il punto medio delle due diagonali AC′, BD′. Il quadrangolo ABC′D′ è un parallelogrammo, perchè le diagonali si dividono scambievolmente per metà; quindi lo spigolo AB è parallelo ed eguale a D′C′. Ma lo spigolo D′C′ è pure eguale e parallelo allo spigolo DC, dunque AB è eguale e parallelo a DC, vale a dire il quadrangolo è un parallelogrammo, e il prisma dato è un parallelepipedo.

**155. Teorema.** — *Esiste un parallelepipedo, avente un triedro e gli spigoli corrispondenti ordinatamente eguali a un triedro e a tre segmenti dati, e disposti in un dato modo.*

Sugli spigoli del dato triedro prendiamo, a partire dal vertice tre segmenti eguali ai segmenti dati, e dai loro estremi conduciamo dei piani paralleli alle facce opposte. Il parallelepipedo risultante è il richiesto, ed è chiaro che tutti i parallelepipedi che si possono costruire con gli stessi elementi dati, disposti nello stesso modo, sono tutti eguali fra loro (§ 147 Teor.)

**Osservazione.** — Potendosi ad arbitrio scegliere il triedro e i segmenti che individuano il parallelepipedo possono darsi i seguenti casi particolari:

1°. Il triedro è birettangolo. Allora il parallelepipedo è retto.

2°. Il triedro è trirettangolo. Allora il parallelepipedo è rettangolo.

3°. I segmenti sono eguali. Allora sono eguali tutti i dodici spigoli del parallelepipedo, e le sue facce sono rombi.

4°. I tre segmenti sono eguali ed il triedro equiedro. Allora le facce del parallelepipedo sono rombi eguali.

5°. I tre segmenti sono eguali ed il triedro trirettangolo. Allora le facce del parallelepipedo sono quadrati eguali.

**Definizioni.** — 1ª. Un parallelepipedo, avente tutti gli spigoli eguali, dicesi *equispigolo.*

2ª. Un parallelepipedo, che ha per facce sei rombi eguali, dicesi *romboedro.*

3ª. Un parallelepipedo, che ha per facce sei quadrati, dicesi *cubo.*

**156. Teorema.** — *In un parallelepipedo retto le coppie di diagonali, che terminano a due vertici opposti di una base, sono eguali; e viceversa, se le coppie di diagonali di un parallelepipedo, che terminano a due vertici opposti di una base, sono eguali, il parallelepipedo è retto.*

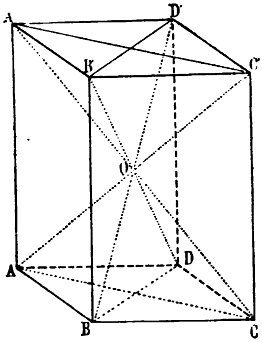


Fig. 117.

1°. Sia ABCDA'B'C'D' un parallelepipedo retto (fig. 117). La figura AA'C'C è evidentemente un rettangolo, e perciò le sue diagonali A'C, AC' sono eguali (§ 107 Teor.) Parimenti sono eguali i segmenti B'D, BD' come diagonali del rettangolo BB'D'D.

2°. Supponiamo ora di sapere che nel parallelepipedo ABCDA'B'C'D' le diagonali AC' A'C, sieno eguali, e sieno pure eguali le diagonali BD', B'D. I due parallelogrammi AA'C'C, BB'D'D, avendo le diagonali eguali (§ 107 Teor.), sono rettangoli; e perciò la retta AA' è perpendicolare ad AC e BB' perpendicolare a BD. Siccome gli spigoli AA', BB' sono paralleli, ne segue che AA', BB' sono perpendicolari ambedue alle rette AC, BD, e quindi al loro piano.

**Corollario.** — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè un parallelepipedo sia rettangolo, è che le sue quattro diagonali sieno eguali.*

# CAPITOLO IV

## Distanze.

157. **Definizioni.** — 1ª. Si chiama *proiezione di un punto sopra una retta o sopra un piano*, il punto d'incontro della perpendicolare (*retta proiettante*) condotta per quel punto alla retta stessa, o al piano, colla retta o col piano medesimo.

2ª. Si chiama *proiezione di una figura sopra un piano* il luogo delle proiezioni dei suoi punti.

**Corollari.** — 1°. *La proiezione sopra un piano di una retta, non perpendicolare ad esso, è l'intersezione del piano dato col piano ad esso perpendicolare (piano proiettante), condotto per la retta data.*

2°. *La proiezione sopra un piano di una retta perpendicolare ad esso è un punto.*

3°. *La proiezione di un segmento sopra una retta, o sopra un piano, è il segmento limitato dalle proiezioni de' suoi estremi.*

**Teorema.** — *Se due segmenti sono paralleli, la proiezione di uno di essi sopra una retta o sopra un piano è maggiore, eguale, o minore della proiezione dell'altro sopra la medesima retta, o sopra il medesimo piano, secondo che il primo segmento è maggiore, eguale o minore dell'altro; e viceversa.*

1°. Sieno AB, CE (fig. 118) due segmenti dati eguali e paralleli fra loro, A'B', C'E' le loro proiezioni sopra una medesima retta $a$ (o sopra un piano $\alpha$). Condotte le rette AM, CH parallele alla retta $a$ (o al piano $\alpha$), si considerino i due triangoli rettangoli ABM, CEH, i quali sono eguali, perchè hanno le ipotenuse eguali per ipotesi e gli angoli acuti $\widehat{BAM}$, $\widehat{ECH}$ eguali, essendo i loro lati diretti nello stesso senso; ne deriva che il lato AM è eguale al lato CH, e quindi $A'B' \equiv C'E'$.

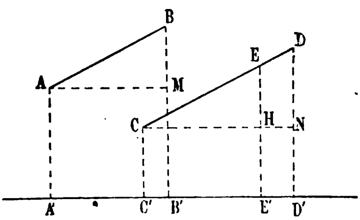


Fig. 118.

2°. Se AB, CD sono due segmenti disuguali, uno di essi, per es. CD, dovrà essere maggiore dell'altro, ed allora, preso CE eguale ad AB, si dimostra come precedentemente che la proiezione A'B' è eguale alla proiezione C'E'. Inoltre essendo E un punto interno al segmento CD, anche E' è interno al segmento C'D', di guisa che è $C'D' > C'E'$, e quindi anche $C'D' > A'B'$.

Siccome tutte le ipotesi possibili relative ai due segmenti dati ci conducono a tesi, che si escludono a vicenda, così anche i teoremi inversi sono veri.

158. **Teorema.** — *Fra i segmenti, che partono da un punto e terminano ad una retta (o ad un piano),*

*1° il segmento perpendicolare è il minimo;*

*2° due segmenti obliqui sono eguali, se hanno sulla retta (o sul piano) proiezioni eguali;*

*3° di due segmenti obliqui, che hanno proiezioni disuguali sulla retta (o sul piano), è maggiore quello che ha proiezione maggiore.*

*E viceversa.*

1°. Sia OA il segmento perpendicolare condotto da O alla retta AB (o al piano $\alpha$), e OB un segmento obliquo qualunque (fig. 119 e 120). Nel triangolo OAB l'angolo retto $O\widehat{A}B$ è maggiore dell'angolo $O\widehat{B}A$, e perciò il lato OB,

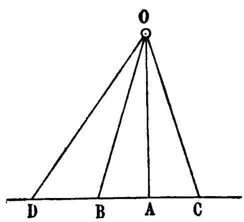


Fig. 119.

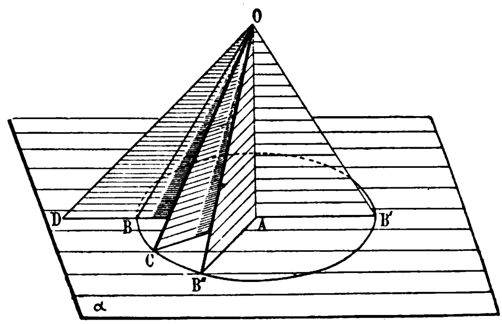


Fig. 120.

opposto all'angolo $O\widehat{A}B$, è maggiore del lato OA opposto all'angolo $O\widehat{B}A$.

2°. Siano OB, OC due segmenti, le cui proiezioni AB, AC sono eguali. I due triangoli OAB, OAC, rettangoli in A, hanno il cateto OA comune, e i cateti AB, AC eguali per ipotesi; perciò sono eguali ed hanno OB $\equiv$ OC.

3°. Siano OC, OD due segmenti obliqui, tali che la proiezione AC del primo sia minore della proiezione AD del secondo. Si porti su AD un segmento AB $\equiv$ AC, e si tracci il segmento OB. Poichè il punto B è interno al segmento AD, la retta OB è interna all'angolo $A\widehat{O}D$, e nel triangolo ODB l'angolo $O\widehat{B}D$ è ottuso, perchè esterno al triangolo rettangolo OAB: perciò il lato OD è maggiore di OB. Ma OB, OC sono eguali, perchè hanno proiezioni eguali, dunque sarà pure OD $>$ OC.

I teoremi inversi sono veri per la seconda legge delle inverse. (Preliminari, § 4).

**Corollari.** — *1°. Da un punto non si possono condurre più di due segmenti eguali, che terminino ad una retta.*

*2°. Da un punto si possono condurre infiniti segmenti eguali che terminino ad un piano; il luogo dei loro estremi è una circonferenza, il cui centro è la proiezione del punto sul piano.*

*3°. Fra tutti i segmenti, che terminano a due rette parallele, o ad una retta e ad un piano ad essa parallelo, o a due piani paralleli, quelli ad essi perpendicolari sono eguali fra loro e sono minori di tutti gli altri.*

*4°. Fra tutti i segmenti, che terminano a due rette sghembe, quello perpendicolare ad esse è minore di tutti gli altri.*

Infatti dimostrammo (§ 67 Teor.) che è possibile condurre a due rette sghembe *a*, *b* una sola perpendicolare comune, e che le incontri

entrambe. Questa retta risulta perpendicolare anche ai piani $\alpha$ e $\beta$, condotti l'uno per $a$ parallelo a $b$, e l'altro per $b$ parallelo ad $a$ (fig. 48). Il segmento di questa perpendicolare, che termina alle due rette sghembe, per il corollario precedente, è minore di qualsiasi altro segmento compreso fra i due piani ed obliquo ad essi; perciò esso è il minore dei segmenti, che hanno gli estremi sopra le due rette sghembe date.

**Definizioni.** — 1ª. Si chiama *distanza di un punto da una retta, o da un piano,* la distanza del punto dalla sua proiezione sulla retta, o sul piano.

2ª. Si chiama *distanza di due rette parallele* la distanza di un punto qualsiasi di una di esse dall'altra.

3ª. Si chiama *distanza di una retta da un piano ad essa parallelo* la distanza di un punto qualsiasi della retta dal piano.

4ª. Si chiama *distanza di due piani paralleli* la distanza di un punto qualsiasi di uno di essi dall'altro.

5ª. Si chiama *distanza di due rette sghembe* il segmento, ad esse perpendicolare, che ha i suoi estremi sulle medesime.

**159. Teorema.** — *Di tutti gli angoli che una semiretta, uscente da un punto di un piano, fa colle semirette del piano, uscenti dal medesimo punto, il minimo è quello che essa fa con la sua proiezione.*

Sia AB (fig. 121) una retta obliqua al piano $\alpha$, e che lo incontri nel punto A; sia BC la retta proiettante un suo punto B, e quindi sia AC la proiezione della semiretta AB sul piano $\alpha$. Condotta nel piano $\alpha$ un'altra retta AH, si prenda $AH \equiv AC$, e si unisca B con H. Il segmento BH, obliquo al piano $\alpha$, è maggiore del segmento perpendicolare BC; e quindi nei due triangoli BAC, BAH, aventi il lato AB comune, i lati AC, AH eguali per costruzione, e il lato $BC < BH$, ràsa (§ 90 Cor. 1°) $B\widehat{A}C < B\widehat{A}H$. Così l'angolo $B\widehat{A}C$ è il minimo angolo formato da AB con tutte le rette del piano $\alpha$.

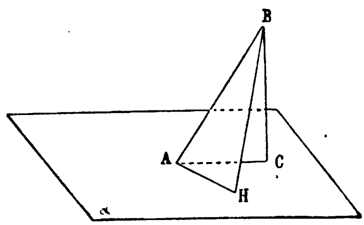


Fig. 121.

**Definizione.** — Dicesi *angolo, o inclinazione di una retta con un piano,* non parallelo ad essa, l'angolo formato da ciascuna delle semirette in cui essa è tagliata dal piano, con la propria proiezione sul piano medesimo.

**160. Teorema.** — *Il luogo geometrico dei punti di un piano, equidistanti da due punti del piano stesso, è la retta perpendicolare al segmento che congiunge quei due punti, condotta per il punto medio di esso nel piano dato.*

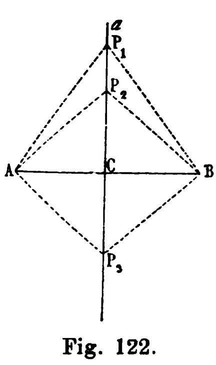


Fig. 122.

1°. Sia $a$ (fig. 122) la retta del piano $\alpha$ perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio C. I due segmenti $P_1A, P_1B$, che uniscono un punto qualunque $P_1$ della retta $a$ coi punti A, B, sono eguali, perchè le loro proiezioni CA, CB sono eguali.

2°. Inversamente, se le distanze $P_1A, P_1B$ di un punto $P_1$ da A e da B sono eguali, le loro proiezioni sulla retta AB devono essere eguali, e perciò il punto $P_1$ deve trovarsi sulla perpendicolare ad AB nel suo punto medio, vale a dire sulla $a$.

**Corollari.** — *1°. Le perpendicolari ai lati di un triangolo, condotte nel piano del medesimo per i loro punti medi, passano per uno stesso punto, che è il solo punto del piano equidistante dai vertici.*

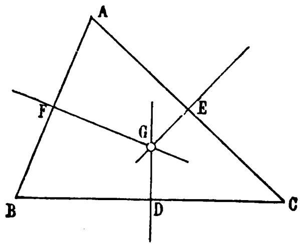



Fig. 123.

Le perpendicolari ai due lati BC, AC nei loro punti medi D, E devono incontrarsi (§ 70) in un punto G, il quale, appartenendo a ciascuna di esse, sarà, pel teorema precedente, il solo punto del piano equidistante dai tre vertici A, B, C. Lo stesso punto G appartiene poi anche alla perpendicolare ad AB nel suo punto medio F, perchè è equidistante dai punti A e B; e quindi le tre perpendicolari suddette si tagliano nel punto G egualmente distante dai vertici.

*2°. Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto.*

Sia ABC il triangolo dato, e sieno B′C′, C′A′, A′B′ le parallele condotte dai vertici ai lati opposti. Queste rette dovranno incontrarsi due a due e quindi formare un triangolo A′B′C′. I segmenti paralleli BC, AB′ sono eguali, perchè compresi fra rette parallele, e per la stessa ragione sono eguali i due segmenti BC, C′A; perciò il punto A è il punto medio del lato B′C′. Analogamente si dimostra che B e C sono rispettivamente i punti medi dei lati C′A′, A′B′. Ora le altezze di ABC, essendo perpendicolari ai lati del triangolo A′B′C′ nei loro punti medi, devono per il corollario precedente passare necessariamente per uno stesso punto.

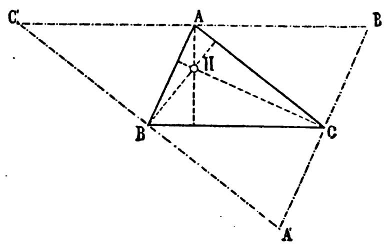



Fig. 124.

**Definizione.** — Il punto d'incontro delle tre altezze di un triangolo si chiama *ortocentro* del triangolo.

**161. Teorema.** — *Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti dati è il piano perpendicolare al segmento che congiunge quei due punti, condotto per il suo punto di mezzo.*

Infatti, dal teorema precedente risulta che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un punto sia equidistante da due punti A, B, è che si trovi sopra una delle infinite perpendicolari al segmento che li congiunge, condotte per il suo punto medio C. Siccome il luogo di queste perpendicolari è il piano perpendicolare al segmento AB nel punto C (§ 60 Teor.), così tutti e soli i punti di un tal piano godono della proprietà di essere equidistanti da A e da B.

**Corollari.** — *1°. I piani perpendicolari ai lati di un triangolo nei loro punti medi passano per una retta, luogo geometrico dei punti equidistanti dai vertici del triangolo.*

Si imiti la dimostrazione del corollario 1° del § precedente.

*2°. I piani perpendicolari agli spigoli di un tetraedro nei loro punti medi passano per uno stesso punto, che è il solo punto dello spazio equidistante dai vertici.*

Sia ABCD il tetraedro dato (fig. 125). I piani perpendicolari agli spigoli AB, AC, AD nei loro punti di mezzo non possono essere paralleli, poichè, se lo fossero, le tre rette AB, AC, AD, coinciderebbero; nè possono essere paralleli ad una stessa retta, perchè, se ciò avvenisse, questa retta dovrebbe essere perpendicolare ai piani ABC, ACD, ADB (§ 65 Cor.); perciò i tre piani suddetti hanno un solo punto comune O, il quale, trovandosi su di essi, è l'unico punto dello spazio equidistante da A e da B, da A e da C, da A e da D, ossia è equidistante dai quattro vertici del tetraedro dato. Essendo il punto O equidistante anche da B e da C, da C e da D, da D e da B, per esso devono passare anche i piani perpendicolari agli spigoli BC, CD, DB, condotti per i loro punti di mezzo.

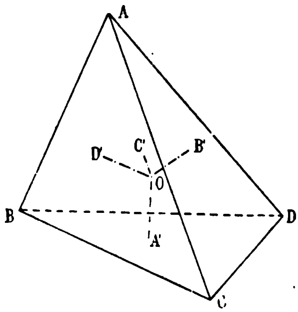


Fig. 125.

**162. Teorema.** — *Il luogo dei punti di un piano, equidistanti da due rette del piano stesso, che s'incontrano, è la coppia delle bisettrici dei quattro angoli formati dalle due rette.*

1ª. Sia P (fig. 126) un punto situato sopra una delle bisettrici degli angoli formati dalle rette *a*, *b*, e PH, PK le perpendicolari condotte da esso alle rette *a*, *b*. I due triangoli OPH, OPK rettangoli, poichè gli angoli $\widehat{H}$, $\widehat{K}$ sono retti per costruzione, hanno l'ipotenusa OP comune e gli angoli $P\widehat{O}H$, $P\widehat{O}K$ eguali per ipotesi, e perciò sono eguali. Ne segue che è $PH \equiv PK$, ossia il punto P è egualmente distante dalle rette *a*, *b*.

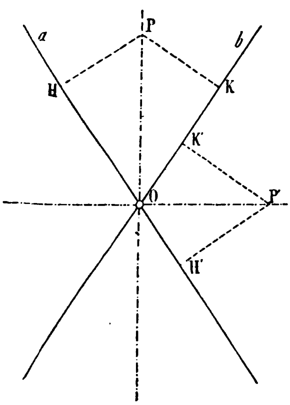


Fig. 126.

2°. Inversamente, sia P′ un punto del piano, nel quale giacciono le rette *a*, *b*, equidistante da esse, tale cioè che i segmenti P′H′, P′K′ perpendicolari a queste rette sieno eguali. Unendo P′ con O, si hanno i due triangoli OP′H′, OP′K′ rettangoli, perchè gli angoli $\widehat{H'}$, $\widehat{K'}$ sono retti, e che hanno l'ipotenusa OP′ comune ed i cateti P′H′, P′K′ eguali. Essi sono dunque eguali, e perciò gli angoli $P'\widehat{O}H'$, $P'\widehat{O}K'$ sono eguali, cioè P′ è un punto di una delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette *a*, *b*.

**Corollario.** — *Le bisettrici degli angoli interni ed esterni di un triangolo si incontrano tre a tre in quattro punti, che sono i soli punti del piano equidistanti dalle rette del triangolo.*

Sieno $AO_1$, $BO_2$ (fig. 127) le bisettrici di due angoli interni del triangolo ABC. Essendo la somma di due angoli di un triangolo minore di un

angolo piatto, a più forte ragione sarà $O_1\widehat{A}B + O_2\widehat{B}A$ minore di un angolo piatto, e quindi le due bisettrici si taglieranno in un punto O, il quale, appartenendo a ciascuna di esse, sarà per il teorema precedente equidistante dalle tre rette del triangolo. Lo stesso punto O appartiene poi anche alla bisettrice del rimanente angolo BCA, perchè è equidistante dai lati AC, BC ed interno a questo angolo; da ciò si conclude che le tre bisettrici degli angoli interni si tagliano in un punto O, egualmente distante dalle tre rette del triangolo.

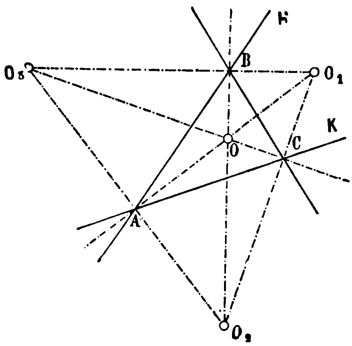


Fig. 127.

Analogamente le bisettrici di due angoli esterni per es. $BO_1$, $CO_1$ si devono incontrare in un punto $O_1$ interno ai due angoli $H\widehat{B}C$, $K\widehat{C}B$, ossia interno all'angolo $B\widehat{A}C$, ma esterno al triangolo, perchè la somma degli angoli $C\widehat{B}O_1$, $B\widehat{C}O_1$ è minore di un angolo piatto. Questo punto $O_1$ trovandosi sulle due bisettrici suddette, è equidistante dalle tre rette del triangolo, e siccome è interno all'angolo $B\widehat{A}C$ deve trovarsi sulla bisettrice di quest'angolo.

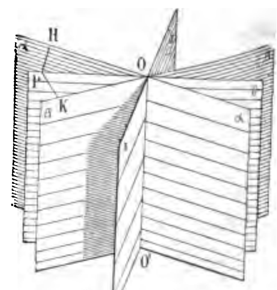
In simil guisa si dimostra, che esistono altri due punti $O_2$, $O_3$ equidistanti dalle rette del triangolo, per ciascuno dei quali passano le bisettrici di due angoli esterni e di un angolo interno del triangolo.

Ogni altro punto del piano per essere equidistante dalle tre rette del triangolo si deve trovare su due delle bisettrici degli angoli interni od esterni, e perciò deve coincidere con uno dei quattro punti $O, O_1, O_2, O_3$.

**163. Teorema.** — *Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due piani, che si tagliano, è la coppia dei piani bisettori dei quattro diedri formati dai due piani.*

Sieno $\alpha, \beta$ (fig. 128) due piani che si tagliano secondo una retta $OO'$, e $\gamma, \delta$ i piani bisettori dei loro diedri.

1°. Sia P un punto qualunque di uno di questi piani bisettori, per es. di $\delta$, e PH, PK le perpendicolari condotte da esso ai piani $\alpha, \beta$. Il piano individuato dalle rette PH, PK è perpendicolare (§ 64 Teor.) ai piani $\alpha, \beta$, e perciò anche (§ 65 Cor.) alla loro intersezione $OO'$. Se dunque OH, OK, OP sono le rette d'intersezione di un tale piano coi piani $\alpha, \beta, \delta$, gli angoli $H\widehat{O}P$, $P\widehat{O}K$ sono le sezioni normali dei diedri uguali $H\widehat{OO'}P$, $P\widehat{OO'}K$, e perciò sono eguali. Allora i due triangoli OPH, OPK sono rettangoli, poichè gli angoli $\widehat{H}$, $\widehat{K}$ sono retti, hanno l'ipotenusa OP comune, e i due angoli $H\widehat{O}P$, $P\widehat{O}K$ eguali; essi sono dunque eguali, ed è $PH \equiv PK$, cioè P è equidistante dai piani $\alpha, \beta$.


Fig. 128.

2°. Inversamente, se P è un punto equidistante dai piani $\alpha, \beta$, esso deve essere sopra uno dei piani bisettori dei loro diedri.

Infatti, condotto il piano OO'P e il piano delle due perpendicolari PH, PK, si dimostra, come abbiamo fatto sopra, che quest'ultimo è perpendicolare alla retta OO' e taglia i piani $\alpha$, $\beta$, OO'P secondo le rette OH, OK, OP, gli angoli delle quali sono le sezioni normali dei diedri dei piani medesimi. Ora i due triangoli POH, POK sono eguali, perchè hanno gli angoli $\widehat{H}$, $\widehat{K}$ retti, l'ipotenusa OP comune e i cateti PH, PK eguali; ne segue che sono eguali gli angoli $P\widehat{O}H$, $P\widehat{O}K$ e quindi anche i diedri corrispondenti, cioè il piano OO'P è il piano bisettore di uno dei diedri formati dai piani dati $\alpha$ e $\beta$.

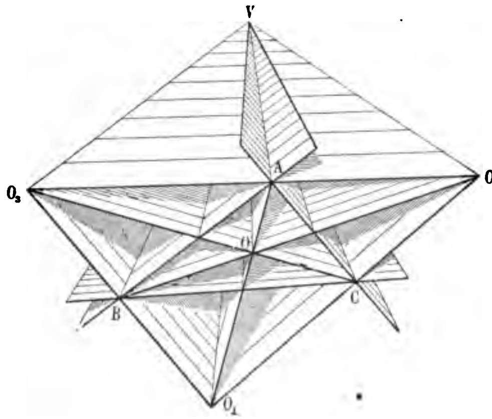


Fig. 129.

**Corollario.** — *I piani bisettori dei diedri interni ed esterni di un triedro si tagliano tre a tre secondo quattro rette, le quali sono il luogo geometrico dei punti equidistanti dai piani del triedro.*

Si imiti la dimostrazione del corollario del § 161 (fig. 129).

**164. Teorema.** — *Esistono non più di otto e non meno di cinque punti equidistanti dai quattro piani di un tetraedro.*

Sieno $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ i quattro piani di un tetraedro, rispettivamente opposti ai vertici A, B, C, D. Siccome il luogo geometrico dei punti equidistanti da due piani, che s'incontrano, è formato dalla coppia di piani bisettori dei loro diedri, affinchè un punto sia equidistante dai piani $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ è necessario e sufficiente che si trovi contemporaneamente sopra uno dei piani bisettori dei diedri formati dai piani $\alpha$, $\beta$, sopra uno dei piani bisettori dei diedri formati dai piani $\alpha$, $\gamma$ e sopra uno dei piani bisettori dei diedri formati dai piani $\alpha$, $\delta$. I piani bisettori dei diedri formati dai piani $\alpha$, $\beta$ tagliano i piani bisettori dei diedri formati dai piani $\alpha$, $\gamma$ secondo quattro rette, che passano per D, poichè questo punto è comune a tutti i piani suddetti, e le quattro rette così ottenute tagliano i piani bisettori dei diedri formati dai piani $\alpha$, $\delta$ al più in otto punti. Se O è uno dei punti d'incontro suddetti, esso è equidistante da tutti i piani del tetraedro, e perciò passano per esso altri tre piani bisettori dei diedri formati dai piani $\beta$ e $\gamma$, $\gamma$ e $\delta$, $\delta$ e $\beta$.

Resta ora a dimostrare che esistono almeno 5 dei punti d'incontro suddetti. È chiaro prima di tutto che i piani bisettori dei diedri interni formati dal piano $\alpha$ coi piani $\beta$, $\gamma$, $\delta$ s'incontrano in un punto O interno al tetraedro (§ 148 Cor.) Per esso dunque passano anche i piani bisettori degli altri tre diedri interni formati da $\beta$ con $\gamma$, da $\gamma$ con $\delta$ e da $\delta$ con $\beta$.

Consideriamo ora i tre semipiani bisettori dei diedri esterni adiacenti alla faccia BCD. Essi formano con questa faccia diedri minori

della metà di un angolo piatto, cioè acuti, e perciò (§ 148 Cor.) s'incontrano in un punto $O_1$, esterno al tetraedro, ma interno al triedro $\widehat{A}$. Per esso dunque passano anche i piani bisettori dei diedri interni formati dai piani $\beta$ e $\gamma$, $\gamma$ e $\delta$, $\delta$ e $\alpha$. In simil guisa si trova che esistono altri tre punti $O_2$, $O_3$, $O_4$, per ciascuno dei quali passano i tre piani bisettori dei diedri esterni adiacenti ad una faccia e i piani bisettori dei diedri interni non conseguenti ad essi.

Consideriamo infine i piani bisettori dei due diedri interni opposti AD, BC. È evidente che essi si tagliano secondo una retta MN che incontra i due spigoli AD, BC in due punti N, M. Se il piano bisettore del diedro esterno AC incontra questa retta, è chiaro che non può incontrarla in un punto del segmento MN, ma in un punto dei suoi prolungamenti, cioè in un punto esterno al tetraedro. Ammettendo dunque che un tal punto d'incontro O′ esista, per esso dovranno passare anche gli altri piani bisettori dei diedri esterni CD, DB, AB. Si otterrebbero in tal guisa tre punti per ciascuno dei quali passerebbero i piani bisettori di due diedri interni, che hanno per spigoli due spigoli opposti del tetraedro, e i piani, bisettori dei diedri esterni, che hanno per spigoli gli altri quattro spigoli del tetraedro.

È da notarsi però che non è escluso il caso che il piano bisettore del diedro esterno $\widehat{AC}$ sia parallelo alla retta MN, nel qual caso il punto O′ non esisterebbe.

Per es. è facile vedere che nel tetraedro, che ha per facce quattro triangoli equilateri eguali, gli ultimi tre punti, di cui abbiamo parlato, non esistono.

**165. Teorema.** — *Le mediane di un triangolo passano per uno stesso punto, che divide ciascuna di esse in due parti, di cui quella che termina al vertice è doppia dell'altra.*

Sieno CF, BE due delle mediane del triangolo ABC, le quali si devono incontrare in un punto, perchè CF, essendo interna all'angolo $\widehat{ECB}$, deve tagliare (§ 80 Cor.) il terzo lato EB del triangolo EBC. Essendo M il punto d'incontro delle due mediane, si tracci il segmento EF e il segmento HK, che ha per estremi i punti medi dei segmenti MB, MC. Questi due segmenti sono entrambi paralleli ed eguali alla metà di BC (§ 85 Cor.) e quindi sono eguali e paralleli fra loro. Perciò il quadrilatero EFKH è un parallelogrammo, e le sue diagonali KE, HF si tagliano per metà, cioè KM ≡ ME, HM ≡ MF.

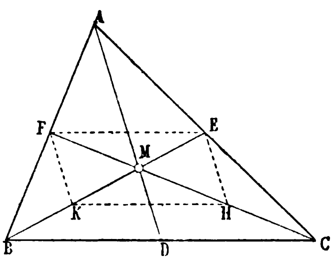


Fig. 130.

Ora, essendo per costruzione BK ≡ KM, CH ≡ HM, sarà

$$BM \equiv 2 \, . \, ME \qquad CM \equiv 2 \, . \, MF.$$

Analogamente si dimostra che la terza mediana taglia ciascuna delle precedenti in un punto, che divide ciascuna di esse in due parti, di cui quella, che termina al vertice, è doppia dell'altra; ma si è dimostrato che questo punto è il punto M; dunque tutte le tre mediane passano per M.

**Definizione.** — Il punto d'incontro delle mediane di un triangolo si chiama *baricentro* del medesimo.

**166. Teorema.** — *In ogni triangolo il segmento, che unisce un vertice con un punto del lato opposto, passando per il punto medio della mediana relativa ad uno degli altri due lati, è diviso da questo punto in due parti, in modo che quella che termina al vertice è il triplo dell'altra parte.*

Sia ABC (fig. 131) il triangolo dato, MN la congiungente i punti medi dei lati AB, AC del triangolo ed AD il segmento, che ha per estremi il vertice A ed il punto D del lato opposto, e che contiene il punto medio H della mediana BN. Essendo P il punto d'incontro di MN con AD, si osservi che nel triangolo ABN, essendo M, H i punti medi di due lati, MN ed AH sono due mediane, e quindi AP è il doppio di HP. Ma dai triangoli HPN, BHD eguali, perchè hanno $HN \equiv BH$ per costruzione, $P\widehat{H}N \equiv B\widehat{H}D$, come opposti al vertice, ed $H\widehat{N}P \equiv H\widehat{B}D$, come alterni interni rispetto alle parallele MN, BC e alla trasversale BN, si ricava $HD \equiv HP$; dunque $AH \equiv 3 . HD$.

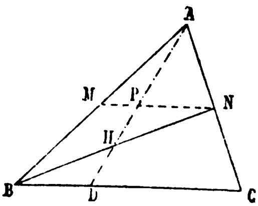


Fig. 131.

**167. Definizione 1ª** — Un segmento, che ha per estremi un vertice di un tetraedro ed il baricentro della faccia opposta, si chiama *mediana* del tetraedro.

**Teorema.** — *I segmenti, che hanno per estremi i punti medi delle coppie di spigoli opposti di un tetraedro, si dividono scambievolmente per metà in uno stesso punto, il quale è comune anche alle mediane del tetraedro, e divide ciascuna di esse in due parti, di cui quella che termina al vertice è tripla dell'altra.*

Sia ABCD (fig. 132) il tetraedro dato. Il piano $B'C'C_1B_2$, condotto per il punto medio dello spigolo AB parallelamente ai due spigoli opposti BC, AD, divide pure per metà anche gli spigoli AC, CD, BD. Infatti la retta C′B′ essendo parallela alla base CB del triangolo ACB, e passando per il punto medio B′ dal lato AB, divide per metà anche il lato AC (§ 85 Teor.), ecc. Inoltre, sappiamo (§ 142 Teor.) che la sezione $B'C'B_2C_2$ è un parallelogrammo; quindi le diagonali $B'C_2$, $B_2C'$, che sono le congiungenti i punti medi di due coppie di spigoli opposti, s'incontrano nel punto O, e si dividono in esso scambievolmente per metà.

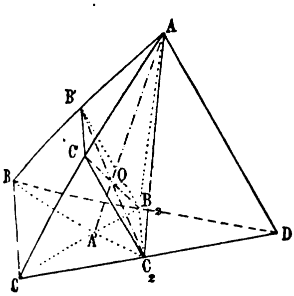


Fig. 132.

Se ora si considera la congiungente i punti medi della rimanente coppia di spigoli opposti BC, AD ed una delle precedenti, si dimostra nella stessa guisa, che esse hanno un punto comune, che le divide per metà; ma si è dimostrato che questo punto è O, dunque tutte tre le congiungenti passano per O,

Si osservi ora che i piani $CAB_2$, $BAC_2$, tagliano la faccia BCD secondo le mediane $CB_2$, $BC_2$ del triangolo BCD, e quindi hanno in co-

mune la retta AA′, la quale contiene il punto O e il baricentro A′ della faccia BCD. È poi evidente che $B_2C'$ è una mediana del triangolo $B_2AC$, e che quindi (§ 166 Teor.) il segmento AA′ è diviso dal punto O, in modo che $AO \equiv 3 . OA'$. Analoga dimostrazione si può ripetere per le altre mediane.

**Definizione 2ª.** — Il punto d'incontro delle mediane di un tetraedro dicesi *baricentro* del medesimo.

ALCUNI PROBLEMI.

**168.** Abbiamo visto (§ 58 Teor. 1°), che per un punto di un piano si può condurre in esso una ed una sola retta perpendicolare ad una retta del piano medesimo, e che (§ 36 Cor. 3° e § 37 Post. X) per un punto, preso fuori di una retta, passa una ed una sola retta parallela ad essa. Inoltre nei §§ 54 e 55 abbiamo veduto, che è sempre possibile dividere un segmento in *n* parti eguali, ed un angolo in 2, 4, 8, 16,... parti eguali. Ci proponiamo ora di dare alcune semplici costruzioni relative a siffatte quistioni, le quali sono di uso frequentissimo nella risoluzione grafica dei problemi, e premettiamo a tale scopo il seguente

**Teorema.** — *Se due circoli situati in un piano hanno raggi eguali e la distanza dei loro centri è minore del doppio del raggio, essi si tagliano in due punti.*

Siano O, O′ (fig. 133) i centri dei due circoli $c, c'$, ed R il loro raggio. Se sulla retta OO′, a partire da O e dalle due parti di esso, si portano due segmenti OA, OB eguali ad R, è chiaro che i loro estremi A, B sono i punti d'incontro della retta OO′ col circolo *c*. Di questi due punti quello A, che si trova rispetto ad O dalla parte opposta di O′, ha da O′ una distanza $O'A \equiv O'O + OA$, maggiore di R, e perciò è esterno al circolo $c'$; l'altro punto B, se OO′ è maggiore di R, ha da O′ una distanza $O'B \equiv OO' - R$, minore di R (essendo $OO' < 2R$); se OO′ è eguale ad R, coincide con O′; se finalmente OO′ è minore di R, ha da O′ una distanza $R - OO'$, ossia minore di R. In ogni caso dunque il punto B è interno al circolo $c'$. Il circolo *c* allora, avendo un punto A esterno ed uno B interno al circolo $c'$, lo taglia almeno in due punti (§ 27 Cor. 1°).

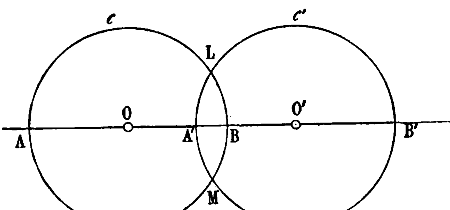


Fig. 133.

È facile inoltre convincersi che i due circoli $c, c'$ non possono avere più di due punti comuni; perchè, se ne avessero tre L, M, N, ciascuno di questi, essendo equidistante da O e O′, dovrebbe trovarsi sulla perpendicolare nel punto di mezzo di OO′ (§ 160 Teor.), ed allora da O e da O′ si potrebbero condurre a questa perpendicolare tre segmenti eguali, e ciò è assurdo (§ 158 Cor. 1°).

**169. Problema.** — *Per un punto, dato sopra una retta, condurre una perpendicolare a questa retta.*

Sia A il punto dato sulla retta *a*. Descriviamo col centro in A e con un raggio qualunque un circolo, che incontrerà la *a* in due punti B, C (§ 24). Presi per centri i punti B, C, con uno stesso raggio, maggiore di AB, si descrivano due circoli, i quali (§ 168 Teor.) si tagliano in due punti H, K equidistanti dai punti B, C; perciò la retta HK è perpendicolare a BC, e passa per il suo punto medio A (§ 160 Teor.)

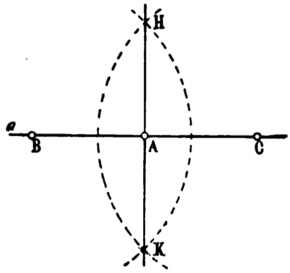


Fig. 134.

**170. Problema.** — *Condurre una retta perpendicolare ad una retta data per un punto dato fuori di essa.*

Preso un punto qualunque M dalla parte opposta a quella dove si trova il punto dato A rispetto alla data retta *a*, si descriva un circolo con raggio AM e col centro in A. Questo circolo taglierà la *a* in due punti B, C (§ 83 Cor. 4°).

Prendendo per centri i due punti B, C, si descrivano con un medesimo raggio, maggiore della metà di BC, due circoli. Essi si taglieranno in due punti H, K (§ 168). Ciascuno dei punti A, H, K essendo equidistante da B, C, essi si trovano tutti sopra una retta perpendicolare a BC nel suo punto di mezzo, e questa è la perpendicolare richiesta.

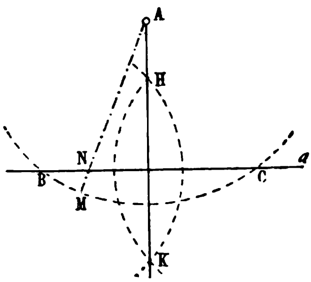


Fig. 135.

**171. Problema.** — *Per un punto condurre una retta parallela a una retta data.*

Conduciamo la retta, che passa per il punto dato A e per un punto qualunque B della data retta *a*; quindi ripetendo la costruzione del § 95, si conduca per il punto A una retta, che colla AB formi un angolo $\widehat{BAD}$ eguale al suo alterno interno $\widehat{ABC}$. La AD sarà la retta domandata (§ 160 Teor.)

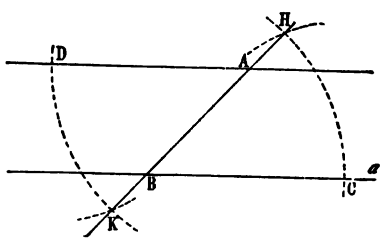


Fig. 136.

**172. Problema.** — *Dividere un segmento dato per metà.*

Vedemmo già (§ 54 Teor.) come si possa dividere un segmento qualunque in *n* parti eguali. Quando si vuol dividere un segmento solamente in due parti eguali, alla costruzione generale, indicata nel citato §, è forse preferibile la seguente:

Si descrivano due circoli con raggio maggiore della metà del dato segmento BC (fig. 135), e aventi per centri gli estremi del segmento stesso. Questi due circoli si devono tagliare in due punti H, K (§ 168 Teor.) Essendo ciascuno di questi punti equidistante dai punti B, C, la loro congiungente è perpendicolare alla retta BC, e passa per il punto medio A del segmento BC (§ 160 Teor.)

**173. Problema.** — *Dividere un angolo in due parti eguali.*

Si descriva con raggio qualunque un circolo, avente per centro il vertice A dell'angolo dato, il quale incontrerà i lati in due punti B, C. Si descrivano poi due circoli, aventi per centri i punti B, C, con un medesimo raggio maggiore della metà della distanza BC. Questi due circoli si tagliano in due punti H, R. La retta che passa per uno qualunque di essi, per es. H, e per il vertice A è la bisettrice dell'angolo dato.

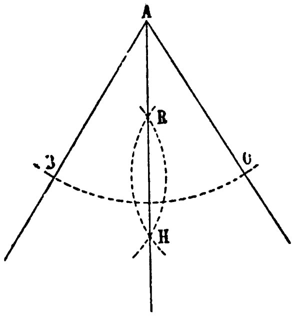



Fig. 137.

Infatti, condotte le rette BH, HC, si hanno i due triangoli ABH, ACH eguali, perchè hanno i tre lati rispettivamente eguali per costruzione. Ne segue $\widehat{BAH} \equiv \widehat{HAC}$.

Siccome sappiamo che la bisettrice di un angolo è unica, i punti H, R, A sono in linea retta.

Ripetendo la costruzione indicata per i due angoli $\widehat{BAH}$, $\widehat{HAC}$, l'angolo dato resterà diviso in quattro parti eguali. Dividendo poi per metà ciascuno degli angoli ottenuti, l'angolo dato sarà diviso in 8 parti eguali, e, proseguendo, nella stessa guisa, si potrà dividerlo in 16, 32, 64...... parti eguali ecc.

Non si conosce però nessuna costruzione, nella quale si faccia uso soltanto di rette e di circoli, per mezzo della quale si possa dividere un angolo qualunque in un numero di parti eguali diverso dai numeri 2, 4, 8, 16......

# ESERCIZI

## TEOREMI.

**75.** Ciascun lato di un triangolo è minore dèl semiperimetro del triangolo.

**76.** La somma delle distanze di un punto interno ad un triangolo dai tre vertici è minore del perimetro, e maggiore del semiperimetro del triangolo.

**77.** La somma delle altezze di un triangolo è minore del perimetro.

**78.** La bisettrice dell'angolo esterno di un triangolo isoscele, conseguente all'angolo compreso fra i lati eguali, è parallela alla base; e viceversa.

**79.** Secondo che una mediana di un triangolo è maggiore, eguale, o minore della metà del lato a cui è condotta, l'angolo opposto a questo lato è acuto, retto, od ottuso; e viceversa.

**80.** Se due triangoli hanno un lato e le altezze, corrispondenti agli altri due lati, rispettivamente eguali, essi sono eguali.

**81.** Se due triangoli isosceli hanno l'angolo al vertice e la mediana, uscente da questo vertice, rispettivamente eguali, essi sono eguali.

**82.** Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo equilatero formano intorno al loro punto d'incontro angoli eguali.

**83.** In un triangolo isoscele, se un angolo alla base è la quarta parte dell'angolo al vertice, la perpendicolare alla base, condotta per un suo estremo, forma con uno dei lati eguali e col prolungamento dell'altro un triangolo isoscele.

**84.** Se si congiunge un punto della bisettrice di un angolo esterno di un triangolo dato con gli altri due vertici del triangolo medesimo, si ottiene un nuovo triangolo, di cui il perimetro è maggiore del perimetro del triangolo dato.

**85.** Se per un punto qualunque della base di un triangolo isoscele si tirano le parallele agli altri due lati, si forma un parallelogrammo, il cui perimetro è costante.

**86.** In ogni poligono, avente un numero pari di lati, la somma delle diagonali, che uniscono due a due i vertici, in modo che in ciascun vertice termini una sola diagonale, è minore della somma delle distanze di un punto interno qualsiasi dai vertici del poligono.

**87.** In un triangolo qualunque,

1° ciascuna mediana è minore della semisomma dei due lati concorrenti con essa, ed è maggiore della loro semidifferenza;

2° la somma delle tre mediane è minore del perimetro, e maggiore del semiperimetro del triangolo.

**88.** Se due lati di un triangolo sono disuguali,

1° la mediana relativa al terzo lato fa col maggiore dei primi due lati angolo minore;

2° l'altezza relativa al terzo lato fa col lato maggiore angolo maggiore;

3° la bisettrice dall'angolo compreso fra questi lati è interna all'angolo, formato dalla mediana e dell'altezza, uscenti dallo stesso vertice.

**89.** Se due triangoli hanno due lati e una mediana rispettivamente eguali, essi sono eguali.

**90.** In ogni triangolo a lati eguali corrispondono mediane e bisettrici eguali, al lato maggiore corrispondono mediana e bisettrice minore, e viceversa.

**91.** I tre segmenti, che hanno per estremi i punti medi di una coppia di lati opposti o delle diagonali di un quadrangolo, passano per un punto, ed in esso si tagliano per metà.

**92.** Le rette che congiungono due punti A, B con due punti E, F di una retta che passa per il punto medio del segmento AB, s'incontrano in due punti C, D, situati sopra una parallela ad AB.

**93.** Le altezze di un triangolo sono le bisettrici degli angoli interni del triangolo, che ha per vertici i tre termini delle altezze medesime.

**94.** Essendo D, E, F rispettivamente i punti medi dei lati BC, CA, AB di un triangolo ABC, si conduca DG parallela alla mediana BE fino ad incontrare il prolungamento di EF. Dimostrare che i tre lati del triangolo DGA sono rispettivamente eguali alle tre mediane del triangolo ABC.

**95.** Se ABC è un triangolo equilatero, ed O è il punto d'incontro delle mediane del triangolo, le perpendicolari a BO e CO nei loro punti medii tagliano il lato BC in tre parti eguali.

**96.** Se per tre punti, presi ad arbitrio sui lati di un triangolo dato, si conducono tre rette, in modo che facciano colle rette del triangolo angoli rispettivamente eguali, le tre rette, incontrandosi, formano un nuovo triangolo, che ha gli angoli rispettivamente eguali a quelli del triangolo dato.

**97.** Se in un triangolo rettangolo un angolo acuto è doppio dell'altro, l'ipotenusa è doppia del cateto minore; e viceversa.

**98.** Se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo incontra la retta del lato opposto, l'angolo acuto da esse formato è eguale alla semidifferenza dei due angoli del triangolo, non conseguenti all'angolo esterno considerato.

**99.** La differenza di due angoli di un triangolo è eguale al doppio dell'angolo compreso fra l'altezza e la bisettrice, uscenti dal vertice del terzo angolo.

**100.** L'angolo compreso fra la mediana e l'altezza, uscenti dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo, è eguale alla differenza dei due angoli acuti del triangolo.

**101.** La bisettrice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo divide per metà anche l'angolo formato dalla mediana e dall'altezza, uscenti dal vertice dell'angolo retto medesimo.

**102.** Se due triangoli rettangoli hanno le ipotenuse eguali, ed un cateto dell'uno è maggiore di un cateto dell'altro, il rimanente cateto del primo è minore del rimanente cateto del secondo.

**103.** Se sui lati AC, CB di un triangolo ABC si costruiscono i quadrati, essendo E il vertice del quadrato, costruito sopra AC, più vicino ad A, e D il vertice del quadrato, che ha per lato CB, più vicino B, dimostrare che le rette AD, BE si incontrano sulla perpendicolare ad AB condotta per C.

**104.** Gli angoli, formati dalle bisettrici di due angoli interni di un triangolo, sono eguali ad un angolo retto, aumentato o diminuito della metà del terza angolo.

**105.** Se per il punto d'incontro delle bisettrici di due angoli interni, od esterni, di un triangolo si conduce una parallela ad una retta del triangolo, il segmento di essa, compreso fra le altre due rette del triangolo, è eguale alla somma, o alla differenza, dei segmenti di queste compresi, fra le due parallele.

**106.** La distanza di un vertice di un triangolo da un punto del lato opposto è maggiore della metà della differenza ottenuta, sottraendo questo lato dalla somma degli altri due.

**107.** I punti medii dei lati di un quadrangolo piano o gobbo sono vertici di un parallelogrammo; e se il quadrangolo dato è un parallelogrammo, le diagonali dei due parallelogrammi passano per uno stesso punto.

**108.** I punti medii dei lati di un rettangolo sono vertici di una losanga, e i punti medii dei lati di una losanga sono vertici di un rettangolo.

**109.** La mediana di un trapezio passa per i punti medii delle diagonali.

**110.** Il segmento, che congiunge i punti medii delle diagonali di un trapezio, è eguale alla semidifferenza delle basi.

**111.** La distanza del baricentro di un triangolo da un piano è eguale alla media aritmetica delle distanze dei tre vertici dal medesimo piano.

**112.** La distanza del baricentro di un tetraedro da un piano è eguale alla media aritmetica delle distanze dei quattro vertici dal piano medesimo.

**113.** Se un parallelogrammo ha i vertici sopra i lati di un rettangolo, ed ha due suoi lati opposti equidistanti da una diagonale del rettangolo, il suo perimetro è eguale alla somma delle diagonali del rettangolo.

**114.** In un triangolo il punto equidistante dai vertici, il baricentro ed il punto d'incontro delle altezze sono in linea retta, e la distanza del primo punto dal secondo è metà della distanza del secondo punto dal terzo.

**115.** In un triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante.

**116.** In un triangolo isoscele la differenza delle distanze di un punto preso sul prolungamento della base dalle altre due rette del triangolo è costante.

**117.** Qualunque segmento, condotto per il punto medio della base di un triangolo isoscele, il quale abbia gli estremi sopra uno dei lati eguali e sul prolungamento dell'altro lato, è maggiore della base del triangolo dato.

**118.** La somma delle distanze di un punto interno ad un triangolo equilatero dai tre lati del medesimo triangolo è costante.

**119.** Se da un punto interno ad un triangolo equilatero si tirano le parallele ai lati, la somma dei segmenti interni al triangolo è eguale al doppio di un lato.

**120.** In un triangolo equilatero la differenza fra la somma delle distanze di un punto esterno ad esso, ma interno ad uno de' suoi angoli, dai lati di quest'angolo, e la distanza dello stesso punto dalla retta del terzo lato è costante.

**121.** Se AB, CD sono due rette parallele, ed E, F sono i punti d'incontro delle rette, che congiungono due punti A, B dell'una con due punti C, D dell'altra, la retta EF divide per metà i segmenti AB, CD.

**122.** Se due vertici opposti di un parallelogrammo si uniscono coi punti medii di due lati opposti, la diagonale, che termina agli altri due vertici, resta divisa in tre parti eguali.

**123.** Se E, F sono le proiezioni di due vertici B e C di un triangolo ABC sopra una retta qualunque condotta per il terzo vertice A, il punto medio del lato BC è equidistante dai punti E ed F.

**124.** Se si congiungono due punti, presi sopra una diagonale di un parallelogrammo ad eguale distanza dai suoi estremi, con gli altri due vertici del parallelogrammo, il quadrangolo che si ottiene è un parallelogrammo.

**125.** Ogni segmento, che ha gli estremi sopra due lati opposti di un parallelogrammo, e passa per il punto d'intersezione delle diagonali, è diviso da questo punto per metà, e divide il parallelogrammo in due quadrangoli eguali; ossia un parallelogrammo è simmetrico rispetto al punto d'incontro delle sue diagonali.

**126.** Le bisettrici degli angoli interni di un parallelogrammo formano un rettangolo, le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogrammo, ed eguali alla differenza di due lati consecutivi del parallelogrammo dato.

**127.** Le bisettrici degli angoli interni, od esterni, di un rettangolo formano un quadrato.

**128.** Le bisettrici degli angoli interni di un quadrilatero convesso formano un secondo quadrilatero, i cui angoli opposti sono supplementari.

**129.** Le bisettrici di due angoli successivi di un quadrangolo convesso formano un angolo, che è eguale alla semisomma degli altri due angoli del quadrangolo.

**130.** Se le bisettrici di due angoli opposti di un quadrangolo convesso si tagliano, formano un angolo eguale alla semidifferenza degli altri due angoli del quadrangolo.

**131.** Se i lati opposti di un quadrangolo convesso s'incontrano, le bisettrici degli angoli così ottenuti si tagliano, e formano un angolo eguale alla semisomma di due angoli opposti del quadrangolo.

**132.** Se due trapezi hanno i lati rispettivamente eguali e disposti nello stesso modo, sono eguali.

**133.** Per il vertice A di un parallelogrammo ABCD si conduca una retta qualunque AX. Dimostrare che la distanza del vertice C dalla retta AX è eguale alla somma, o alla differenza, delle distanze dei vertici B e D dalla stessa retta, secondochè essa è esterna al parallelogrammo, oppure taglia il suo contorno in un altro punto.

**134.** Se per i vertici di un parallelogrammo si conducono quattro segmenti paralleli, che terminino ad una retta (o ad un piano) che non tagli il suo contorno, la somma dei segmenti, che partono da due vertici opposti, è eguale alla somma degli altri due.

**135.** La somma, o la differenza, delle distanze di un punto da due lati consecutivi di una losanga è eguale alla somma, o alla differenza, delle distanze dello stesso punto dagli altri due lati.

**136.** Se in un trapezio una base è doppia dell'altra, la sezione media è divisa in tre parti eguali dalle diagonali.

**137.** La somma delle diagonali di un quadrangolo convesso è minore del perimetro, ed è maggiore del semiperimetro.

**138.** Le diagonali di un tronco di piramide, avente per basi due parallelogrammi, si incontrano in un punto.

**139.** Dimostrare, indipendentemente dal teorema del § 90, che due triangoli sono eguali, se hanno i lati rispettivamente eguali.

**140.** Se sui lati AB, BC, CD, DA di un quadrato si prendono dei segmenti AA′, BB′, CC′, DD′ eguali fra loro, i punti A′, B′, C′, D′ sono i vertici di un altro quadrato.

**141.** Se una retta incontra le facce di un diedro in punti egualmente distanti dallo spigolo, essa fa angoli eguali coi piani delle due facce. E viceversa.

**142.** Se per un punto della costola di un diedro si conduce in una delle facce la semiretta perpendicolare, e nell'altra una semiretta obliqua alla costola, l'angolo delle due semirette sarà maggiore, eguale o minore del rettilineo del diedro, secondo che il diedro è acuto, retto od ottuso.

**143.** Se una retta forma angoli eguali con tre rette non parallele di un piano, essa è perpendicolare al piano.

**144.** Se una retta è perpendicolare ad un piano, e dal punto d'intersezione si conduce una perpendicolare ad una retta qualunque del piano stesso, e che la taglia, la congiungente un punto qualsiasi della prima retta col punto d'intersezione dell'altre due è perpendicolare alla retta del piano.

**145.** Il punto d'incontro delle altezze del triangolo, ottenuto tagliando con un piano un triedro trirettangolo, è la proiezione del vertice del triedro sul piano della sezione.

**146.** In un triedro la somma degli angoli, formati da ciascuno spigolo colla bisettrice della faccia opposta, è minore della somma delle facce.

**147.** In ogni triedro isoedro il piano bisettore del diedro, compreso tra le facce eguali, passa per la bisettrice della faccia opposta.

**148.** In ogni triedro isoedro gli angoli, formati dagli spigoli dei diedri eguali colle bisettrici delle facce opposte, sono eguali.

**149.** In ogni triedro isoedro gli angoli, formati dagli spigoli dei diedri eguali colle facce opposte, sono eguali.

**150.** I tre piani perpendicolari alle facce di un triedro, condotti per gli spigoli opposti, passano per una medesima retta.

**151.** I tre piani, che passano per gli spigoli di un triedro e per le bisettrici delle facce opposte, passano per una medesima retta.

**152.** I tre piani perpendicolari alle facce di un triedro, condotti per le loro bisettrici, passano per una medesima retta.

**153.** Se per il vertice di un triedro e nel piano di ciascuna faccia si conduce una perpendicolare allo spigolo opposto, le tre perpendicolari ottenute giacciono in un piano.

**154.** Ogni piano, perpendicolare ad uno degli spigoli di un triedro rettangolo, taglia questo triedro secondo un triangolo rettangolo.

**155.** La somma degli angoli, formati da ciascuno spigolo di un triedro con la faccia opposta, è minore della somma delle facce, ed è maggiore della loro semisomma.

**156.** Se per un punto interno ad un angoloide convesso si tirano le perpendicolari a tutte le facce, il nuovo angoloide così ottenuto è supplementare dell'opposto al vertice di quello dato.

**157.** Se per un punto della costola di un diedro si conduce una retta ad essa perpendicolare, ma non perpendicolare alle facce, di tutti gli angoli che si otten-

gono, tagliando il diedro con piani condotti per quella retta, il minore è la sezione normale.

**158.** Da ciascun punto di una retta, che passa per il vertice di un triedro, si conducano le perpendicolari alle facce di un triedro. I tre punti d'incontro delle perpendicolari suddette con i piani delle tre facce individuano un piano, e tutti i piani così ottenuti sono paralleli.

**159.** Se per ciascun punto di una retta, che passa per il vertice di un triedro, si conducono tre piani perpendicolari agli spigoli del medesimo triedro, i tre punti d'incontro di questi piani con gli spigoli perpendicolari ad essi individuano un piano. Tutti i piani così ottenuti sono paralleli.

**160.** Se in un triedro la sezione normale di un diedro è eguale alla faccia opposta, anche le altre due facce sono eguali o supplementari alle sezioni normali dei diedri opposti.

**161.** Due prismi triangolari sono eguali, se hanno le facce laterali rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo.

**162.** Ogni segmento, che ha gli estremi sulla superficie di un parallelepipedo, e passa per il punto d'intersezione delle diagonali, è diviso da questo punto per metà. Ossia un parallelepipedo è simmetrico rispetto al punto d'incontro delle sue diagonali.

**163.** Le congiungenti i centri delle facce opposte di un parallelepipedo passano per il punto comune alle diagonali, ed in esso si dividono per metà.

**164.** I tre segmenti, che hanno per estremi i vertici di una delle basi di un prisma triangolare e i punti di mezzo degli spigoli opposti dell'altra base, passano per un punto della congiungente i baricentri delle due basi, il quale le divide in due parti, una doppia dell'altra.

**165.** I tre piani, individuati dai vertici di una base di un prisma triangolare e dai lati rispettivamente opposti dall'altra base, passano per uno stesso punto della retta, che congiunge i baricentri delle due basi.

**166.** I tre piani, individuati dagli spigoli laterali di un prisma triangolare e dai baricentri delle facce opposte, passano per una stessa retta.

**167.** Un piano, parallelo a due spigoli opposti di un tetraedro, e condotto per il baricentro del medesimo, è equidistante da quei due spigoli.

**168.** Se si taglia un prisma, o una piramide, con un piano non parallelo alla base, i punti d'incontro delle rette del poligono sezione con le corrispondenti rette del poligono base sono situati sopra una linea retta.

**169.** Se una piramide ha per facce laterali triangoli eguali ed isosceli, la somma delle distanze di un punto della base da quelle facce è costante.

**170.** Se le rette, che uniscono i vertici di un tetraedro ai vertici di un altro tetraedro, passano per un punto, le rette d'intersezione delle coppie di piani corrispondenti dei due tetraedri sono in un piano. E viceversa.

**171.** Se due altezze di un tetraedro s'incontrano, anche le altre due altezze s'incontrano.

**172.** Se AB, CD sono due segmenti, che scorrono su due rette $r$, $s$, ed H, K, H′, K′ sono i punti medii dei segmenti AC, AD, BC, BD i segmenti HK′, H′K sono costanti.

Se le rette $r$, $s$ sono perpendicolari, allora è HK′ $\equiv$ H′K.

**173.** Dimostrare, indipendentemente dal teorema del § 122, che due triedri sono eguali, se hanno le facce rispettivamente eguali e disposte nello stesso modo.

**174.** Un segmento, che ha i suoi estremi su due spigoli opposti di un tetraedro, e che incontra la congiungente i punti di mezzo di altri due spigoli opposti, è da questa diviso per metà.

**175.** Se in un tetraedro le facce sono eguali,

*a)* le altezze sono eguali,

*b)* la distanza del punto, interno al tetraedro ed equidistante dai piani del medesimo, è eguale ad un quarto dell'altezza,

*c)* il baricentro del tetraedro è equidistante dai piani del medesimo,

*d)* i quattro punti equidistanti dai piani del tetraedro, esterni ad esso, ma interni ai suoi triedri rispettivamente, formano un tetraedro, i cui spigoli sono paralleli a quelli del primitivo,

*e)* il diedro di due facce è eguale a quello delle altre due,

*f)* i quattro triedri sono eguali,

*g)* le congiungenti i punti medii degli spigoli opposti sono fra loro perpendicolari due a due,

*h)* il baricentro è equidistante dalle quattro altezze.

**176.** Se per gli spigoli di un tetraedro a facce eguali si conducono piani paralleli agli spigoli opposti, si ottiene un parallelepipedo rettangolo.

**177.** Se in un tetraedro due facce sono eguali, la somma delle perpendicolari, condotte ad esse da un punto dello spigolo opposto a quello comune alle due facce medesime, è costante.

**178.** La somma delle distanze di un punto interno ad un tetraedro, le cui facce sono triangoli equilateri, dalle quattro facce è costante. Come deve essere modificato il teorema per i punti esterni al tetraedro?

**179.** Se due coppie di spigoli opposti di un tetraedro sono perpendicolari, anche i due rimanenti spigoli sono perpendicolari, e le quattro altezze passano per un punto. Tale tetraedro si dice rettangolo.

**180.** In un tetraedro rettangolo:

*a)* le quattro altezze passano per un punto, per il quale passano anche le rette, che sono perpendicolari a due spigoli opposti e li incontrano,

*b)* la somma dei 12 angoli, che ciascuno spigolo fa coi piani delle facce, nelle quali non è contenuto, aumentata delle sezioni normali dei sei diedri, è eguale a sei angoli piatti.

**181.** Se per gli spigoli di un tetraedro rettangolo si conducono i piani perpendicolari agli spigoli opposti, questi sei piani passano per lo stesso punto.

**182.** Le perpendicolari alle facce di un tetraedro rettangolo, condotte per i baricentri delle medesime, passano per un punto.

**183.** I punti medii dei segmenti, che uniscono due a due i vertici di due triangoli dati, sono vertici di un nuovo triangolo, che ha per baricentro il punto medio del segmento, che unisce i baricentri dei due triangoli dati.

**184.** Dati cinque punti in un piano, o nello spazio, tali che tre di essi non sieno in linea retta, si possono formare con essi dieci triangoli. I dieci segmenti, che congiungono il baricentro di ciascuno di quei triangoli col punto medio del segmento individuato dagli altri due punti, passano tutti per uno stesso punto, ed in esso si tagliano in due parti, delle quali una è i $\frac{2}{3}$ dell'altra.

**185.** Dati sei punti nello spazio, tali che quattro non sieno in un piano, si possono formare quindici terne di segmenti, aventi per estremi i sei punti medesimi. I quindici piani, individuati dai punti medii delle quindici terne di segmenti, passano tutti per un punto.

**186.** Dati sei punti in un piano, o nello spazio, tali che quattro di essi non sieno in un piano, si possono formare dieci coppie di triangoli. I dieci segmenti, che congiungono i baricentri di due triangoli di una coppia, passano tutti per un punto, ed in esso si tagliano per metà.

## LUOGHI.

**187.** Trovare il luogo dei punti di un piano, che equidistano da due punti dati fuori del piano.

**188.** Trovare il luogo dei punti di un piano tali, che la somma, o la differenza, delle loro distanze da due rette fisse del medesimo piano sia eguale ad un segmento dato.

**189.** Dato un angolo $A\widehat{O}B$, trovare il luogo dei punti M dello spazio tali, che la somma delle proiezioni del segmento OM su i due lati dell'angolo sia costante.

**190.** Trovare il luogo dei punti tali, che la somma delle loro distanze da due piani dati sia eguale ad un segmento dato.

**191.** Trovare il luogo dei punti tali, che la somma delle loro distanze da tre piani dati sia eguale ad un segmento dato.

**192.** Trovare il luogo dei punti equidistanti da tre piani paralleli ad una stessa retta.

**193.** Trovare il luogo dei punti equidistanti da tre rette parallele non situate in un piano.

**194.** Il piano di un triangolo si muove parallelamente a sè stesso, in modo che due vertici scorrono su due rette parallele. Qual'è il luogo del terzo vertice?

**195.** Trovare il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre spigoli di un triedro.

**196.** Luogo dei punti dello spazio equidistanti da due rette di un piano.

**197.** Luogo dei punti equidistanti da due rette sghembe.

**198.** Luogo dei punti di una sfera equidistanti da due punti non situati in esso.

**199.** Luogo dei punti di mezzo dei segmenti, che hanno un estremo in un punto fisso e l'altro estremo sopra un circolo, oppure sopra una sfera.

**200.** Per un punto dello spazio si conducano i piani perpendicolari alle rette di un piano, condotte per un punto. Qual'è il luogo dei punti d'incontro di questi piani colle rette ad essi perpendicolari?

**201.** Luoghi dei baricentri, dei punti d'incontro delle altezze, dei punti equidistanti dai vertici, oppure dalle rette dei triangoli, che si ottengono, tagliando un triedro con una serie di piani paralleli.

**202.** Dato un prisma triangolare indefinito ed una sua sezione fissa, si conducano quanti piani si vogliano, paralleli alla sezione fissa.

*a)* I tre piani, individuati dai lati della sezione fissa coi punti d'incontro dei tre spigoli opposti con un altro piano, passano per un punto. Qual'è il luogo di questi punti?

*b)* Due dei piani suddetti si tagliano secondo una retta. Qual'è il luogo di tali rette?

**203.** Luogo dei vertici dei parallelogrammi inscritti in un triangolo.

**204.** Luogo dei centri dei parallelogrammi, che hanno i vertici sopra i lati di un quadrangolo piano, o gobbo.

**205.** Trovare il luogo del punto medio di un segmento dato, i cui estremi scorrono sopra due rette perpendicolari situate in un piano.

**206.** Trovare il luogo dei vertici dei triangoli rettangoli, che hanno l'ipotenusa in comune.

**207.** In un quadrangolo sono dati tre lati e una diagonale. Trovare il luogo del punto medio dell'altra diagonale.

**208.** In un quadrangolo sono dati tre lati e una diagonale. Trovare il luogo del punto medio del segmento, che congiunge i punti medii delle due diagonali.

**209.** Date in un piano due rette $a$, $b$, che s'incontrano, ed un punto P sopra una di esse, p. es. $a$, trovare il luogo dei punti tali che, conducendo per essi le parallele alla retta $b$, il segmento compreso fra il punto stesso e l'intersezione colla retta $a$, sia eguale alla distanza di questa intersezione dal punto fisso.

**210.** Luogo dei baricentri dei triangoli rettangoli che hanno la medesima ipotenusa.

**211.** Luogo dei centri dei parallelogrammi, che si ottengono, tagliando con piani paralleli a due spigoli opposti, i piani di un tetraedro.

**212.** Si tagli un triedro con una serie di piani paralleli, e per i punti d'incontro di ciascuno di questi piani coi tre spigoli si conducano tre piani rispettivamente perpendicolari agli spigoli stessi. Questi tre piani s'incontrano in un punto, il luogo del quale è una retta, che passa per il vertice del triedro.

**213.** Se si taglia un triedro con piani paralleli, e per le rette d'intersezione di ciascuno di questi piani colle facce si conducono tre piani rispettivamente perpendicolari alle facce stesse, questi si tagliano in un punto, il luogo del quale è una retta che passa per il vertice.

## PROBLEMI.

**214.** Tracciare la bisettrice di un angolo, di cui non si conosce il vertice.

**215.** Sopra una retta data trovare un punto equidistante da due punti, non situati con essa in un piano.

**216.** Per una retta data condurre un piano equidistante da due punti dati.

**217.** Condurre un piano equidistante da quattro punti dati non situati nello stesso piano.

**218.** Per un punto, dato in un piano, condurre nel piano stesso una retta, la cui distanza da un punto, dato fuori del piano, sia eguale ad un segmento dato.

**219.** Dati in un piano una retta e due punti, situati da una stessa parte rispetto alla retta, trovare sulla retta un punto tale, che le congiungenti questo punto coi due punti dati formino angoli eguali colla retta medesima.

**220.** In un piano trovare un punto tale, che la somma delle distanze di esso da due punti dati fuori del piano e situati dalla medesima parte del piano stesso, sia minima.

**221.** Dato un punto sopra ciascuna faccia di un diedro, determinare fra le linee poligonali, che può percorrere un punto, obligato a scorrere sulle due facce, per passar dall'uno all'altro dei punti dati, quella che ha perimetro minore.

**222.** In un dato triangolo ABC condurre un segmento MN parallelo al lato BC, e che termini agli altri due lati, in modo che sia $MN \equiv MB + NC$.

**223.** Dividere un angolo retto in tre parti eguali.

**224.** Trovare sopra un lato di un triangolo un punto, tale che la somma delle sue distanze dagli altri due lati sia minima.

**225.** Trovare nel piano di un triangolo un punto, tale che la somma delle sue distanze dai tre lati sia minima.

**226.** Essendo data una striscia e due punti A, B esterni ad essa e situati da parti opposte di uno dei lati della striscia, trovare una linea poligonale AMNB, tale che il segmento MN, che ha gli estremi sopra i lati della striscia, sia parallelo ad una retta data, e che il perimetro della linea stessa sia minimo.

**227.** Date due rette che si tagliano, condurre per un punto P del loro piano una retta, che incontri le prime due in punti egualmente distanti dal loro punto comune.

**228.** Per un vertice di un triangolo condurre una retta, che divida il lato opposto in due parti una doppia dell'altra, senza far uso di questo lato.

**229.** Dati tre punti, condurre per uno di essi una retta, in modo che la somma delle distanze degli altri due punti da questa retta sia eguale ad un segmento dato.

**230.** Trovare sopra un lato di un angolo un punto, che sia egualmente distante dall'altro e da un punto del primo lato.

**231.** Per un punto, interno ad un angolo, condurre una retta, in modo che il segmento compreso fra i lati dell'angolo sia diviso dal punto in due parti, delle quali una sia doppia dell'altra.

**232.** Per un punto, esterno ad un angolo, condurre ad uno dei lati un segmento, in modo che esso sia diviso dall'altro lato in due parti, delle quali una sia doppia dell'altra.

**233.** Trovare sopra una retta data un punto tale, che la differenza delle sue distanze da due punti dati, situati da parti opposte della retta, sia massima.

**234.** Trovare sopra un piano dato un punto tale, che la differenza delle sue distanze da due punti dati, situati da parti opposte del piano, sia massima.

**235.** Costruire un triangolo, dati due lati e una mediana.

**236.** Costruire un triangolo, dato un lato e due mediane.

**237.** Costruire un triangolo, dato un lato, un angolo adiacente ad esso e la somma degli altri due lati.

**238.** Costruire un triangolo isoscele, dato il perimetro e l'altezza corrispondente alla base.

**239.** Costruire un triangolo, dato il perimetro e due angoli.

**240.** Costruire un triangolo dati due lati e una altezza.

**241.** Costruire un triangolo, dato un lato, un angolo adiacente e una mediana.

**242.** Costruire un triangolo, conoscendo il perimetro, un angolo e l'altezza che termina a uno dei lati dell'angolo dato.

**243.** Costruire un triangolo rettangolo, dato un lato e la differenza dei due angoli acuti.

**244.** Costruire un triangolo rettangolo, dato un angolo acuto e la proiezione del cateto adiacente.

**245.** Costruire un triangolo rettangolo, data la differenza dei cateti e l'angolo opposto ad uno di essi.

**246.** Costruire un triangolo rettangolo, dato un cateto e la differenza degli altri due lati.

**247.** Costruire un triangolo, dato un lato, uno degli angoli adiacenti ad esso e la differenza fra gli altri due lati.

**248.** Costruire un triangolo, dati due angoli e la somma, o la differenza, dei lati opposti ad essi.

**249.** Costruire un triangolo isoscele, data la base e la differenza fra uno dei lati eguali e l'altezza relativa alla base.

**250.** Costruire un triangolo, conoscendo i punti medii dei lati.

**251.** Costruire un triangolo, conoscendo i tre termini delle altezze.

**252.** Costruire un triangolo rettangolo, dato un angolo acuto e la somma dei lati che lo comprendono.

**253.** Costruire un triangolo rettangolo, nel quale uno degli angoli acuti è doppio dell'altro, e la bisettrice dell'angolo retto è eguale ad un segmento dato.

**254.** Costruire un triangolo rettangolo, dato uno dei due angoli acuti e la differenza delle proiezioni dei cateti sulla ipotenusa.

**255.** Costruire un triangolo rettangolo isoscele, data la somma dell'ipotenusa e di un cateto.

**256.** Costruire un triangolo, i cui lati passino per tre punti dati, un lato sia parallelo ad una retta data, e che abbia due angoli eguali a due angoli dati.

**257.** Costruire un triangolo, data un'altezza, la differenza dei segmenti, che essa determina sul lato corrispondente, ed il maggiore degli angoli adiacenti a questo lato.

**258.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato adiacente ad esso e la differenza degli altri due lati.

**259.** Costruire un triangolo, dato un lato, la differenza degli altri due e la differenza degli angoli opposti a questi due lati.

**260.** Costruire un triangolo, date le tre mediane.

**261.** Costruire un triangolo, dato un lato, l'angolo opposto e la somma degli altri due lati.

**262.** Costruire un triangolo, dato un lato, l'angolo opposto e la differenza degli altri due.

**263.** Costruire un triangolo rettangolo, data l'ipotenusa e la differenza delle distanze degli estremi dell'ipotenusa dal punto d'incontro delle bisettrici.

**264.** Costruire un triangolo, conoscendo un lato, la differenza degli angoli adiacenti ad esso e la somma degli altri due lati.

**265.** Costruire un triangolo, conoscendo in grandezza e posizione un lato, la somma degli altri due lati, e sapendo che il vertice opposto al lato dato è situato sopra una retta data.

**266.** Costruire un quadrato, data la somma di un suo lato e di una sua diagonale.

**267.** Costruire un quadrato, conoscendo i quattro punti, in cui i prolungamenti dei lati incontrano una retta data.

**268.** Costruire un parallelogrammo, conoscendo le diagonali ed un lato.

**269.** Costruire un trapezio, dati i lati paralleli e le diagonali.

**270.** Costruire un quadrangolo, conoscendo i lati e il segmento, che unisce i punti medii di due lati opposti.

**271.** Tagliare un angoloide tetraedro con un piano, che passi per un punto dato, in modo che la sezione sia un parallelogrammo.

**272.** Tagliare con un piano un triedro trirettangolo, in modo che la sezione sia un triangolo eguale ad un triangolo dato.

**273.** Trovare sopra una retta data un punto, tale che la somma delle sue distanze da due piani, che si tagliano, sia minima.

**274.** Sovra un biliardo rettangolare, in quale direzione bisogna lanciare una palla, perchè ripassi per il punto di partenza, dopo aver toccate tutte le quattro sponde?

**275.** Sovra un biliardo rettangolare quale via deve seguire una palla per incontrare un'altra palla dopo aver toccate tutte le quattro sponde?

**276.** Costruire un poligono di un numero dispari di lati, essendo dati i loro punti medii.

277. Fra tutti i triangoli di egual base ed eguale altezza qual'è quello che ha il perimetro minore?

278. Essendo disegnate in un piano due rette parallele, dividere un segmento dato sopra una di esse, facendo uso della sola riga, in 2, 4, 8, 16,.... parti eguali.

279. Dato un angolo acuto ed un punto A interno ad esso, trovare sui lati dell'angolo due punti B, C tali, che il triangolo ABC abbia il minor perimetro possibile.

280. Di un triedro isoedro si conosce il rettilineo dei due diedri eguali e la faccia ad essi adiacente — Trovare con costruzioni piane le facce eguali e il rettilineo del terzo diedro.

281. Trovare con costruzioni piane i rettilinei dei diedri di un triedro isoedro, conoscendo le sue facce.

282. Di un triedro isoedro si conosce la faccia adiacente ai diedri eguali e l'angolo, che fa con essa lo spigolo opposto. Trovare con costruzioni piane le facce eguali e i rettilinei dei diedri eguali.

283. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un triedro, conoscendo,

*a)* due facce e il rettilineo del diedro compreso;
*b)* una faccia e i rettilinei dei due diedri adiacenti;
*c)* due facce e il rettilineo del diedro opposto ad uno di essi;
*d)* i rettilinei di due diedri e la faccia opposta ad uno di essi.

284. Trovare con costruzioni piane gli angoli, che formano colle facce di un triedro, le quattro rette secondo le quali si tagliano a tre a tre i piani perpendicolari alle facce stesse, condotti per le bisettrici delle medesime, o degli angoli ad esse conseguenti.

285. Sono dati due punti situati rispettivamente su due facce di un triedro. Si costruisca la distanza del vertice del triedro dalla loro congiungente, e gli angoli, che essa congiungente fa colle facce e con gli spigoli del triedro.

286. Sono dati tre punti situati rispettivamente sulle facce di un triedro. — Si costruisca la distanza del vertice del triedro dal piano individuato da quei tre punti.

287. Conoscendo i punti d'incontro di un piano con gli spigoli di un triedro, trovare la sua distanza dal vertice del triedro, e gli angoli che esso fa con le facce e con gli spigoli del medesimo.

288. Costruire i rettilinei dei diedri, che i piani, individuati dalle coppie di spigoli opposti di un cubo, formano fra loro.

289. Trovare i piani, che tagliano la superficie di un tetraedro secondo una losanga.

290. Dati gli spigoli di un tetraedro, trovare, con costruzioni piane, le congiungenti i vertici coi baricentri delle facce opposte.

291. Costruire le facce di un tetraedro, conoscendo la base e i rettilinei dei diedri che essa fa con le altre tre facce.

292. Costruire un tetraedro, conoscendo la base e gli angoli che l'altezza corrispondente fa colle altre tre facce.

293. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi (spigoli, facce, rettilinei dei diedri) di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza e due spigoli laterali.

294. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza, uno spigolo laterale, e l'angolo che un altro spigolo forma col piano della base.

295. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza e gli angoli che due spigoli laterali fanno col piano della base.

296. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza, uno spigolo laterale e il diedro, che il piano della faccia laterale opposta a questo spigolo fa col piano della base.

297. Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone l'altezza, i tre spigoli laterali, i diedri formati da due facce laterali col piano della base e un lato della base, situato sopra lo spigolo di uno di questi diedri.

298. Trovare con costruzioni piane gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base e gli angoli, che il piano di essa fa con due spigoli laterali e col loro piano.

**299.** Trovare gli elementi di un tetraedro, conoscendone la base, l'altezza e gli angoli che uno spigolo laterale forma con i due spigoli della base concorrenti con esso in un vertice.

**300.** Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di un tetraedro, conoscendone l'altezza, due spigoli laterali e i diedri, che il piano della base forma coi piani delle tre facce laterali.

**301.** Trovare con costruzioni piane tutti gli elementi di una piramide, avente $n$ facce laterali, conoscendone la base e tre spigoli laterali consecutivi.

**302.** Di un tetraedro rettangolo si conosce la base e uno spigolo laterale. Trovare con costruzioni piane gli altri suoi elementi.

**303.** Di un tetraedro a facce eguali si conosce una faccia. Trovare con costruzioni piane tutti gli altri suoi elementi.

**304.** Per una retta, data nel piano di una faccia di un triedro, condurre un piano, che intersechi la superficie del triedro secondo un triangolo rettangolo.

**305.** Per una retta, data nel piano di una faccia di un triedro, condurre un piano, che intersechi la superficie del triedro secondo un triangolo isoscele.

**306.** Tagliare un tetraedro con un piano, in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente i lati eguali a due segmenti dati.

**307.** Tagliare un tetraedro con un piano in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente una diagonale eguale ad un segmento dato.

**308.** Quand'è che la superficie di un tetraedro può essere tagliata da un piano secondo un quadrato?

**309.** Dati gli spigoli di un tetraedro, trovare, con costruzioni piane, i segmenti che congiungono i vertici coi baricentri delle facce opposte.

**310.** Dati gli spigoli di un tetraedro, trovare, con costruzioni piane, i segmenti che congiungono i punti medi delle coppie di spigoli opposti.

**311.** Data la base di una piramide e gli spigoli laterali concorrenti in tre vertici consecutivi della base, trovare, con costruzioni piane, tutte le facce, l'altezza e i segmenti, che hanno per estremi i punti medi di due spigoli qualunque.

# LIBRO TERZO

## CAPITOLO I

### Relazioni fra rette, piani e sfere.

#### 1. — RELAZIONI DI UNA RETTA CON UN CIRCOLO O UNA SFERA, E DI UN PIANO CON UNA SFERA.

**174. Teorema.** — *Data una retta ed un circolo, situati nello stesso piano, oppure una retta ed una sfera,*

*1° la retta ha tutti i suoi punti esterni al cerchio (o alla superficie sferica), se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio;*

*2° la retta ha un solo punto comune col circolo (o colla superficie sferica), e tutti gli altri suoi punti esterni al cerchio (o alla sfera), se la sua distanza dal centro è eguale al raggio;*

*3° la retta ha due punti comuni col circolo (o colla superficie sferica), se la sua distanza dal centro è minore del raggio.*

*E viceversa.*

1°. Sia *a* (fig. 138) una retta, la quale ha dal centro O di un cerchio (o di una sfera) *c* una distanza OA maggiore del raggio. Il punto A è evidentemente esterno al cerchio (o alla sfera) *c*, e, siccome tutti i segmenti obliqui, che dal punto O si possono condurre alla retta *a*, sono maggiori del segmento perpendicolare OA (§ 158 Teor.), così tutti i punti di *a* diversi da A, avendo dal punto O una distanza maggiore del raggio, sono esterni al cerchio (o alla sfera) *c*.

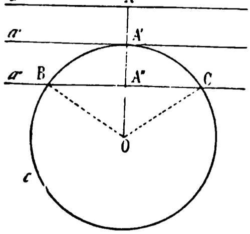


Fig. 138.

2°. Se la retta *a'* ha dal centro O del cerchio (o della sfera) *c* una distanza OA′ eguale al raggio, il punto A′, avendo dal centro O una distanza eguale al raggio, si trova sulla circonferenza (o sulla superficie sferica).

Tutti gli altri punti della retta *a'*, avendo, come abbiamo osservato sopra, una distanza dal centro O maggiore di OA′, saranno esterni.

3°. Se finalmente la distanza OA″ del centro O dalla retta *a″* è minore del raggio, il punto A″ si trova interno al cerchio (o alla sfera), ed allora (§ 83 Cor. 4°) la retta *a″* deve incontrare il circolo o la superficie sferica) in due, e due soli, punti B, C.

I teoremi inversi poi sono veri per la seconda legge delle inverse.

**Definizioni.** — 1ª. Data una retta ed un circolo in un piano, oppure una retta ed una sfera, diremo che la retta è *tangente* o *secante* del circolo (o della superficie sferica) secondo che ha con essa uno o due punti comuni. Chiameremo poi *punto di contatto* o *di tangenza* il punto comune ad un circolo (o ad una superficie sferica), e ad una sua tangente. Un segmento di tangente, che contiene il punto di contatto dicesi pure tangente, mentre per *segmento tangente condotto da un punto ad un circolo* (*o ad una superficie sferica*), intendesi il segmento di tangente, che ha per estremi quel punto e il punto di contatto.

2ª. Chiamasi *corda* di un cerchio o circolo (oppure di una sfera o superficie sferica) il segmento, situato sopra una secante, che ha per estremi i due punti comuni alla secante e al circolo (o alla superficie sferica).

In seguito alle definizioni stabilite il teorema precedente può anche enunciarsi nel modo seguente:

*Una retta, giacente nel piano di un circolo, è esterna, tangente o secante di quel circolo (o di una superficie sferica), secondo che ha dal centro una distanza maggiore, eguale o minore del raggio: e viceversa.*

**Corollari.** — *1°. Tutti i punti di una corda di un cerchio (o di una sfera) sono interni ad esso; i punti dei suoi prolungamenti sono esterni.*

*2°. Una corda di un cerchio o di una sfera è divisa per metà dal diametro ad essa perpendicolare.*

Infatti, se B, C (fig. 138) sono i punti d'incontro di una secante *a″* con un circolo (o una superficie sferica), i due segmenti OB, OC, distanze di B e C dal centro O, sono eguali, e perciò sono pure eguali le loro proiezioni A″B, A″C sulla retta *a″* (§ 158 Teor.) Ogni punto del segmento BC è poi interno al cerchio (o alla sfera), perchè la sua distanza dal centro O è minore del raggio OB, avendo su *a″* una proiezione minore di A″B; e ogni punto di uno dei prolungamenti del segmento BC è esterno al cerchio (o alla sfera), perchè la sua distanza dal centro O è maggiore del raggio OB, avendo su *a″* una proiezione maggiore di A″B (§ 158 Teor.)

*3°. Una secante di un circolo (o di una superficie sferica) è tagliata da questo nei due punti comuni.*

**Definizioni.** — 3ª. Ciascuna delle due parti, in cui una corda divide un cerchio, dicesi *segmento di cerchio.*

4ª. I due estremi di una corda di un cerchio dividono il circolo in due archi, che si dicono *sottesi* dalla corda.

**175. Teoremi.** — *1°. Si può sempre condurre una, ed una sola, tangente a un dato circolo in un suo punto.*

*2°. Si possono condurre infinite rette tangenti ad una superficie sferica in un suo punto. Il luogo di esse è un piano.*

1°. Se A è un punto dato ad arbitrio sul circolo $c$ (fig. 140), la retta $a$, condotta per il punto A nel piano del circolo, perpendicolare al raggio OA, ha dal centro del circolo una distanza eguale al raggio OA, ed è perciò tangente ad esso.

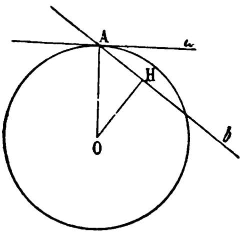


Fig. 140.

Rispetto ad ogni altra retta $b$, condotta per A, il raggio OA risulta obliquo; e perciò una tal retta ha da O una distanza minore del raggio OA, e quindi è una secante.

2°. Se A è un punto di una superficie sferica, fra tutte le rette, condotte per esso, quelle che sono perpendicolari al raggio OA hanno dal centro O una distanza eguale al raggio, e sono perciò tangenti alla sfera; tutte le altre hanno da O una distanza minore del raggio, e sono perciò secanti. Sappiamo poi che il luogo delle rette perpendicolari alla retta OA, condotte per il punto A, è il piano perpendicolare ad OA, condotto per A (§ 60 Teor.)

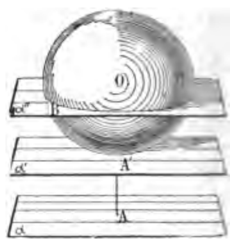
**176. Teoremi.** — *1°. Un piano ha tutti i suoi punti esterni ad una sfera, se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio.*

*2°. Un piano ha un solo punto comune con una superficie sferica e tutti gli altri punti esterni, se la sua distanza dal centro è eguale al raggio.*

*3°. Un piano ha comuni con una superficie sferica tutti i punti di un circolo, se la sua distanza dal centro è minore del raggio.*

*E viceversa.*

1°. Sia $\alpha$ (fig. 141) un piano, che ha dal centro O della sfera S una distanza OA, maggiore del raggio. Il punto A è esterno alla sfera, e tutti gli altri punti del piano $\alpha$, avendo da O una distanza maggiore di OA (§ 158 Teor.), e quindi anche del raggio, sono pure esterni alla sfera.


Fig. 141.

2°. Se il piano $\alpha'$ ha dal centro O della sfera S una distanza OA′ eguale al raggio, il punto A′ giace sulla superficie sferica. Tutti gli altri punti del piano $\alpha'$ hanno da O una distanza maggiore del raggio OA′, e perciò sono esterni alla sfera.

3°. Supponiamo finalmente che un piano $\alpha''$ abbia dal centro O della sfera S una distanza OA″, minore del raggio. L'estremo A″ è evidentemente interno alla sfera, quindi (§ 83 Cor. 4°) ogni retta, condotta per A″, deve incontrare la superficie sferica in due punti, e perciò la superficie sferica S ed il piano $\alpha''$ devono avere in comune infiniti punti. Supponiamo che sia B uno di questi punti: è chiaro che i punti comuni al piano $\alpha''$ e alla superficie sferica S sono quei punti del piano $\alpha''$, che hanno da O una distanza eguale ad OB; il luogo di essi, come è noto, è un circolo di raggio A″B descritto col centro in A″. Tutti i punti del piano $\alpha''$, interni al circolo suddetto, hanno da O una distanza minore del raggio OB, perchè le proiezioni di queste distanze su $\alpha''$ sono minori di A″B, e perciò sono interni alla sfera. Tutti i punti del piano $\alpha''$, esterni al medesimo circolo, hanno da O una distanza maggiore del raggio OB, perchè le proiezioni di queste distanze su $\alpha''$ sono maggiori di A″B, e perciò sono esterni alla sfera.

I teoremi inversi sono veri per la seconda legge delle inverse.

**Definizioni.** — 1ª. Un piano dicesi *tangente* o *secante* di una sfera, secondo che esso ha comune colla superficie della sfera un sol punto, oppure tutti i punti di un circolo. Chiamasi poi punto di *contatto*, o *di tangenza* il punto comune ad una superficie sferica e ad un suo piano tangente.

2ª. Si dice che un circolo è *sopra una sfera,* quando appartiene alla sua superficie.

**Corollari.** — *1°. Un diametro di una sfera, perpendicolare ad un piano secante, incontra questo piano nel centro del circolo d'intersezione.*

*2°. Se una retta è tangente ad una sfera, è anche tangente ai circoli sopra la sfera, situati in piani passanti per la retta; e viceversa, se una retta è tangente ad un circolo sopra una sfera, essa è tangente anche alla sfera.*

Infatti, essendo *r* una retta tangente ad una sfera S, e *c* un circolo sopra la sfera, situato in un piano condotto per *r*, è evidente che *r* e *c* hanno in comune soltanto il punto di contatto di *r* con S; e viceversa, se *r* è tangente al circolo *c*, essa non può avere in comune colla sfera S altro che il punto di contatto con *c*.

**Definizioni.** — 3ª. Un piano secante di una sfera, divide la sfera in due parti dette *segmenti sferici a una base,* e la sua superficie in due parti dette *calotte.* Il circolo, intersezione del piano secante colla superficie sferica, dicesi *base delle due calotte,* e il cerchio compreso dicesi *base dei due segmenti.* La parte di diametro perpendicolare al piano secante, compreso in un segmento sferico, si chiama *altezza di quel segmento e della calotta* corrispondente.

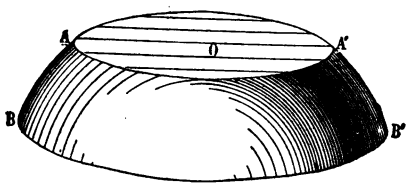


Fig. 142.

4ª. Due piani secanti paralleli dividono la sfera in due segmenti sferici e in una terza parte, compresa fra i due piani, che si chiama *segmento sferico a due basi* (fig. 142); e dividono la superficie della sfera in due calotte e in una terza parte intermedia chiamata zona. Si chiamano *basi* della zona i circoli d'intersezione dei due piani secanti colla sfera; i cerchi da essi compresi sono le *basi* del segmento corrispondente. La parte di diametro perpendicolare ai due piani secanti e compresa fra essi dicesi *altezza della zona e del segmento corrispondente.*

**177. Teorema.** — *Si può condurre uno ed un solo piano tangente ad una sfera in un suo punto.*

Se infatti A è un punto di una sfera S di centro O, il piano condotto per il punto A, perpendicolare al raggio OA, ha dal centro O una distanza eguale al raggio della sfera, ed è perciò tangente. Ogni altro piano condotto per il punto A risulta obliquo al raggio OA, ed ha da O una distanza minore del raggio, e perciò è un piano secante della sfera.

**Corollario.** — *Il piano tangente ad una sfera in un suo punto è il luogo delle rette tangenti alla sfera nel medesimo punto.*

**178. Teorema.** — *Un diametro perpendicolare ad una corda di un circolo divide gli archi, da essa sottesi, in due parti eguali.*

Sia MN (fig. 143) il diametro perpendicolare alla corda AB. Facendo rotare il semicerchio MBN attorno al diametro MN, finchè venga a coincidere coll'altro MAN, la retta AB perpendicolare ad MN viene a coincidere con sè stessa; inoltre, poichè la corda AB è divisa per metà dal diametro MN (§ 174 Cor. 2°), il punto B cade in A; dunque $MA \equiv MB$, $NA \equiv NB$.

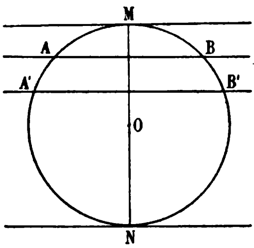


Fig. 143.

**Corollario** *1°*. — *Gli archi, compresi fra due rette parallele e che terminano ad esse, sono eguali.*

Infatti si ha che $MA' \equiv MB'$ e $MA \equiv MB$; dunque

$$MA' - MA \equiv MB' - MB,$$

ossia

$$AA' \equiv BB'.$$

**Osservazione.** — La retta MN (fig. 143) soddisfa a cinque condizioni: *1° passa per il centro; 2° è perpendicolare alla corda AB; 3° divide questa per metà; 4° divide per metà l'arco* AMB; *5° divide per metà l'arco* ANB. Essa è individuata da due qualunque delle condizioni suddette, ed è facile dimostrare che, quando sono verificate due delle condizioni esposte, sono verificate tutte le altre. Si hanno così complessivamente dieci teoremi, dei quali ci limitiamo ad enunciare soltanto il seguente:

*La perpendicolare nel punto medio di una corda di un cerchio passa per il centro.*

**Corollario** *2°*. — *Dato un arco di circolo si può costruirne il centro.*

Infatti, condotte nell'arco due corde non parallele, si determini il punto d'incontro delle perpendicolari alle due corde nei loro punti medî; questo sarà, per il teorema precedente, il centro cercato.

**179. Teorema.** — *Se due archi sono eguali, sono eguali anche le corde che li sottendono; e se due archi, appartenenti ad uno stesso circolo e minori di mezza circonferenza, sono diseguali, è maggiore la corda che sottende l'arco maggiore; e viceversa.*

1°. Se i due archi AB, A'B' (fig. 144) sono eguali, sono pure eguali gli angoli al centro $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, e i due triangoli OAB, O'A'B', avendo un angolo eguale compreso fra lati OA, OB, O'A', O'B' eguali (come raggi di circoli eguali) sono eguali; perciò anche il lato AB è eguale al lato A'B'.

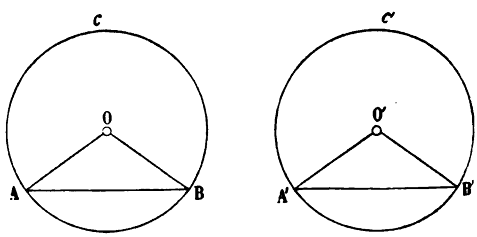


Fig. 144.

2°. Supponiamo ora che i due archi AB, A'B', minori di una semi-circonferenza, sieno diseguali, e che sia per es. $AB > A'B'$. Essendo gli archi AB, A'B' minori di mezza circonferenza, i due

angoli al centro $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ sono convessi, e perciò le corde AB, A'B' sono interne ad essi. Inoltre è $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$, ed allora i due triangoli AOB, A'O'B' hanno i lati OA, OB, O'A', O'B' eguali, ma gli angoli compresi disuguali, perciò il terzo lato AB, opposto all'angolo maggiore, è maggiore del lato A'B', opposto all'angolo minore.

I teoremi inversi sono veri per la seconda legge delle inverse (Preliminari § 4).

**180. Teorema.** — *In un cerchio (o in una sfera) oppure in cerchi (o sfere) eguali*

*1° due corde eguali sono egualmente distanti dal centro;*

*2° di due corde disuguali la maggiore è la più vicina al centro;*

*3° il diametro è maggiore di qualunque corda.*

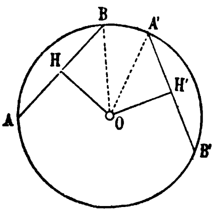


Fig. 145.

1°. Sieno AB, A'B' (fig. 145) due corde eguali del cerchio (o della sfera) di centro O, e sieno OH, OH' le rispettive distanze dal centro. I triangoli rettangoli OBH, OA'H' sono eguali, perchè hanno eguali le ipotenuse e i due cateti BH, A'H', come metà di corde eguali; dunque $OH \equiv OH'$.

2°. Se AB è maggiore di A'B' (fig. 146) anche l'angolo $\widehat{AOB}$ è maggiore di $\widehat{A'O'B'}$ (§§ 179 e 33), e quindi, se nel piano AOB si forma l'angolo $\widehat{AOB''} \equiv \widehat{A'O'B'}$, la semiretta OB'' risulta interna all'angolo $\widehat{AOB}$ e il punto B'' si trova da parte opposta del punto O rispetto alla retta AB. Allora anche la corda AB'' è tutta dalla parte opposta del punto O rispetto ad AB, ed il segmento perpendicolare OH'' condotto dal centro O alla AB'' deve incontrare la retta AB in un punto K (Post. VI, 2°). Il segmento OK obliquo alla retta AB è maggiore del segmento perpendicolare OH, e perciò, essendo $OH'' > OK$, è a più forte ragione $OH'' > OH$.

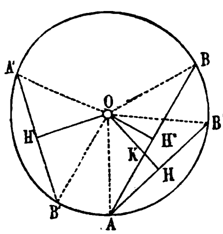


Fig. 146.

Ne segue che, essendo $OH'' \equiv OH'$, perchè le corde AB'', A'B' sono eguali, e quindi equidistanti dal centro, deve anche essere $OH' > OH$.

3°. Se AB (fig. 147) è una corda qualunque, che non passi per il centro, dal triangolo AOB si ha che AB è minore di AO + OB, ossia minore di due volte il raggio; cioè AB è minore del diametro.

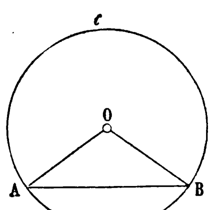


Fig. 147.

**Corollari.** — *1°. Due corde di un cerchio (o di una sfera), egualmente distanti dal centro, sono eguali, e di due corde disegualmente distanti dal centro, è maggiore quella che ha minore distanza dal centro.*

*2°. Date due circonferenze in un piano (o due superficie sferiche) concentriche, le corde della circonferenza (o della superficie sferica), avente raggio maggiore, tangenti all'altra sono tutte eguali.*

*3°. Se in una circonferenza (o in una superficie sferica) sono date varie corde eguali, esse sono tutte tangenti ad una circonferenza (o ad una superficie sferica) concentrica alla prima, che ha per raggio la distanza delle medesime corde dal centro.*

**181. Teoremi.** — *1°. I circoli sopra una sfera, situati in piani egualmente distanti dal centro, sono eguali.*

*2°. Di due circoli sopra una sfera, situati in piani disegualmente distanti dal centro, ha diametro maggiore quello il cui piano è più vicino al centro.*

*3°. Un circolo diametrale di una sfera ha diametro maggiore di quello di qualsivoglia altro circolo sopra la sfera, il quale non sia diametrale.*

Queste proprietà si ricavano immediatamente da quelle del § precedente, osservando che i diametri dei circoli sopra una sfera sono corde della sfera stessa, che hanno dal centro della medesima distanze eguali a quelle dei piani dei circoli stessi.

**Corollari.** — *1°. Se due circoli sopra una sfera sono eguali, i loro piani sono egualmente distanti dal centro della medesima; e se i due circoli sono disuguali il piano di quello, che ha diametro maggiore, ha dal centro una distanza minore.*

*2°. Se due superficie sferiche sono concentriche, i piani tangenti a quella, che ha raggio minore, tagliano l'altra secondo circoli eguali.*

*3°. Se vari circoli sopra una sfera sono eguali, i loro piani sono tutti tangenti ad una sfera concentrica alla prima, avente per raggio la distanza del centro dai piani stessi.*

**182. Teorema 1°.** — *Gli angoli, formati da una secante di un circolo colle due tangenti nei punti d'intersezione, sono ordinatamente eguali.*

Sia *a* una secante, che incontra un circolo *c* nei punti B, B′, e *b*, *b′* siano le tangenti in B, B′ a questo circolo. Condotta per il centro O la retta MN perpendicolare ad *a*, si faccia rotare il semipiano MNB′ attorno ad MN di un mezzo giro, in guisa che venga a coincidere col semipiano MNB. Il semicircolo MB′N verrà a coincidere col semicircolo BMN, e il punto B′ con B (essendo BB′ perpendicolare a MN), e perciò la tangente *b′* verrà a coincidere con la tangente *b*, non potendosi condurre in un punto di un circolo più di una tangente ad esso. Ne segue che gli angoli, che la retta *a* forma colla retta *b′*, sono ordinatamente eguali a quelli che essa fa colla *b*.

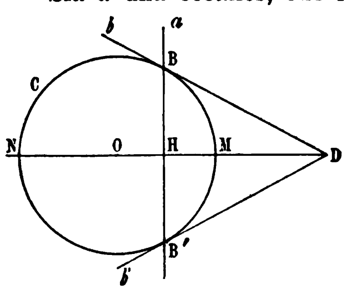


Fig. 148.

**Corollario 1°.** — *Le due rette tangenti ad un circolo, nei punti d'incontro di esso con una sua secante, incontrano in uno stesso punto la perpendicolare alla secante condotta per il centro, se la secante stessa non passa per il centro; e sono ad essa parallele, se la secante passa per il centro.*

**Teorema 2°.** — *I diedri formati da un piano secante di una superficie sferica con i piani tangenti a questa nei punti del circolo d'intersezione, sono ordinatamente eguali.*

Sia α un piano, che seca una superficie sferica S secondo un circolo *c*, ed *a* la retta perpendicolare al piano α, condotta per il centro O

della sfera. Facendo rotare tutta la figura attorno alla retta $a$, la superficie sferica S, il piano $\alpha$ e il circolo $c$ scorrono su se stessi di guisa che, quando un punto B di $c$ abbia preso la posizione di un altro punto B′ di $c$, anche il piano $\beta$ tangente in B avrà preso la posizione del piano $\beta'$ tangente in B′, e quindi i diedri formati dai piani $\beta$, $\beta'$ con $\alpha$ sono ordinatamente eguali.

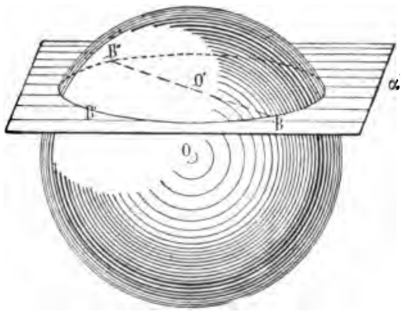


**Fig. 149.**

**Corollari.** — 2°. *Gli angoli formati da una secante di una superficie sferica con i due piani tangenti a questa nei punti d'intersezione sono eguali.*

Se una retta incontra una superficie sferica nei punti B, B″, si faccia rotare la sfera di un mezzo giro attorno alla retta $a$, condotta per il centro, perpendicolare alla BB″. Il segmento O′B prende la posizione di O′B″, e il piano tangente in B quella del piano tangente in B″.

3°. *Tutti i piani tangenti ad una superficie sferica, nei punti comuni ad essa e ad un piano secante, incontrano in un medesimo punto la retta condotta per il centro perpendicolare al piano secante, e formano con essa angoli eguali, se il piano secante non è diametrale; e sono ad essa paralleli, se il piano è diametrale.*

**Definizioni.** — 1ª. Chiamansi *angoli di un circolo (o di una superficie sferica) con una sua secante,* gli angoli formati da questa con una delle rette (o piani) tangenti nei punti d'intersezione.

2ª. Chiamansi *angoli di una superficie sferica con un suo piano secante,* i rettilinei dei diedri formati dal piano secante con uno dei piani tangenti in un punto comune al piano e alla sfera.

3ª. Una secante di una circonferenza (o di una superficie sferica) si dice *perpendicolare* o *normale* ad essa, se fa con essa angoli retti, *obliqua* nel caso contrario. Un piano secante di una superficie sferica, si dice *perpendicolare* o *normale* a questa, se fa con essa angoli retti, *obliquo* nel caso contrario.

Una parte di retta (o di piano) normale ad una circonferenza (o ad una superficie sferica) dicesi pure *normale* ad essa.

**Corollari.** — 4°. *Tutte e sole le secanti di una circonferenza (o di una superficie sferica) che passano per il suo centro sono normali ad essa.*

5°. *Per un punto, che non sia il centro, di una circonferenza (o di una superficie sferica) passa una, ed una sola, retta ad essa normale.*

6°. *Tutti i piani diametrali di una sfera, ed essi soli, sono normali alla superficie sferica.*

## 2. — RELAZIONI DI ANGOLI CON UN CIRCOLO.

**183. Definizione.** — Se un angolo ha il vertice in un punto di un arco, e i suoi lati passano per gli estremi di esso, si dice che esso è *inscritto* in quest'arco, ovvero che è un *angolo alla circonferenza che insiste* sul rimanente arco, o che *comprende* quest'arco.

**Teorema.** — *Qualunque angolo, che ha il vertice sopra una circonferenza, e che comprende un arco della medesima, è la metà dell'angolo al centro, che comprende lo stesso arco.*

Per la dimostrazione di questo teorema considereremo separatamente il caso in cui uno dei lati del dato angolo $B\widehat{A}C$ passi per il centro, quello in cui il centro sia interno, quello in cui il centro sia esterno all'angolo.

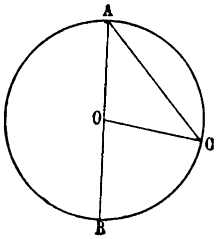



Fig. 150.

1°. Se il centro O si trova sul lato AB (fig. 150), congiungiamolo col punto C d'incontro dell'altro lato colla circonferenza. Allora il triangolo OAC, avendo i lati OA, OC eguali come raggi, ha anche gli angoli $O\widehat{A}C$, $O\widehat{C}A$ eguali, e perciò l'angolo $B\widehat{O}C$, esterno al triangolo OAC, essendo eguale alla somma dei due angoli suddetti, è il doppio di ciascuno di essi ed in particolare dell'angolo $B\widehat{A}C$.

2°. Se (fig. 151) il centro O del circolo è interno all'angolo $B\widehat{A}C$, il diametro AD, condotto per il vertice A, scompone in due parti il suddetto angolo $B\widehat{A}C$ ed anche l'angolo al centro $B\widehat{O}C$ che comprende lo stesso arco. Per la dimostrazione precedente gli angoli $B\widehat{O}D$, $D\widehat{O}C$ sono rispettivamente doppi degli angoli $B\widehat{A}D$, $D\widehat{A}C$, e perciò la loro somma $B\widehat{O}C$ è doppia dell'angolo $B\widehat{A}C$, somma dei due angoli $B\widehat{A}D$, $D\widehat{A}C$.

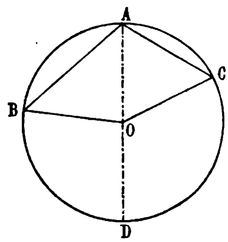



Fig. 151.

3°. Se il centro del circolo è esterno all'angolo $B\widehat{A}C$ (fig. 152), conducendo per il vertice A il diametro AD, avremo $B\widehat{A}C \equiv D\widehat{A}C - D\widehat{A}B$, e $B\widehat{O}C \equiv D\widehat{O}C - D\widehat{O}B$. Ma già sappiamo che $D\widehat{O}C$ è il doppio di $D\widehat{A}C$, $D\widehat{O}B$ è il doppio di $D\widehat{A}B$, perciò anche $B\widehat{O}C$ è il doppio di $B\widehat{A}C$.

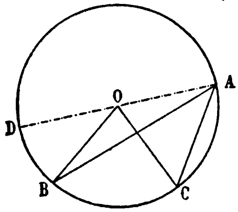



Fig. 152.

**Corollari.** — *1°. Tutti gli angoli inscritti in uno stesso arco sono eguali.*

Infatti gli angoli inscritti in uno stesso arco sono tutti eguali alla metà di uno stesso angolo al centro.

*2°. Se due archi sono eguali, gli angoli in essi inscritti sono eguali.* Viceversa: *Se sono eguali gli angoli inscritti in due archi, appartenenti a circoli eguali, sono eguali anche gli archi.*

Infatti, se sono eguali due archi, sono eguali anche gli angoli al centro che insistono su di essi, e quindi anche le loro metà; e viceversa.

*3°. Un angolo inscritto in un arco è acuto, retto, od ottuso, secondo che questo arco è maggiore, eguale o minore di mezza circonferenza.*

Infatti, l'angolo al centro, doppio dell'angolo dato, è convesso, piatto, o concavo, secondo che il suddetto arco è maggiore, eguale, o minore di mezza circonferenza.

4°. *Due angoli inscritti in due archi, la cui somma è una circonferenza, sono supplementari.*

Infatti (fig. 153), essendo l'angolo $A\widehat{B}C$ la metà dell'angolo convesso $A\widehat{O}C$, e l'angolo $A\widehat{D}C$ la metà dell'angolo concavo $A\widehat{O}C$, la somma $A\widehat{B}C + A\widehat{D}C$ è la metà della somma dei due angoli al centro $A\widehat{O}C$, l'uno convesso, l'altro concavo, la quale è eguale a due angoli piatti.

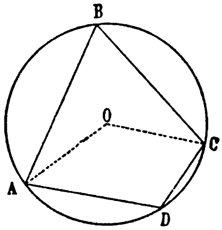


Fig. 153.

**Definizione.** — Un arco si dice *capace* dell'angolo, al quale son eguali tutti gli angoli inscritti in esso.

**184. Teorema.** — *Ciascun angolo formato da una tangente ad un circolo e da una secante, che passa per il punto di contatto, è eguale all'angolo alla circonferenza, che insiste sull'arco compreso fra i lati di quest'angolo, o del suo opposto al vertice.*

Essendo AB (fig. 154) una secante del circolo *c*, ed AC la tangente ad esso nel punto A, conducasi per il punto B la corda BD parallela alla tangente AC, e si unisca A con D. Gli archi AB, AD sono eguali (§ 178 Cor. 1°), e perciò sono pure eguali le corde AB, AD. Ne segue che il triangolo ABD è isoscele, e gli angoli $A\widehat{B}D$, $A\widehat{D}B$ sono eguali. Ma gli angoli $D\widehat{B}A$, $B\widehat{A}C$ sono pure eguali, come alterni interni rispetto alle rette parallele AC, BD e alla trasversale AB; dunque sono pure eguali gli angoli $B\widehat{A}C$, $B\widehat{D}A$.

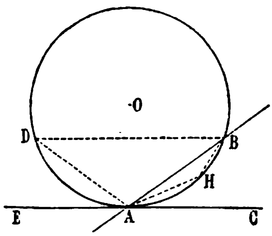


Fig. 154.

Ora l'angolo inscritto nell'arco AHB è il supplemento dell'angolo $B\widehat{D}A$ (§ 183 Cor. 4°); inoltre l'angolo $B\widehat{A}E$ è pure il supplemento di $B\widehat{A}C$, quindi, essendo $B\widehat{A}C \equiv B\widehat{D}A$, è anche $B\widehat{H}A \equiv B\widehat{A}E$.

**185. Teorema.** — *Un angolo, che ha il vertice interno ad un cerchio. è eguale alla semisomma degli angoli al centro, che insistono sugli archi compresi nell'angolo dato e nel suo opposto al vertice.*

Sieno AB, CD (fig. 155) due secanti del circolo *c*, che si tagliano nel punto E, interno ad esso, e consideriamo, per es. l'angolo $B\widehat{E}D$. Questo, essendo esterno al triangolo EBC, è eguale alla somma dei due angoli $E\widehat{C}B$, $E\widehat{B}C$, i quali sono rispettivamente la metà degli angoli al centro, che si appoggiano sugli archi BD, CA, compresi l'uno nell'angolo considerato, l'altro nel suo opposto al vertice.

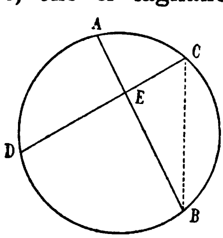


Fig. 155.

**186. Teorema.** — *Un angolo, che ha il vertice esterno ad un cerchio ed i lati secanti, è eguale alla semidifferenza degli angoli al centro, che insistono sugli archi compresi nell'angolo stesso.*

Sia CAE (fig. 156) un angolo, avente il vertice esterno al cerchio *c*, e i lati secanti. L'angolo $\widehat{CBE}$, esterno al triangolo ABE, è eguale alla somma dei due angoli $\widehat{BAE}$, $\widehat{AEB}$; perciò l'angolo $\widehat{BAE}$ è eguale alla differenza dei due angoli $\widehat{CBE}$, $\widehat{BEA}$, i quali sono le metà degli angoli al centro, che si appoggiano sugli archi CE, BD.

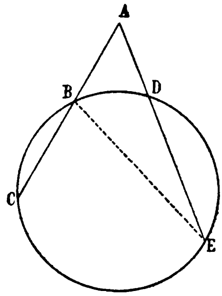


Fig. 156.

### 3. — RELAZIONI FRA DUE CIRCOLI IN UN PIANO E FRA DUE SFERE.

**187. Teorema.** — *Fra gl' infiniti segmenti, che terminano ad un circolo (o ad una superficie sferica) e partono da un punto preso nel piano del circolo all'infuori del centro,*

*1° quello normale, che contiene il centro, è maggiore di qualunque altro;*

*2° quello normale, che non contiene il centro, è minore di qualunque altro;*

*3° due segmenti, i cui estremi distano egualmente dall'estremo di un segmento normale, sono eguali; altrimenti è maggiore quello, il cui estremo ha una distanza maggiore dall'estremo del segmento normale minimo.*

*E viceversa.*

1°. Sieno AK, AH (fig. 157, 158) i due segmenti, che partono dal punto A e terminano al circolo (o alla superficie sferica) di centro O, e sia AD un altro segmento qualunque.

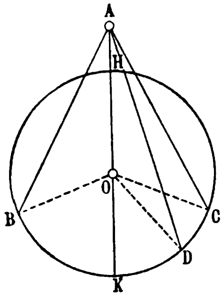


Fig. 157.

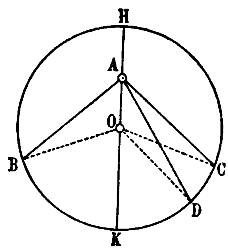


Fig. 158.

Dal triangolo AOD si ha $OA + OD > AD$ (§ 81 Teor.), ed essendo $OD \equiv OK$, ne segue $AO + OK > AD$, ossia $AK > AD$.

2°. Nello stesso triangolo AOD si ha, che il lato AD è maggiore della differenza fra i lati AO, OD, la quale, essendo $OD \equiv OH$, è eguale ad AH.

3°. Sieno ora AB, AC due segmenti obliqui, tali che le distanze BH, HC siano eguali; allora gli angoli al centro $\widehat{BOH}$, $\widehat{HOC}$ sono eguali, e quindi i triangoli AOB, AOC, avendo il lato OA comune, i lati OB, OC eguali come raggi e gli angoli fra essi compresi pure eguali, sono eguali, ed hanno $AB \equiv AC$.

Finalmente sieno AC, AD due segmenti, tali che sia la distanza HD maggiore della distanza HC; allora anche l'angolo al centro $\widehat{HOD}$ sarà

maggiore dell'angolo $\widehat{HOC}$, e quindi, i due triangoli AOC, AOD avendo il lato AO comune, i lati OC, OD eguali come raggi, ma l'angolo $\widehat{AOC}$, compreso fra i lati del primo, minore dell'angolo $\widehat{AOD}$, compreso fra i lati del secondo, sarà anche $AC < AD$ (§ 90 Teor.)

I teoremi inversi sono veri per il solito principio delle inverse dimostrato nei Preliminari.

**Corollari.** — *1°. Da un punto preso nel piano di un circolo, all'infuori del centro, non si possono condurre al circolo più di due segmenti eguali fra loro.*

*2°. Da un punto, che non sia il centro, si possono condurre ad una superficie sferica infiniti segmenti obliqui eguali fra loro; il luogo dei loro estremi è un circolo sopra la sfera, situato in un piano perpendicolare alla retta, che passa per il punto dato e per il centro della sfera.*

Infatti, facendo rotare la figura attorno alla retta, che passa per il punto dato e per il centro della sfera, uno dei segmenti condotti per il punto dato alla sfera prende successivamente la posizione di tutti gli altri.

**Definizione.** — Si chiama *distanza di un punto da un circolo, o da una superficie sferica,* il segmento normale minimo condotto da questo punto al circolo o alla superficie sferica.

**188. Teorema.** — *Date due circonferenze in un piano (o due superficie sferiche) con raggi diseguali:*

*1° se la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei raggi, nessun punto di una di esse è compreso nell'altra;*

*2° se la distanza dei centri è eguale alla somma dei raggi, esse hanno un sol punto comune, e nessuno degli altri punti dell'una è compreso nell'altra;*

*3° se la distanza dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi, esse hanno due punti (o una circonferenza) in comune;*

*4° se la distanza dei centri è eguale alla differenza dei raggi, esse hanno un sol punto comune, e tutti gli altri punti di quella di raggio minore sono compresi nell'altra;*

*5° se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi, tutti i punti di quella che ha raggio minore sono compresi nell'altra.*

1°. Sia $d \equiv OO'$ la distanza dei centri O, O′ dei due cerchi (o delle due sfere) $c, c'$ di raggio R ed R′, e sieno A, B; A′, B′ le coppie dei punti d'incontro dei due circoli (o delle due superficie sferiche) colla retta OO′. Essendo $d > R + R'$, è anche $d > R$, ossia $OO' > OA$, perciò il punto O′ è esterno al circolo (o alla sfera). Per l'ipotesi fatta è anche $d - R > R'$ ossia $OO' - OA \equiv O'A > R'$; perciò il punto A è esterno al cerchio (o alla sfera) $c'$. Siccome (§ 187 Teor.), O′A è il più piccolo dei segmenti che si possono condurre dal punto O′ al circolo (o alla superficie sferica) $c$ anche tutti gli altri punti del

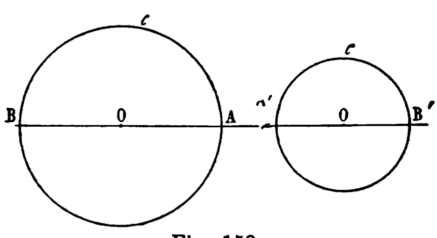


Fig. 159.

circolo (o della superficie sferica) $c$ sono a più forte ragione esterni al cerchio (o alla sfera) $c'$.

2°. Supponiamo ora (fig. 160) che sia $d \equiv R + R'$. Ne segue $d > R$, ossia $OO' > R$; perciò il punto $O'$ è esterno al cerchio (o alla sfera) $c$, ed $O'A$ è la normale minore condotta dal punto $O'$ al circolo (o alla superficie sferica) $c$. Dall'ipotesi fatta risulta inoltre $d - R \equiv R'$ ossia $OO' - OA \equiv O'A \equiv R$; perciò il punto A è sul circolo (o sulla superficie sferica) $c'$. Ma $O'A$ è il più piccolo di tutti i segmenti che si possono condurre da $O'$ al circolo (o alla superficie sferica) $c$; perciò tutti gli altri punti di $c$ (escluso A) sono esterni al cerchio (o alla sfera) $c'$.

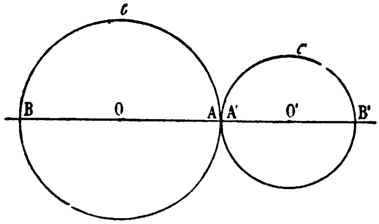



Fig. 160.

3°. Se (fig. 161) sono verificate le condizioni

$$R + R' > d > R - R',$$

se ne ricava $d + R' > R$, ovvero $OO' + O'B' > OA$, ovvero $OB' > OA$. Ciò prova che il punto $B'$ è esterno al cerchio (o alla sfera) $c$.

Avendo supposto $R > R'$, si ha pure $R + d > R'$, ossia $BO + OO' > O'A'$, ossia $O'B < O'A'$; perciò il punto $A'$ è interno al segmento $O'B$. Si osservi ora che potranno verificarsi le seguenti ipotesi $d \begin{smallmatrix} > \\ \equiv \\ < \end{smallmatrix} R'$.

Se è $d > R'$, dalla diseguaglianza $d < R + R'$ si ricava $d - R' < R$, ossia $O'O - O'A' < OA$, ossia $OA' < OA$, e quindi il punto $A'$ è interno al cerchio (o alla sfera) $c$. Se $d \equiv R'$, il punto $A'$ coincide con O. Se finalmente $d < R'$, il punto $A'$ cade nell'interno del segmento OB. In ogni caso dunque il circolo (o la superficie sferica) $c'$ ha un suo punto $B'$ esterno ed un suo punto $A'$ interno al cerchio (o alla sfera) $c'$.

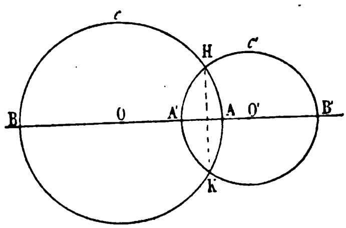



Fig. 161.

Se $c, c'$ sono due cerchi, siccome da quanto abbiamo detto risulta che il cerchio $c'$ ha un punto interno ed uno esterno al cerchio $c$, i due circoli (§ 27) devono avere almeno due punti H, K comuni. Inoltre essi non possono avere più di due punti comuni, perchè dal punto O non si possono condurre più di due segmenti eguali, che terminino al circolo $c$.

Se poi $c, c'$ sono due sfere, ogni circolo massimo della sfera $c'$, avente per diametro $A'B'$, deve incontrare la superficie sferica $c$ in due punti. Ne segue che le due superficie sferiche $c, c'$ hanno in comune infiniti punti. Tutti i segmenti, che partendo da O terminano a questi punti comuni, essendo eguali, il luogo dei medesimi è un circolo situato in un piano perpendicolare alla retta $OO'$, e che ha per centro il punto d'incontro di questo piano colla retta $OO'$.

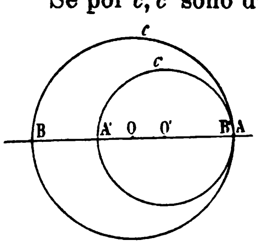



Fig. 162.

4°. Se è $d \equiv R - R'$, risulta $d + R' \equiv R$, ossia (fig. 161) $OO' + O'B' \equiv OA$, cioè il punto $B'$ si trova sul circolo (o sulla superficie sferica) $c$. Ora essendo $OB'$ il segmento normale massimo condotto dal punto O al cir-

colo (o alla superficie sferica) $c'$, tutti gli altri segmenti, condotti da O ai punti del circolo (o della superficie sferica) $c'$, sono minori di OA, e perciò interni al cerchio (o alla sfera) $c$.

5°. Se infine è $d < R - R'$, risulta $d + R' < R$, ossia (fig. 163) $OO' + O'B' < OA$, ossia $OB' < OA$. Siccome OB' è il più grande dei segmenti condotti dal punto O al circolo (o alla superficie sferica) $c'$, si ha che tutti i punti di $c'$ hanno da O una distanza minore del raggio R, e perciò sono interni al cerchio (o alla sfera) $c$.

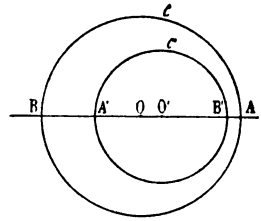


Fig. 163.

**Definizione.** — Se due circonferenze situate in un piano (o due superficie sferiche) hanno un solo punto comune, e nessuno degli altri punti dell'una è compreso nell'altra si dicono *tangenti esternamente;* se due circonferenze (o due superficie sferiche) hanno un solo punto comune, e tutti i punti di quella, avente raggio minore, sono compresi nell'altra, si dicono *tangenti internamente.* Il punto comune si dice *punto di contatto.*

**Corollari.** — 1°. *Date due circonferenze in un piano (o due superficie sferiche):*

1° *se nessun punto di una di esse è compreso nell'altra, la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei loro raggi;*

2° *se esse sono tangenti esternamente, la distanza dei loro centri è eguale alla somma dei raggi.*

3° *se esse hanno due (o infiniti) punti comuni, la distanza dei loro centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi;*

4° *se esse sono tangenti internamente, la distanza dei loro centri è eguale alla differenza dei raggi;*

5° *se tutti i punti di una di esse sono compresi nell'altra, la distanza dei loro centri è minore della differenza dei raggi.*

Queste proposizioni sono le inverse di quelle del teorema precedente, e sono vere per la seconda legge delle inverse.

2°. *Due circoli, aventi due punti comuni, si tagliano in essi, e la corda comune è perpendicolare alla retta dei centri ed è divisa da essa per metà.*

Infatti, i punti O, O' essendo equidistanti da H, K, la OO' è il luogo dei punti equidistanti da H, K (fig. 161).

3°. *Due superficie sferiche, aventi un circolo in comune, si tagliano in esso, e la retta dei centri è perpendicolare al piano della comune intersezione, e passa pel centro di essa.*

4°. *Se due circoli (o due superficie sferiche) sono tangenti, la retta dei centri passa per il punto di contatto.*

**189. Teorema** 1°. — *Se due circoli situati in un piano, si tagliano in due punti, gli angoli, formati dalle due tangenti ad essi in un punto comune, sono rispettivamente eguali agli angoli formati dalle due tangenti ad essi nell'altro punto comune.*

Sieno A, B (fig. 164) i punti comuni a due circoli di un piano. Facendo rotare attorno alla retta OO', individuata dai due centri, il semi-

piano OO'A, finchè venga a coincidere col semipiano OO'B, il punto A prende la posizione del punto B, e quindi le tangenti in A ai due circoli vengono a coincidere colle tangenti in B; dunque gli angoli formati dalle prime sono rispettivamente eguali agli angoli delle seconde.

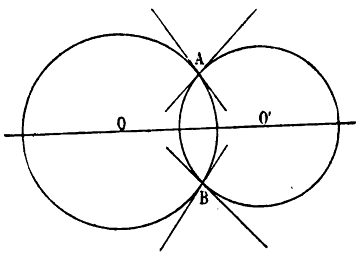


Fig. 164.

**Teorema 2°.** — *Se due superficie sferiche si tagliano secondo un circolo, i diedri, formati dai piani tangenti ad esse in un punto comune, sono rispettivamente eguali ai diedri formati dai piani tangenti ad esse in un altro punto comune.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

**Definizioni.** — 1ª. Si chiamano *angoli di due circonferenze in un piano (o di due superficie sferiche),* che si tagliano, gli angoli formati dalle tangenti (o piani tangenti) ad esse in un punto comune.

2ª. Due circonferenze in un piano (o due superficie sferiche, che si tagliano, si dicono *normali* o *perpendicolari,* oppure *oblique,* secondo che formano, o no, angoli retti.

## 4. — ALCUNI PROBLEMI.

**190.** Le proprietà esposte nei §§ precedenti ci permettono di risolvere varii problemi. Diamo qui la soluzione dei più importanti.

**Problema.** — *Costruire un arco, capace di un angolo dato, che abbia per corda un segmento dato.*

Sia AB il segmento, $\widehat{\alpha}$ l'angolo dato (fig. 165). Per il punto A conduciamo una retta AT, tale che l'angolo $\widehat{BAT}$ sia eguale all'angolo $\widehat{\alpha}$. Conduciamo la retta $a$ perpendicolare ad AB nel suo punto di mezzo, e per il punto A la AO perpendicolare ad AT, la quale deve evidentemente incontrare la retta $\alpha$ in un punto O. La circonferenza, descritta col centro in O e con raggio OA, passa per A e per B, perchè il punto O è equidistante da A e da B, ed è tangente nel punto A alla retta AT, perchè questa retta ha dal centro O una distanza eguale al raggio OA. Ne segue che l'angolo $\widehat{BAT}$ è eguale all'angolo di cui è capace l'arco AMB (§ 184 Teor.); questo è dunque l'arco richiesto.

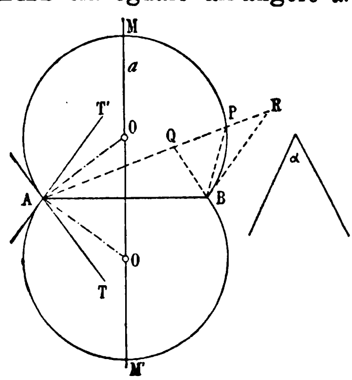


Fig. 165.

È chiaro che con una costruzione identica si può ottenere un secondo arco AM'B eguale ad AMB, capace dell'angolo $\alpha$, e situato, rispetto alla retta AB, dalla parte del piano opposta a quella ove trovasi AMB.

**Corollari.** — *1°. Il luogo geometrico dei vertici degli angoli situati in un piano, i lati dei quali passano per due punti fissi, e che sono eguali ad un angolo dato, è formato da due archi di circolo, capaci dell'angolo dato, aventi per corda il segmento, che termina ai due punti fissi.*

Ogni angolo, per es. $\widehat{APB}$ (fig. 165), i cui lati passano per i punti A, B, e che ha il vertice sopra uno degli archi AMB, AM'B, è eguale all'angolo $\widehat{\alpha}$. Ogni angolo per es. $\widehat{AQB}$, i cui lati passano per A e B, e che ha il vertice nell'interno di uno dei segmenti circolari, compresi fra i suddetti archi e la corda AB, è maggiore dell'angolo $\widehat{\alpha}$ (§ 185 Teor.) Invece ogni angolo per es. $\widehat{ARB}$, i cui lati passano per A, B, ma che ha il vertice esterno ai suddetti segmenti, è minore dell'angolo $\alpha$ (§ 186 Teor.)

*2°. Se i lati di due o più angoli eguali, situati in un piano, passano per due medesimi punti, ed i vertici giacciono da una stessa parte del piano rispetto alla retta che unisce i due punti, i vertici degli angoli e i due punti fissi stanno sopra un medesimo circolo.*

*3°. Il luogo geometrico dei vertici degli angoli retti, situati in un piano, i cui lati passano per due punti fissi, è un circolo, che ha per diametro il segmento terminato dai due punti.*

*4°. Il luogo geometrico dei vertici di tutti gli angoli retti, i cui lati passano per due punti, è una superficie sferica, che ha per diametro il segmento terminato dai due punti.*

**191. Problema.** — *Costruire un angolo, che sia la quinta parte di un angolo piatto.*

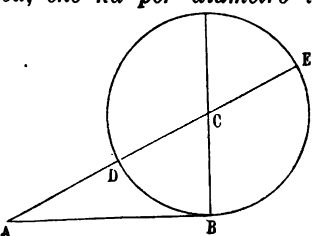


Fig. 166.

Preso un segmento AB qualunque, si conduca la perpendicolare ad esso in un suo estremo B (fig. 166), e si prenda su essa un segmento BC eguale alla metà di AB; indi si descriva un circolo col centro in C e con raggio CB, e si tracci la retta AC, che incontra il circolo in due punti D, E. Nel triangolo ACB, rettangolo in B, l'ipotenusa AC è maggiore del cateto AB, e perciò è anche AE > AB. Inoltre dallo stesso triangolo si ha AB > AC − CB, ovvero AB > AD, perchè CB ≡ CD. Ne segue che è possibile costruire un triangolo isoscele, che abbia due lati eguali ad AE ed uno eguale ad AB, ed un altro triangolo isoscele, che abbia due lati eguali ad AB ed uno eguale ad AD. L'angolo compreso fra i lati eguali tanto dell'uno quanto dell'altro triangolo, così costruiti, è la quinta parte di un angolo piatto.

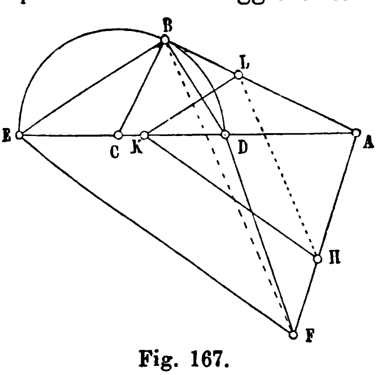


Fig. 167.

Infatti, per la retta AE facciamo passare un piano $\beta$ (fig. 167) diverso dal piano $\alpha$, sul quale abbiamo eseguita la costruzione sopra indicata, ed in esso costruiamo il triangolo EAF, nel quale i lati EA, EF sono eguali, ed AF è eguale ad AB.

Prendiamo sul lato AE, a partire da A, il segmento AK eguale ad AB, e sul segmento AB il segmento AL eguale ad AD, e tracciamo i segmenti BD, LK. I due triangoli ABD, AKL eguali, perchè hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali, ci danno $\widehat{DBA} \equiv \widehat{LKA}$, e siccome già sappiamo (§ 184 Teor.) che è $\widehat{DBA} \equiv \widehat{BEC}$, perchè, essendo l'angolo $\widehat{ABC}$ retto, la BA è tangente al circolo, ne risulta $\widehat{LKA} \equiv \widehat{BEC}$. Questi due angoli sono corrispondenti rispetto alle rette KL, EB ed alla trasversale AE, quindi, essendo essi eguali, le due rette EB, LK sono parallele.

Sul segmento AF, a partire da A, prendiamo la parte $AH \equiv AL \equiv AD$, e tracciamo le rette BF, LH. I due triangoli ALH, ABF sono isosceli, ed hanno l'angolo $\widehat{LAH}$ comune; perciò gli angoli $\widehat{HLA}$ e $\widehat{FBA}$, corrispondenti rispetto alle rette LH, BF e alla trasversale AB, sono eguali, e quindi le rette LH, BF sono parallele.

I piani EBF, KLH, che contengono due coppie di rette parallele, sono paralleli (§ 48 Cor. 2°), e tagliano il piano β secondo due rette EF, HK parallele; quindi gli angoli $\widehat{HKA}$, $\widehat{AHK}$ sono rispettivamente eguali agli angoli $\widehat{FEA}$, $\widehat{AFE}$, ed il triangolo AHK è isoscele. Se ora conduciamo il segmento FD, otteniamo i due triangoli AFD, AKH eguali, perchè hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali; perciò, essendo AHK isoscele, anche AFD è isoscele, ossia $FD \equiv FA$. Ma sappiamo che il segmento ED, doppio di CB, è eguale ad AB, e quindi anche ad FA e ad FD, dunque il triangolo FDE è pure isoscele; e perciò l'angolo esterno $\widehat{FDA}$, ed anche il suo eguale $\widehat{FAE}$, è doppio dell'angolo $\widehat{FEA}$. Ma poichè la somma degli angoli di un triangolo è eguale ad un angolo piatto, nel triangolo isoscele FEA l'angolo $\widehat{AEF}$ è la quinta parte di un angolo piatto, come si voleva dimostrare.

**192. Problemi.** — *1°. Condurre ad un circolo (o ad una superficie sferica) una tangente parallela ad una retta data.*

Sia $c$ il circolo (o la superficie sferica) ed $a$ la retta data (fig. 168). Per il centro O si conduca la retta (o il piano) perpendicolare alla retta data $a$, e per i due (o gl'infiniti) punti d'incontro M, N della retta (o del piano) col circolo (o colla superficie sferica) si conducano le rette $m, n$ parallele ad $a$, le quali sono perpendicolari alla retta (o al piano) suddetto, e perciò tangenti al circolo (o alla superficie sferica). È anche facile vedere che queste tangenti sono le sole, che soddisfano alle condizioni del problema.

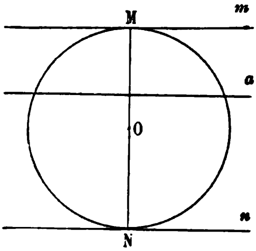


Fig. 168.

*2°. Condurre ad una sfera un piano tangente parallelo ad un piano dato.*

I due piani, tangenti alla sfera negli estremi del diametro perpendicolare al piano dato, sono le sole soluzioni del problema.

**193. Problema** *1°.* — *Condurre le tangenti ad un circolo, che passano per un punto del suo piano.*

**1ª Risoluzione.** — Sappiamo che ogni tangente ad un cerchio non ha alcun punto interno ad esso; perciò, se il punto dato fosse interno al cerchio, il problema sarebbe impossibile. Se poi il punto dato è sul circolo, vedemmo già (§ 175 Teor. 1°), che esiste una sola retta, che passa per quel punto ed è tangente al circolo; essa si ottiene, conducendo per quel punto la perpendicolare al raggio, che termina al punto stesso.

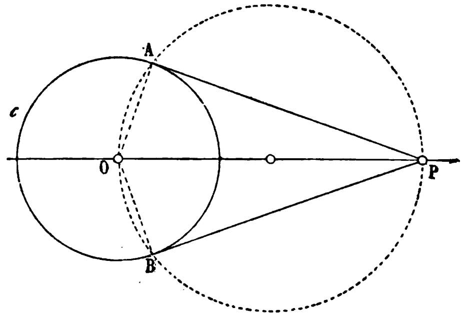


Fig. 169.

Supponiamo infine che il punto dato P sia esterno al circolo dato *c* (fig. 169). In questo caso il problema è evidentemente ridotto all'altro: costruire un angolo retto, i cui lati passino uno per il punto P e l'altro per il centro O del circolo dato, e che abbia il vertice sul circolo dato. La retta del primo di questi lati è una tangente domandata. Ma sappiamo che il luogo dei vertici degli angoli retti, situati nel piano del circolo *c*, i cui lati passano per P ed O, è il circolo, che ha per diametro PO (§ 190 Cor. 3°); dunque, siccome questo taglia il circolo *c* in due punti A, B (§ 27), così le rette PA, PB, ed esse sole, sono le rette tangenti al circolo dato *c*, e che passano per P.

**2ª Risoluzione.** — Dato un circolo *c* ed un punto A esterno ad esso (fig. 170), si descriva un circolo *c'* concentrico a *c* con raggio eguale al doppio del raggio del circolo *c*, ed un circolo *c''*, avente il centro nel punto A, e che passi per il centro O del circolo *c*. I due circoli *c'*, *c''* (§ 188 Teor.) si tagliano in due punti B, B'.

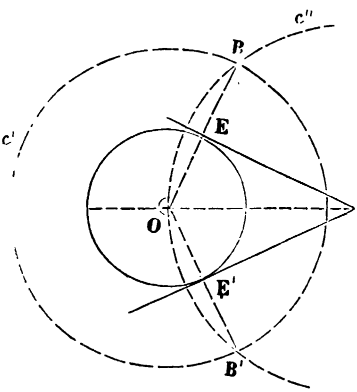


Fig. 170.

Le rette perpendicolari ai raggi OB, OB', condotte per A, passano rispettivamente per i punti di mezzo E, E' dei segmenti OB, OB' (§ 174 Cor. 2°), ossia per i loro punti d'incontro col circolo *c*; e perciò sono tangenti al circolo *c* nei punti E, E' stessi.

**Corollario 1°.** — *I segmenti tangenti, condotti da un punto ad un circolo, sono eguali.*

Infatti (fig. 169) i due triangoli rettangoli OPA, OPB, avendo l'ipotenusa OP comune e i cateti OA, OB eguali, sono eguali, ed è perciò PA ≡ PB.

**Problema 2°.** — *Condurre le rette (o piani) tangenti ad una sfera che passano per un punto.*

Sappiamo già che ogni retta (o piano) tangente ad una sfera non ha alcun punto interno ad essa; perciò, se il punto dato è interno alla

sfera, il problema è impossibile. Se poi il punto è sulla superficie sferica, vedemmo già (§ 175 e 177) che esistono infinite rette tangenti alla sfera in quel punto, le quali giacciono tutte nel piano tangente alla sfera in quel punto. Questo piano tangente è perpendicolare al raggio della sfera, che termina in quel punto.

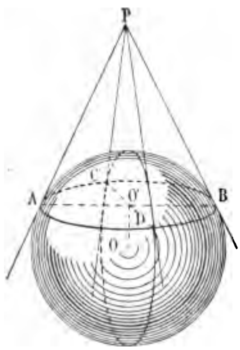


Fig. 171.

Supponiamo infine che il punto dato P sia esterno alla sfera. In questo caso il problema è evidentemente ridotto all'altro: *Costruire un angolo retto, i cui lati passino uno per il punto P e l'altro per il centro O della sfera, e che abbia il vertice sulla superficie sferica data.* La retta del primo di questi lati è una tangente alla sfera data. Ma sappiamo che il luogo dei vertici degli angoli retti, i cui lati passano per P ed O, è la superficie sferica che ha per diametro PO (§ 190 Cor. 4°); dunque, siccome questa taglia la superficie sferica data secondo un circolo, così le infinite rette, che uniscono il punto P con un punto di questo circolo, ed esse sole, sono le tangenti alla sfera data e passano per P. Inoltre ciascuno degli infiniti piani, tangenti alla sfera nei punti del circolo suddetto, contiene una delle dette tangenti, e perciò passa per il punto P; essi sono i soli piani tangenti che passano per questo punto.

**Corollario 2°.** — *I segmenti tangenti, condotti da un punto ad una sfera, sono eguali.*

# CAPITOLO II

## Relazioni di poligoni con un cerchio, e di poliedri con una sfera.

**194. Definizioni.** — 1ª. Se un poligono ha tutti i suoi vertici su di un circolo, si dice ch'esso è *inscritto* nel circolo, e che il circolo è *circoscritto* al poligono. Analogamente, se una linea poligonale ha tutti i suoi vertici su di un arco contermine, si dice ch'essa è *inscritta* nell'arco, e che l'arco è *circoscritto* ad essa.

2ª. Dicesi *raggio di un poligono inscritto* (o *di una linea poligonale inscritta*) il raggio del circolo (o dell'arco) circoscritto.

3ª. Se un poligono ha tutti i suoi lati tangenti ad un circolo, si dice che esso è *circoscritto* al circolo, e che il circolo è *inscritto* nel poligono. Analogamente, se una linea poligonale ha tutti i suoi lati tangenti ad un arco, ed ha gli estremi sopra i lati dell'angolo al centro, che comprende quest'arco, si dice ch'essa è *circoscritta* all'arco, e che l'arco è *inscritto* in essa.

4ª. Dicesi *apotema* di un poligono circoscritto ad un circolo (o di una linea poligonale circoscritta ad un arco) il raggio del circolo (o dell'arco) inscritto.

5ª. Dicesi *settore poligonale inscritto* o *circoscritto* ad un settore circolare il poligono, che ha per vertici il centro del circolo a cui l'arco appartiene, ed i vertici di una linea poligonale inscritta, o circoscritta, a quest'arco.

6ª. Se un poliedro ha tutti i suoi vertici sopra una superficie sferica, si dice che è *inscritto* in essa, e che la superficie sferica è *circoscritta* al poliedro. Dicesi poi *raggio* di un poliedro inscritto il raggio della superficie sferica circoscritta.

7ª. Se un poliedro ha tutte le sue facce tangenti ad una sfera, si dice che è *circoscritto* ad essa, e che la sfera è *inscritta* nel poliedro. Dicesi poi *apotema* di un poliedro circoscritto il raggio della sfera inscritta.

Sappiamo che per individuare un circolo bisogna conoscerne il centro, il raggio ed il piano in cui giace. Ne segue che in un piano dato $\pi$ si possono tracciare infinite circonferenze, che hanno per centro un punto qualunque di esso ed un raggio arbitrario. Tra queste ne esistono pure infinite che passano per un punto A, dato comunque nel piano. Infatti la circonferenza, che ha per centro un altro punto qualunque O di $\pi$, e per raggio la distanza OA, passa per il punto A.

**Teoremi.** — *1°. Esistono in un piano infiniti circoli che passano per due dei suoi punti. Il luogo geometrico dei loro centri è la retta perpendicolare al segmento, che ha per estremi i due punti, condotta nel piano dato per il punto di mezzo di quel segmento.*

Infatti, la retta $a$, perpendicolare al segmento AB nel suo punto di mezzo (fig. 172), essendo il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B, è chiaro che un circolo, che abbia per centro un punto qualunque $O_1$ di questa retta e per raggio la distanza di questo punto dai punti A, B, passa per i punti A, B. Nessun punto fuori della retta $a$ può essere il centro di un circolo, che passi per A e per B, poichè esso non è egualmente distante da questi punti.

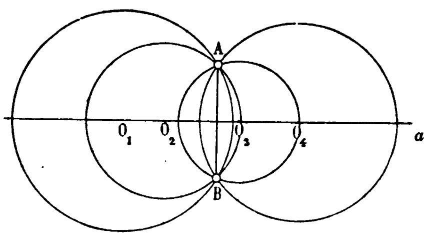


Fig. 172.

*2°. Per tre punti, non situati in linea retta, passa uno, ed un solo, circolo.*

Dati tre punti A, B, C, non in linea retta (fig. 123), sappiamo che esiste uno ed un solo punto O nel loro piano, equidistante da essi (§ 160 Cor. 1°). Il circolo, che ha per centro O e per raggio la distanza OA, passa per i tre punti A, B, C, e non esistono evidentemente altri circoli che verifichino la stessa condizione.

**Corollario.** — *Ad un triangolo si può sempre circoscrivere un circolo.*

**195.** Nello spazio esistono infinite superficie sferiche. Per un punto ne passano pure infinite.

**Teoremi.** — *1°. Esistono infinite superficie sferiche, che passano per due punti; il luogo geometrico dei loro centri è il piano perpendicolare al segmento, che ha per estremi i punti stessi, condotto per il suo punto di mezzo.*

Infatti, il luogo dei punti equidistanti da due punti dati A, B è il piano $\alpha$ perpendicolare al segmento, che ha per estremi i due punti dati,

condotto per il suo punto di mezzo (§ 161 Teor.); perciò ciascun punto di questo piano è centro di una superficie sferica, passante per i punti A, B, la quale ha per raggio la distanza del medesimo punto dai due punti dati. Nessun punto fuori del piano $\alpha$ può esser centro di una superficie sferica, che passa per i due punti dati, essendo disegualmente distante da essi.

2°. — *Per tre punti, non situati in linea retta, passano infinite superficie sferiche; il luogo geometrico dei loro centri è la retta perpendicolare al piano individuato dai tre punti, condotta per il centro del circolo che passa per i punti stessi.*

Questo teorema si dimostra come il precedente, ricordando che il luogo dei punti equidistanti da tre punti dati A, B, C, non in linea retta, è la retta perpendicolare al loro piano, condotta per il punto di questo piano equidistante da essi, ossia per il centro del circolo che passa per essi (§ 161 Cor. 1°).

3°. *Per quattro punti, non situati in un piano, passa una, ed una sola, superficie sferica.*

Infatti, dati quattro punti A, B, C, D non situati in un piano, sappiamo che esiste uno, ed un solo, punto O, equidistante da essi (§ 161 Cor. 2°). Questo punto, ed esso solo, è centro di una superficie sferica, che passa per i punti A, B, C, D, e che ha per raggio la distanza di O dai punti stessi.

**Corollario.** — *Ad un tetraedro si può circoscrivere una, ed una sola, superficie sferica.*

**196.** In un piano esistono infiniti circoli tangenti ad una retta; tutti quelli cioè, che hanno per centro un punto arbitrario del piano, e per raggio la distanza di questo punto dalla retta data.

**Teoremi.** — *1°. Esistono infiniti circoli tangenti a due rette che si tagliano; il luogo geometrico dei loro centri è formato dalle bisettrici degli angoli delle due rette medesime.*

Affinchè un circolo sia tangente ad una retta, è necessario e sufficiente che il suo raggio sia eguale alla distanza del suo centro dalla retta; perciò tutti i punti, che sono equidistanti dalle due rette, ed essi soli, sono centri di circoli tangenti alle medesime. Siccome il luogo geometrico dei punti equidistanti da due rette, che s'incontrano, è formato dalle bisettricide il oro angoli (§ 162 Teor.); così il teorema è dimostrato.

2°. *Esistono quattro circoli tangenti alle tre rette di un triangolo.*

Se (fig. 173) un circolo $c$ è tangente alle tre rette di un triangolo, il suo centro dev'essere un punto del piano del triangolo, equidistante dalle sue rette; e viceversa. Ma nel piano di un triangolo esistono quattro soli punti equidistanti dalle sue rette (§ 162 Cor.), dunque esistono quattro circoli tangenti alle tre rette di un triangolo.

**Definizione.** — Dei quattro circoli, che toccano le tre rette di un triangolo ABC, i tre, che hanno i loro centri e tutti i loro punti esterni al triangolo, si distinguono dal quarto, chiamandoli *exiscritti*.

**197.** Nello spazio esistono infinite sfere tangenti ad un piano, tutte quelle cioè, che hanno per centro un punto arbitrario dello spazio, e per raggio la distanza di questo punto dal piano dato.

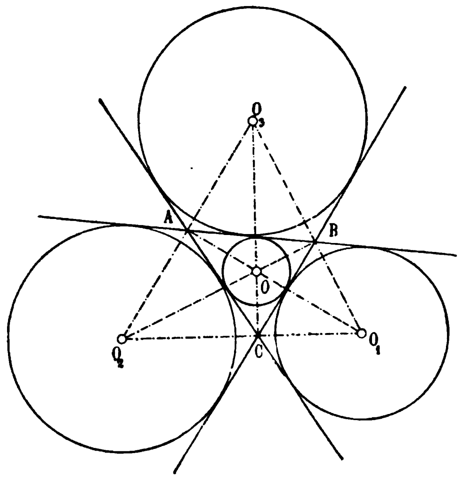


Fig. 173.

**Teoremi.** — *1°. Esistono infinite sfere tangenti a due piani, che si tagliano; il luogo geometrico dei loro centri è costituito dai piani bisettori dei diedri formati dai due piani medesimi.*

Infatti, affinchè una sfera sia tangente ad un piano, è necessario e sufficiente che il suo raggio sia eguale alla distanza del suo centro dal piano, perciò tutti i punti, che sono equidistanti dai due piani dati, ed essi soli, sono centri di sfere tangenti ai medesimi. Ma il luogo geometrico dei punti equidistanti da due piani, che si tagliano è formato (§ 163 Teor.) dai piani bisettori dei loro diedri; dunque il teorema resta dimostrato.

*2°. Esistono infinite sfere tangenti ai tre piani di un triedro; il luogo geometrico dei loro centri è formato da quattro rette, che passano per il vertice del triedro, e che sono le intersezioni dei piani bisettori dei diedri formati dai tre piani dati.*

Infatti, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre piani di un triedro è formato da quattro rette, che passano per il vertice del triedro (§ 163 Cor.) e che sono le intersezioni dei piani bisettori dei diedri formati dai piani delle tre facce; dunque il teorema resta dimostrato.

*3°. Esistono non più di otto e non meno di cinque sfere tangenti ai quattro piani di un tetraedro.*

Infatti esistono non più di otto e non meno di cinque punti equidistanti dalle quattro facce di un tetraedro (§ 164 Teor.); e quindi il teorema resta dimostrato.

**198.** Abbiamo già visto che per tre punti, non in linea retta, si può far passare uno ed un solo circolo, ed è evidente che questo circolo non passa generalmente per un quarto punto preso ad arbitrio nel piano. Ne segue, che per quattro punti del piano passerà un circolo solamente nel caso che essi occupino posizioni particolari.

Analogamente abbiamo visto che esistono quattro circoli tangenti a tre rette di un triangolo, ed è evidente che nessuno di essi è in ge-

nerale tangente ad una quarta retta, presa ad arbitrio nel piano, se le quattro rette non si trovano in posizioni particolari l'una rispetto all'altra.

I teoremi seguenti danno appunto le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè quattro punti sieno sopra un circolo, e quattro rette sieno tangenti ad un circolo.

**Teorema.** — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè si possa circoscrivere un circolo ad un quadrilatero convesso, è che i suoi angoli opposti sieno supplementari.*

1°. Se ABCD (fig. 174) è un quadrilatero inscritto, si ha che l'angolo $\widehat{ADC}$ inscritto nell'arco ADC è il supplemento dell'angolo $\widehat{ABC}$ inscritto nel rimanente arco ABC (§ 183 Cor. 4°).

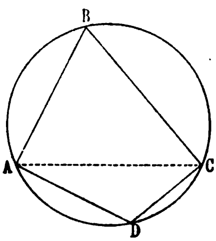


Fig. 174.

2°. Viceversa sia ABCD un quadrilatero convesso, nel quale gli angoli opposti $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACD}$ sono supplementari.

Osserviamo prima di tutto che, il quadrilatero essendo convesso, i suoi vertici B, D si trovano da parti opposte della retta AC. Allora se per i tre punti A, D, C facciamo passare un circolo (§ 194 Teor. 2°); l'arco ABC è capace dell'angolo supplementare di $\widehat{ADC}$ (§ 183 Cor. 4°), ed è il luogo geometrico dei vertici degli angoli eguali al supplemento di $\widehat{ADC}$, i lati dei quali passano per i punti A, C, e che hanno i vertici situati, rispetto alla retta AC, in parte opposta a quella di D (§ 190 Cor. 1°). Ne segue che l'angolo $\widehat{ABC}$, soddisfacendo a queste condizioni, deve avere il suo vertice in un punto di questo arco.

**Corollario.** — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè ad un parallelogrammo si possa circoscrivere un circolo, è che esso sia rettangolo.*

**199. Teorema.** — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè ad un quadrilatero convesso si possa inscrivere un circolo, è che la somma di due lati opposti sia eguale alla somma degli altri due.*

1°. Sia ABCD (fig. 175) un quadrilatero convesso circoscritto ad un circolo, e siano L, M, N, P i punti di contatto dei suoi lati. Siccome i segmenti tangenti, condotti da un punto ad un circolo, sono eguali, si hanno le eguaglianze

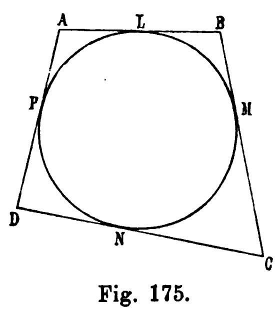


Fig. 175.

$$AL \equiv AP$$
$$BL \equiv BM$$
$$CN \equiv CM$$
$$DN \equiv DP,$$

dalle quali si ricava

$$AL + BL + CN + DN \equiv AP + DP + BM + CM,$$

ovvero

$$AB + CD \equiv AD + BC.$$

2°. Inversamente, sia ABC′D′ (fig. 176) un quadrilatero convesso, nel quale si abbia

$$AB + C'D' \equiv AD' + BC';$$

dico che esiste un circolo, che tocca le sue quattro rette ed è interno ad esso. Infatti si può sempre costruire un circolo $c$ tangente alle tre rette AB, BC′, AD′, avente il centro interno agli angoli $D'\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C'$. Se l'altra retta C′D′ del poligono non fosse tangente al circolo $c$, si potrebbe condurre una tangente CD parallela a C′D′, in modo che il centro non fosse interno alla striscia formata dalle rette CD, C′D′ (§ 192 Prob. 1°).

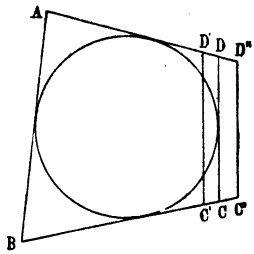


Fig. 176.

Il quadrilatero ABCD allora essendo circoscritto al circolo, si avrebbe

$$AB + CD \equiv AD + BC;$$

ma da quest'eguaglianza e dall'altra

$$AB + C'D' \equiv AD' + BC'$$

si ricava

$$AB + CD + C'D' \equiv AD + BC + C'D'$$
$$AB + C'D' + CD \equiv AD' + BC' + CD,$$

e quindi

$$AD' + BC' + CD \equiv AD + BC + C'D'.$$

Se la C′D′ fosse una secante del circolo $c$, sarebbe

$$AD' < AD,\ BC' < BC,\ AD - AD' \equiv DD',\ BC - BC' \equiv CC',$$

ed allora dalla eguaglianza ottenuta si ricaverebbe l'altra

$$CD \equiv DD' + CC' + C'D'$$

che è assurda, perchè in un quadrilatero un lato è minore della somma degli altri tre.

Se invece il lato C′D′ avesse una posizione C″D″ esterna al circolo $c$, sarebbe

$$AD < AD'',\ BC < BC''\ \text{e}\ AD'' - AD \equiv DD'',\ BC'' - BC \equiv CC'',$$

perciò l'eguaglianza precedente darebbe l'altra

$$C''D'' \equiv DD'' + CC'' + CD,$$

che è assurda, perchè in un quadrilatero un lato è minore della somma degli altri tre.

La C′D′ è dunque tangente al circolo $c$.

**Corollario.** — *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè ad un parallelogrammo si possa inscrivere un circolo, è che esso sia una losanga.*

## 2. — POLIGONI REGOLARI.

**200. Definizioni.** — 1ª. Un poligono convesso (o una linea poligonale convessa) si dice *regolare*, se ha tutti i suoi lati eguali e tutti i suoi angoli eguali.

Per es. il triangolo equilatero e il quadrato sono poligoni regolari.

2ª. Un settore poligonale si dice *regolare*, se la linea poligonale corrispondente è regolare.

**Teorema.** — *Ad un poligono regolare si può sempre inscrivere e circoscrivere un circolo.*

Sia ABCDE (fig. 177) un poligono regolare convesso; si conducano le bisettrici AO, BO di due suoi angoli successsivi $\widehat{A}, \widehat{B}$. Poichè la somma degli angoli $B\widehat{A}O, A\widehat{B}O$ è eguale all'angolo $E\widehat{A}B$, e perciò è minore di un angolo piatto, queste bisettrici devono incontrarsi in un punto O.

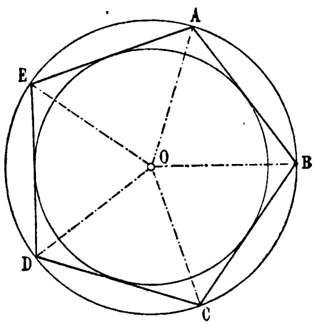


Fig. 177.

Allora il triangolo OAB, avendo gli angoli $O\widehat{A}B, O\widehat{B}A$ eguali come metà di angoli eguali, è isoscele, ed ha i lati OA, OB pure eguali. Se poi tracciamo il segmento OC, che ha per estremi il punto O e il vertice C, consecutivo a B, il triangolo OBC, che si forma, è eguale al triangolo OBA, perchè il lato OB è comune ad entrambi, BC è eguale a BA, e l'angolo $O\widehat{B}C$ è eguale a $O\widehat{B}A$ per costruzione. Ne segue che è $OC \equiv OA \equiv OB$ e gli angoli $O\widehat{C}B, O\widehat{A}B$ sono pure eguali, e siccome quest'ultimo è la metà dell'angolo $E\widehat{A}B$, e quindi anche dell'angolo $B\widehat{C}D$, così anche $O\widehat{C}B$ è la metà di $B\widehat{C}D$, ossia la semiretta OC è la bisettrice dell'angolo $B\widehat{C}D$. Così seguitando, si dimostra, che i segmenti OD, OE,.... fanno parte delle bisettrici degli angoli del poligono, e sono eguali fra loro.

Il punto O è dunque equidistante da tutti i vertici A, B, C.... del poligono, e perciò la circonferenza, descritta nel piano del poligono col centro in O e con raggio OA, passa per tutti i vertici del poligono, ossia è circoscritta ad esso.

Osservando poi che i lati AB, BC, CD.... sono corde eguali del circolo ora costruito, si vede immediatamente (§ 180 Cor. 3°) che essi sono tangenti ad un altro circolo concentrico al primo, che ha per raggio la distanza del centro stesso dai lati del poligono.

**Corollari.** — *1°. Ad una linea (o settore) poligonale regolare si può sempre circoscrivere o inscrivere un arco (o settore circolare).*

*2°. Le bisettrici degli angoli di un poligono (o linea poligonale) regolare e le perpendicolari ai lati nei loro punti di mezzo passano per uno stesso punto, che è il centro dei circoli (o degli archi) circoscritto ed inscritto.*

**201. Teorema.** — *Se più punti dividono un circolo in archi eguali, il poligono, che ha per vertici consecutivi i suddetti punti, e quello che ha per rette consecutive le tangenti al circolo nei punti medesimi, sono regolari.*

Sieno A, B, C.... (fig. 178) punti del circolo *c*, che lo dividano in archi AB, BC.... eguali fra loro. Tracciamo i segmenti AB, BC, che hanno per estremi i punti consecutivi, e conduciamo le tangenti nei punti A,B,C.... Facciamo scorrere il circolo *c* su sè stesso, in modo che il punto A prenda la posizione del punto B; allora anche il punto B prende la po-

sizione del punto C, il punto C quella del punto D...., e la tangente in A prende la posizione della tangente in B, la tangente in B quella della tangente in C.... Ne segue che ogni lato ed ogni angolo del poligono ABCD.... inscritto prende la posizione del lato e dell'angolo successivo, cioè questo poligono ha tutti i lati e gli angoli eguali. Lo stesso può dirsi per il poligono A′B′C′...., dunque questi due poligoni sono regolari.

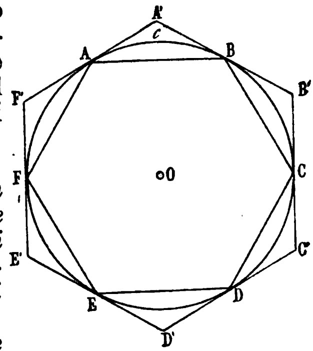


Fig. 178.

**Corollari.** — *1°. Se più punti dividono un arco dato in archi eguali, la linea poligonale inscritta, che ha per vertici consecutivi i suddetti punti, e quella circoscritta, che ha per rette consecutive le tangenti a questi archi nei loro punti medii, sono regolari.*

*2°. Se un poligono è iscritto in un circolo, e circoscritto ad uno concentrico al primo, è regolare.*

**202.** Dal teorema precedente risulta, che, per inscrivere e circoscrivere ad un circolo un poligono regolare di *n* lati, basta dividere in *n* parti eguali il circolo; e per far ciò basta costruire al centro del medesimo *n* angoli eguali, la cui somma sia eguale a due angoli piatti, ossia dividere due angoli piatti in *n* parti eguali.

È chiaro inoltre che, quando è stato inscritto un poligono regolare di *n* lati, dividendo per metà il minore degli archi sottesi da ciascuno dei suoi lati, si divide il circolo in $2.n$ parti eguali, e perciò si può costruire un poligono regolare inscritto, ed uno circoscritto di $2.n$ lati. Proseguendo nello stesso modo, si potrà inscrivere un poligono di $4.n$ lati, poi uno di $8.n$ lati.... in generale uno di $2^p.n$ lati. (*)

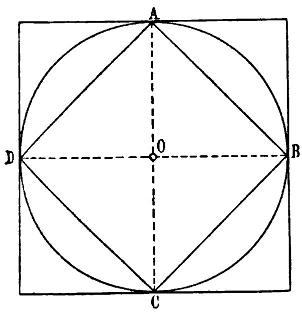


Fig. 179.

**203. Problema.** — *Ad un dato circolo iscrivere e circoscrivere un quadrato.*

Condotti (fig. 179) nel circolo dato due diametri perpendicolari AC,BD, si ottengono quattro angoli al centro tutti eguali fra loro, perchè retti, e quindi gli archi AB, BC, CD, DA sono eguali. Non resta allora altro che condurre i segmenti AB, BC, CD, DA e le tangenti nei punti A,B,C,D per avere i quadrati richiesti.

**Corollario.** — *Con semplici divisioni di archi per metà si potranno avere anche i poligoni regolari inscritti e circoscritti di 8, 16, 32, 64.... lati.*

**204. Problema.** — *Inscrivere e circoscrivere ad un dato circolo un esagono regolare.*

(*) Gauss ha dimostrato che, se *n* è un numero primo, affinchè con costruzioni elementari (eseguibili colla riga e col compasso) si possa dividere un circolo in *n* parti eguali, è necessario e sufficiente che *n* sia della forma $2^p + 1$. I più piccoli numeri primi, che soddisfano a questa condizione sono 3, 5, 17, 257....

Per inscrivere e circoscrivere (fig. 180) ad un circolo l'esagono regolare bisogna trovare un angolo eguale alla sesta parte di due angoli piatti, ossia ad un terzo di un angolo piatto. Pertanto, se sopra un raggio OB si descrive un triangolo equilatero OAB (§ 99 Cor.), l'angolo $\widehat{AOB}$ è la sesta parte di un giro, e quindi l'arco AB è la sesta parte del circolo, e non resta a fare altro che riportare sei volte quest'arco sul circolo per avere i punti di divisione, per mezzo dei quali (§ 201) si costruiscono gli esagoni regolari inscritto e circoscritto.

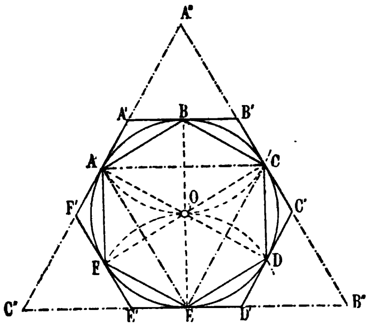


Fig. 180.

Il metodo più sollecito per eseguire la divisione suddetta è il seguente; condotto un diametro EB si descrivano due circoli con raggio eguale a quello del circolo dato, i quali abbiano per centri gli estremi di questo diametro. I punti E, B e i punti d'incontro di questi due circoli col circolo dato, sono i punti di divisione del circolo in sei parti eguali.

**Corollari.** — 1°. *Il lato dell'esagono regolare, inscritto in un circolo, è eguale al raggio.*

2°. *Dei sei punti, che dividono la circonferenza in 6 parti eguali, i tre, che a due a due non sono consecutivi, sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto, e le tangenti in essi punti sono i lati di un triangolo equilatero circoscritto.*

3°. *Con semplici divisioni di archi per metà si possono costruire anche i poligoni regolari inscritti e quelli circoscritti di 12, 24, 48.... lati.*

**205. Problema.** — *Ad un dato circolo inscrivere e circoscrivere un decagono regolare.*

Per avere il decagono regolare inscritto in un circolo e quello circoscritto, basta dividere il circolo stesso in 10 parti eguali, e perciò bisogna trovare un angolo eguale alla decima parte di due angoli piatti, ossia ad un quinto di angolo piatto.

A tale scopo basta eseguire la costruzione data nel § 191. Prendiamo dunque (fig. 181) due raggi OA, ON, perpendicolari fra loro; costruiamo un circolo che abbia per diametro ON, e congiungiamo il suo centro K coll'estremo A dell'altro raggio. Facendo centro in A e con raggio AM, descriviamo un circolo; esso taglierà il circolo dato in due punti B, D.

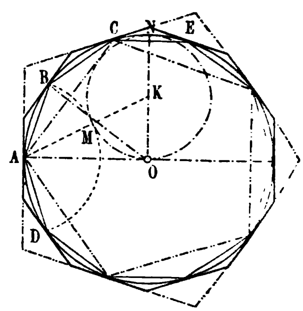


Fig. 181.

L'angolo $\widehat{AOB}$ del triangolo AOB è la decima parte di due angoli piatti, e l'arco AB è la decima parte del circolo. Riportando l'arco trovato dieci volte sul circolo, questo resterà diviso in dieci parti eguali, e si potrà facilmente costruire il decagono regolare inscritto e quello circoscritto ad esso circolo.

**Corollari.** — *1°. Dei dieci punti, che dividono la circonferenza in 10 parti eguali, i cinque, che a due a due non sono consecutivi, sono i vertici di un pentagono regolare inscritto, e le tangenti in essi punti sono i lati di un pentagono regolare circoscritto.*

*2°. Con semplici divisioni di archi per metà si possono anche costruire i poligoni regolari iscritti e quelli circoscritti di 20, 40, 80.... lati.*

**206. Problema.** — *Ad un circolo dato inscrivere e circoscrivere un pentadecagono regolare.*

Colle costruzioni dei §§ precedenti portiamo, a partire da un punto A (fig. 182) due archi AB, AC, eguali l'uno alla sesta, l'altro alla decima parte del circolo.

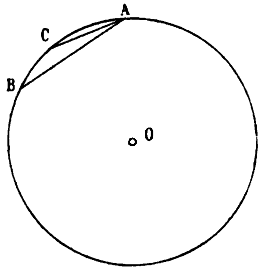


Fig. 182.

L'arco CB è $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ossia $\frac{1}{15}$ del circolo, e quindi, riportandolo 15 volte di seguito sul circolo, questo resta diviso in 15 parti eguali, e si può facilmente inscrivere e circoscrivere un pentadecagono regolare.

**Corollario.** — *Con divisioni di archi per metà si potranno costruire anche i poligoni regolari inscritti e quelli circoscritti al dato circolo di 30, 60, 120.... lati.*

**207. Problema.** — *Costruire un poligono regolare di* n *lati, di cui ciascuno dei lati sia eguale ad un segmento dato.*

Si voglia per es. costruire un pentagono regolare, che abbia ciascuno dei suoi lati eguale al segmento dato MN. In un circolo qualunque O s'inscriva un pentagono regolare; poi sopra una delle rette AB (fig. 183) si prenda un segmento AL ≡ MN, e da L si conduca la parallela alla retta OA, che incontrerà la semiretta OB in un punto B′. Il circolo, che ha il centro in O, ed ha per raggio OB′, è diviso dai suoi punti d'incontro A′, B′, C′, D′, E′, con le semirette OA, OB, OC, OD, OE, condotte da O ai vertici del poligono ABCDE, in cinque parti eguali, e perciò il poligono A′B′C′D′E′, in esso inscritto, è regolare. Inoltre il suo lato A′B′ è parallelo ed AB, e perciò è eguale ad AL, e quindi anche a MN. Dunque A′B′C′D′E′ è il poligono cercato.

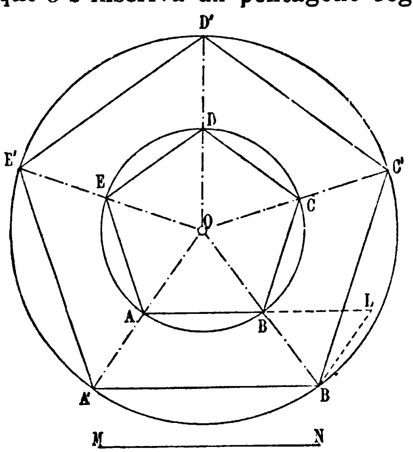


Fig. 183.

In tal modo la soluzione del problema proposto è ridotta alla soluzione dell'altro: *inscrivere un poligono regolare di* n *lati in un circolo*, il quale problema è stato risoluto nei §§ precedenti per vari valori di *n*.

## 3. — POLIEDRI REGOLARI.

**208. Definizioni.** — 1ª. Un angoloide si dice *regolare*, se tutte le sue facce sono eguali, e tutti i suoi diedri sono pure eguali.

2ª. Un prisma retto, avente per base un poligono regolare, si chiama *regolare*. Il segmento, che ha per estremi i centri delle due basi, si dice *asse* del prisma.

3ª. Una piramide, che ha per base un poligono regolare, ed ha per vertice un punto della perpendicolare al piano della base, condotta per il centro di essa, si dice *regolare*.

È facile vedere che in un prisma regolare le facce laterali sono rettangoli eguali, e in una piramide regolare le facce laterali sono triangoli isosceli eguali; quindi le distanze del vertice della piramide dai lati della base sono eguali.

4ª. Dicesi *apotema* di una piramide regolare la distanza del vertice da un lato della base. L'altezza di una piramide regolare dicesi anche *asse* della piramide.

**Teorema.** — *L'angoloide di una piramide regolare è regolare.*

Infatti, facendo rotare la piramide attorno al suo asse, in modo che ogni lato della sua base venga a coincidere col lato consecutivo, anche ogni faccia ed ogni diedro del suo angoloide viene a coincidere coi successivi, e perciò tutte le facce e tutti i diedri di questo angoloide sono eguali, vale a dire l'angoloide è regolare.

**Definizioni.** — 5ª. Un prisma retto, avente per base un settore poligonale re-regolare, dicesi *settore prismatico regolare*.

6ª. Una piramide, che ha per base un settore poligonale regolare, ed ha il vertice sulla perpendicolare al piano di questo settore, condotta per il centro del circolo ad esso circoscritto, dicesi *settore piramidale regolare*.

7ª. Un tronco di piramide, che ha per basi due settori poligonali regolari, ed ha lo spigolo che congiunge i centri dei circoli circoscritti a questi settori perpendicolare ai piani di questi si chiama *settore tronco-piramidale regolare*.

**209. Definizione.** — Un poliedro si chiama *regolare*, se tutte le sue facce sono poligoni regolari eguali, e tutti i suoi angoloidi sono pure eguali e regolari.

Per es. il cubo è un esaedro regolare.

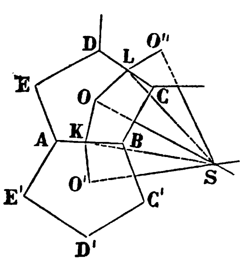


Fig. 184.

**Teorema.** — *Ad un poliedro regolare si può sempre inscrivere e circoscrivere una sfera.*

Sieno O, O′, O″ (fig. 184) i centri di tre facce consecutive del poliedro dato, AB, CD i lati, che la faccia di centro O′ ha in comune con le altre due, e sieno K, L i punti di mezzo di questi lati. Se per il punto K si conduce un piano perpendicolare ad AB, esso dovrà passare per i centri O ed O′ delle due facce, e contenere le perpendicolari alle medesime condotte dai punti O ed O′. Ne segue che queste due perpendicolari OS, O′S, giacendo in un piano, e non potendo evidentemente essere parallele, s'incontrano in un punto S. Si congiunga allora il punto

S col centro O″ della terza faccia e coi punti K ed L, e si considerino i triangoli rettangoli OKS, O′KS, che sono eguali, perchè hanno l'ipotenusa KS in comune e i due cateti OK, O′K eguali, come apotemi di poligoni regolari eguali. Se ne ricava OS ≡ O′S, $\widehat{OKS} \equiv \widehat{O'KS}$, vale a dire il punto S è equidistante dai piani delle due facce ABCDE ed ABC′D′E′, ed il piano AKS è bisettore del diedro $\widehat{AB}$. Considerando poi i due triangoli rettangoli KOS, LOS, che sono eguali, perchè hanno rispettivamente eguali i cateti, se ne ricava che KS≡LS ed $\widehat{OKS} \equiv \widehat{OLS}$; allora, essendo $\widehat{OKO'} \equiv \widehat{OLO''}$, come rettilinei di diedri eguali, ne viene che $\widehat{O''LS} \equiv \widehat{O'KS}$ ed LS è la bisettrice dell'angolo $\widehat{O'LO''}$. I due triangoli LSO″, LSO hanno LO″≡LO, LS comune, $\widehat{O''LS} \equiv \widehat{OLS}$, quindi sono eguali, e perciò OS ≡ O″S.

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le altre facce, si arriva infine a dimostrare, che il punto S è equidistante da tutte le facce del poliedro, e che quindi è il centro di una sfera inscritta al poliedro. Inoltre le distanze del punto S dai vertici di ciascuna faccia sono tutte eguali fra loro, perchè i loro estremi equidistano dall'estremo del segmento perpendicolare, e perciò sono raggi di una sfera, che ha per centro S ed è circoscritta al poliedro.

**Corollario.** — *Le perpendicolari ai piani delle facce di un poliedro regolare, condotte per i centri di esse, i piani perpendicolari agli spigoli nei loro punti di mezzo, e i piani bisettori dei diedri interni passano tutti per uno stesso punto, che è il centro comune delle sfere l'una inscritta e l'altra circoscritta al poliedro medesimo.*

**210. Teorema.** — *Non possono esistere più di cinque specie di poliedri regolari.*

Cominceremo col dimostrare che le facce di un poliedro regolare sono poligoni regolari, ciascuno de' quali non può avere più di cinque lati, e che ciascuno de' suoi angoloidi non può avere più di cinque facce. Infatti supponiamo che ciascuna faccia di un poliedro regolare sia un poligono regolare di $m$ lati; è chiaro che ciascuno degli angoli di questo poligono sarà eguale ad $\frac{m-2}{m}$ di angolo piatto (§ 83 Teor.).

Se ora indichiamo con $n$ il numero delle facce di ogni angoloide del poliedro regolare considerato, siccome in ogni angoloide convesso la somma delle facce è minore di due angoli piatti, dovrà essere

$$\frac{m-2}{m}.\,n < 2, \text{ ovvero } n < 2.\frac{m}{m-2}.$$

Da ciò deriva, che, il numero $m$ dovendo essere almeno eguale a 3, per $m = 3$ si ha

$$n < 2.\frac{3}{3-2},$$

ossia

$$n < 6,$$

ossia $n$ può essere eguale soltanto a 3, a 4, o a 5.

Analogamente per $m = 4$ si ha

$$n < 2 \cdot \frac{4}{4 - 2},$$

donde si ricava

$$n < 4,$$

e quindi, in questa ipotesi, $n$ può avere il solo valore 3.

Infine, supponendo $m = 5$, si ottiene

$$n < 2 \cdot \frac{5}{5 - 2}$$

ossia

$$n < \frac{10}{3},$$

e perciò in questo caso si può avere per $n$ il solo valore 3.

Per $m = 6$ si ha $\frac{m}{m-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ e per $m > 6$ si ha $\frac{m}{m-2} < \frac{3}{2}$, poichè una frazione impropria diminuisce aumentando di uno stesso numero i suoi due termini. Ne segue che per $m \geqq 6$ (*) dovrebbe essere $n < 3$, il che è assurdo; dunque non esiste alcun poliedro regolare formato con poligoni, aventi un numero di lati maggiore di 5.

Non possono dunque esistere altro che tre specie di poliedri regolari aventi per facce triangoli equilateri, ed aventi gli angoloidi di 3, 4, 5 facce; una sola specie di poliedri regolari, aventi per facce dei quadrati ed aventi gli angoloidi di tre facce; ed infine una sola specie di poliedri regolari, aventi per facce dei pentagoni regolari ed aventi gli angoloidi di tre facce ciascuno.

Mediante i teoremi dei § 136, 137 è poi facile determinare il numero di facce di spigoli e vertici di tali poliedri regolari.

Infatti abbiamo dimostrato che

$$2C = mF = nV$$
$$V + F = C + 2;$$

d'onde, ponendo in quest'ultima eguaglianza al posto di C e V i loro valori $\frac{mF}{2}$, $\frac{mF}{n}$, ricavati dalla prima, si ottiene

$$F = \frac{4n}{2(n + m) - mn},$$

e quindi

$$V = \frac{mF}{n} = \frac{4m}{2(n + m) - mn}$$

$$C = \frac{mF}{2} = \frac{2m \cdot n}{2(n + m) - mn}.$$

---

(*) In questo § per indicare l'eguaglianza di numeri, abbiamo usato il segno = che si adopera in aritmetica.

Mettendo al posto di $m, n$ le cinque coppie di valori possibili sopra trovate, si deducono i valori indicati nella seguente tabella:

| | F | V | C | *m* | *n* |
|---|---|---|---|---|---|
| Tetraedro . . . . . . | 4 | 4 | 6 | 3 | 3 |
| Esaedro . . . . . . . | 6 | 8 | 12 | 4 | 3 |
| Ottaedro . . . . . . . | 8 | 6 | 12 | 3 | 4 |
| Dodecaedro . . . . . . | 12 | 20 | 30 | 5 | 3 |
| Icosaedro. . . . . . . | 20 | 12 | 30 | 3 | 5 |

**211. Problema** *1°. — Costruire un tetraedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

Dal centro O del circolo circoscritto ad un triangolo regolare BCD, avente i lati eguali al dato segmento (fig. 185), s'innalzi la perpendicolare OA al piano di questo triangolo.

Essendo OB minore di BC, il circolo descritto nel piano AOB col centro in B e col raggio BC taglia la perpendicolare OA in un punto A. Il tetraedro ABCD è regolare.

Infatti AB = AC = AD, perchè hanno sul piano del triangolo BCD proiezioni OB, OC, OD eguali, inoltre AB = BC per costruzione, perciò le facce sono triangoli equilateri, e quindi regolari ed eguali. Ma anche i triedri sono eguali fra loro, perchè hanno tutte le facce eguali; dunque il tetraedro ABCD è regolare.

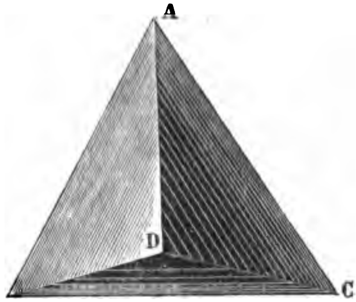


Fig. 185.

**Problema** *2°. — Costruire un esaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

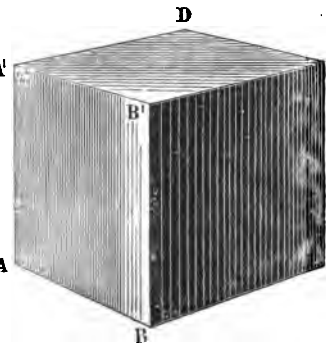


Fig. 186.

Sugli spigoli di un triedro trirettangolo $\widehat{B'.A'BC'}$ (fig. 186) si prendano, a partire dal vertice B', tre segmenti B'A', B'B, B'C', eguali al segmento dato, e per i loro estremi A', B, C' si conducano tre piani rispettivamente paralleli alle facce opposte del triedro. Si ottiene così (§ 155 Teor.) un parallelepipedo rettangolo le cui facce sono quadrati, ossia un cubo avente gli spigoli eguali al dato segmento.

**Problema** *3°. — Costruire un ottaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

Per il centro O del circolo circoscritto al quadrato ABCD, che ha i lati eguali al dato segmento (fig. 187) si tiri la perpendicolare al piano

di questo quadrato, e si prendano su di essa i segmenti OS, OS′ eguali ad OA e situati da parti opposte rispetto al punto O. La figura SABCDS′ è un ottaedro regolare.

Infatti, i triangoli rettangoli ASO, AOB sono eguali, perchè hanno i cateti eguali, dunque AS ≡ AB. Analogamente si dimostra la eguaglianza di tutti gli spigoli, e per conseguenza si ricava che le facce sono triangoli regolari eguali. Considerando poi le due piramidi SABCD, S′ABCD

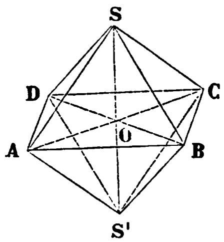
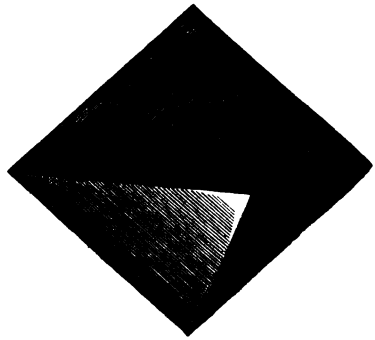


Fig. 187.


Fig. 188.

si dimostra subito che sono eguali, quindi tutti gli angoloidi sono eguali, e perciò l'ottaedro è regolare.

**Problema 4°.** — *Costruire un dodecaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

Sia ABCDE (fig. 189) un pentagono regolare, avente i lati eguali al segmento dato. Essendo l'angolo $\widehat{ABC}$ la quinta parte di tre angoli piatti, possiamo costruire col vertice in B un triedro regolare, di cui una faccia sia l'angolo $\widehat{ABC}$. Sia BH il terzo spigolo di questo triedro, e si costruisca il pentagono regolare ABFGH. Si ottiene così un nuovo triedro $\widehat{A}$ eguale al triedro $\widehat{B}$, perchè essi hanno un

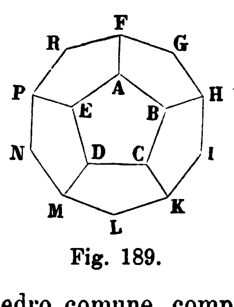
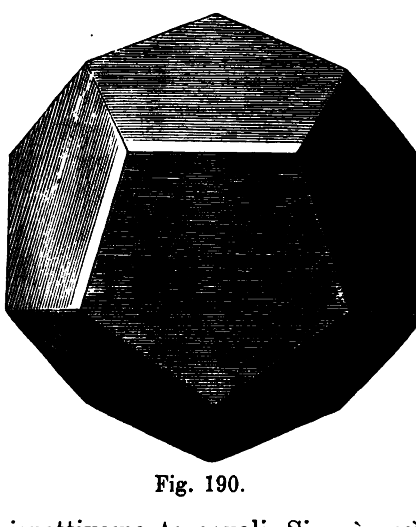


Fig. 189.


Fig. 190.

diedro comune, compreso tra facce rispettivamente eguali. Si può così costruire un pentagono regolare BCKIH, e nello stesso modo si possono

costruire altri tre pentagoni regolari CDMLK, DEPNM, EAFRP. Resta così costruita una figura composta di sei pentagoni regolari e terminata da un decagono gobbo equilatero FGHIKLMNPR. È facile vedere che gli angoli $N\widehat{P}R$, $P\widehat{R}F$,.... sono tutti eguali agli angoli di un pentagono regolare.

Se si costruisce nella stessa guisa un'altra figura eguale alla precedente, e quindi si porta l'una adiacente all'altra, in modo che i due decagoni coincidano, senza che coincidano le due figure, si ottiene una figura, la quale è un dodecaedro regolare.

**Problema** 5°. — *Costruire un icosaedro regolare, avente gli spigoli eguali ad un segmento dato.*

Dal centro O del circolo circoscritto ad un pentagono regolare ABCDE, avente i lati eguali al segmento dato, si innalzi una perpendicolare OS al piano dello stesso pentagono. Essendo AO < AB, il circolo, descritto nel piano AOS col centro A e con raggio AB, taglia la perpendicolare OS in un punto S. La piramide S.ABCDE ha cinque facce laterali che sono triangoli equilateri eguali, ed ha eguali tutti i diedri, i cui spigoli concorrono nel vertice S, perchè appartengono a triedri alla base eguali per costruzione. Ciò fatto,

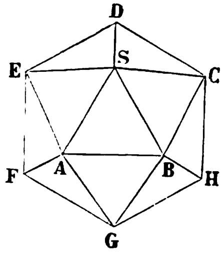



Fig. 191.

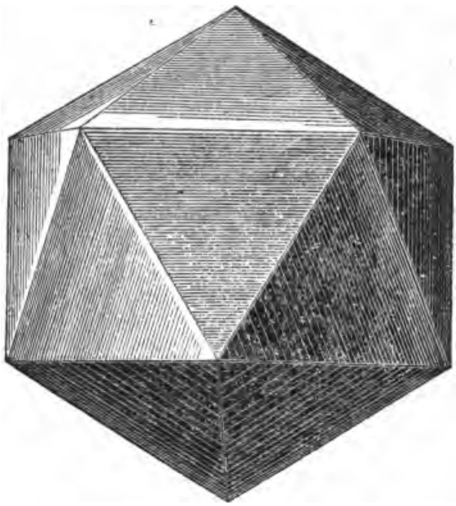


Fig. 192.

in ciascuno dei vertici A e B del triangolo SAB costruiamo una piramide eguale alla prima, e disponiamole come viene indicato dalla figura 191. Otteniamo così una superficie poliedrica, composta di dieci triangoli eguali, e terminata dall'esagono gobbo equilatero DCHGFE.

È inoltre facile vedere che tutti gli angoli $E\widehat{D}C$, $D\widehat{C}H$, ecc., sono eguali.

Se ora si costruisce nella stessa guisa un'altra figura eguale alla precedente, e indi si porta l'una adiacente all'altra in modo, che i due esagoni coincidano, senza che coincidano le due figure, si ottiene una figura la quale è evidentemente un icosaedro regolare.

# CAPITOLO III

## Geometria sulla sfera.

### 1. — ANGOLI E POLIGONI SFERICI.

**212.** In questo capitolo ci proponiamo di studiare le più notevoli proprietà delle figure appartenenti ad una superficie sferica, le quali hanno la più stretta analogia con quelle delle figure piane studiate fino ad ora, ove in luogo delle rette del piano si considerino i circoli massimi della superficie sferica, e in luogo dei circoli del piano si considerino i circoli, che si ottengono tagliando una sfera con piani non diametrali.

Della maggior parte dei teoremi, che enunceremo, lascieremo che il lettore faccia da sè la dimostrazione, imitando le dimostrazioni già date per i teoremi analoghi del piano, che citeremo volta per volta.

**Definizione 1ª.** — Si chiamano *circoli minori* di una sfera i circoli d'intersezione della sua superficie con piani non diametrali, e si chiamano *poli* di un circolo sopra una sfera gli estremi del diametro perpendicolare al piano del circolo.

**Corollari.** — *1°. Per tre punti di una superficie sferica passa uno ed un solo circolo appartenente alla superficie sferica.*

Esso è il circolo intersezione della superficie sferica col piano individuato da quei tre punti, ed è un circolo massimo o minore, secondochè il piano dei tre punti dati contiene o no il centro della sfera.

*2°. I circoli sopra una sfera, situati in piani paralleli, hanno gli stessi poli.*

**Definizione 2ª.** — Relativamente a due punti opposti di una sfera, si chiamano *paralleli* tutti i circoli sopra la medesima che hanno per poli quei punti; si chiama *equatore* il parallelo, che giace in un piano diametrale; si chiamano *meridiani* i circoli massimi, che passano per i due punti medesimi.

**Corollario 3°.** — *L'equatore è il luogo geometrico dei poli dei corrispondenti meridiani.*

**Definizione 3ª.** — Chiamasi *distanza polare* di due punti di una superficie sferica la corda che unisce quei due punti, e chiamasi *distanza sferica* degli stessi il minore arco di circolo massimo che è sotteso da quella corda.

**213. Teorema.** — *Un circolo sopra una sfera è il luogo geometrico dei punti della superficie sferica, che hanno eguali distanze sferiche (e polari) da ciascuno de' suoi poli.*

Infatti il diametro della sfera perpendicolare al piano del circolo c passa per il centro C di questo circolo; perciò, se P è un polo del

circolo $c$ ed A, B sono due punti di esso, le distanze polari PA, PB sono eguali, come segmenti obliqui condotti da uno stesso punto P al piano del circolo $c$, e aventi su questo piano proiezioni eguali. Allora anche le distanze sferiche PA, PB sono eguali, come archi di circoli massimi, sottesi da corde eguali. Invece è facile vedere che un punto della superficie sferica, non situato sul dato circolo, ha dal polo P una distanza sferica (e quindi anche polare) minore, o maggiore, della distanza sferica (o polare) di P dai punti del circolo stesso, secondo che esso si trova in quella delle due calotte separate dal circolo, nella quale si trova P, o nell'altra.

**Definizione 1ª.** — Ciascun polo di un circolo sopra una sfera dicesi *centro sferico,* e le due distanze sferiche e polari dai punti di questo si dicono rispettivamente *raggio sferico* e *raggio polare* del circolo.

**Corollari.** — *1°. Un circolo sopra una sfera ha due centri e due raggi sferici (o polari).*

*2°. I due raggi sferici (o polari) di un circolo massimo sono eguali, e quelli di un circolo minore sono disuguali.*

Quando non si avverta espressamente il contrario, per raggio e centro sferico di un circolo intenderemo sempre il minore dei due raggi sferici e il centro corrispondente del medesimo.

**Definizione 2ª.** — Un punto si dice *interno* od *esterno* ad un circolo minore sopra una sfera, secondochè è situato nella calotta, a cui appartiene il raggio sferico minore, oppure nell'altra.

**Corollario** *3°. — Secondochè un punto è interno od esterno ad un circolo sopra la sfera, esso ha dal centro sferico una distanza sferica minore o maggiore del raggio sferico; e viceversa.*

**214.** Nel § 30 e seguenti abbiamo definiti gli angoli sferici, o fusi, e studiate alcune delle loro principali proprietà. Queste figure sulla superficie sferica tengono il posto degli angoli nel piano e possiamo estendere ad esse la massima parte delle definizioni e teoremi relativi agli angoli piani. Dalla corrispondenza esistente fra gli angoli sferici e i loro diedri al centro, stabilita dal teorema 2° del § 33, risulta che due piani diametrali perpendicolari fra loro dividono la superficie sferica in quattro parti eguali fra loro, ciascuna delle quali è la quarta parte dell'intera superficie e la metà di una superficie semisferica, o angolo sferico piatto.

**Definizione 1ª.** — Un angolo sferico dicesi *retto, acuto* od *ottuso,* secondochè è eguale, minore o maggiore della metà di un angolo sferico piatto.

**Corollario** *1°. — Tutti gli angoli sferici retti appartenenti alla stessa sfera, od a sfere eguali, sono eguali.*

**Definizione 2ª.** — Due angoli sferici, la cui somma è un angolo sferico retto' diconsi *complementari.*

**Corollario** *2°. — Due angoli sferici complementari di angoli sferici eguali sono eguali.*

**Definizione 3ª.** — Due circoli massimi si dicono *perpendicolari* o *normali*, se formano quattro angoli sferici retti, *obliqui* nel caso contrario.

**215. Definizioni.** — 1ª. Si chiama *sezione normale* o *arco equatoriale* di un angolo sferico l'arco di circolo massimo, avente per poli i vertici dell'angolo, compreso fra i lati dell'angolo medesimo.

2ª. Si chiama *angolo ai poli* rispetto ad un circolo sopra una sfera ogni angolo sferico, che ha per vertici i poli di questo circolo.

Dato un circolo sopra una sfera, è facile vedere che ogni angolo ai poli determina sulla circonferenza un arco compreso fra i suoi lati, e viceversa ogni arco del suddetto circolo individua un angolo ai poli, fra i lati del quale esso è compreso.

**Teorema.** — *Dato un circolo sopra una sfera,*

*1° due archi, compresi in due angoli ai poli eguali, sono eguali;*

*2° di due archi, compresi in due angoli ai poli disuguali, è maggiore quello compreso nell'angolo maggiore;*

*3° la somma di due o più angoli ai poli comprende un arco, che è la somma degli archi compresi fra le parti della somma.*

*E viceversa.*

La dimostrazione è analoga a quella del § 33 Teor. 1°.

**Corollario** *1°*. — *In una stessa sfera o in sfere eguali:*

*1° se due angoli sferici sono eguali, gli angoli equatoriali corrispondenti sono pure eguali;*

*2° se due angoli sferici sono disuguali, l'angolo equatoriale, corrispondente all'angolo minore, è più grande di quello corrispondente all'angolo minore;*

*3° ad un angolo sferico, somma di due o più angoli sferici, corrisponde un arco equatoriale, che è la somma degli archi equatoriali corrispondenti ai primi.*

*E viceversa.*

**Corollario** *2°*. — *In una stessa sfera, o in sfere eguali, un angolo sferico è doppio triplo,.... di un altro, se l'arco equatoriale del primo è doppio, triplo,.... dell'arco equatoriale del secondo; e viceversa.*

**216. Teorema.** — *Dato un angolo sferico convesso, la distanza sferica dei poli dei lati, ciascuno dei quali è situato rispetto ad essi dalla stessa parte dell'altro lato, è il supplemento dell'arco equatoriale dell'angolo sferico.*

Questo teorema è conseguenza del § 71 Cor. 1°.

**217. Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *poligono sferico* la figura formata da più di due punti dati sopra una sfera in un certo ordine, in modo che tre consecutivi non sieno situati sopra un circolo massimo, e dai circoli massimi individuati dalle coppie di punti consecutivi e da quello individuato dal primo e dall'ultimo.

2ª. I punti dati si chiamano i *vertici*, i circoli massimi individuati da due vertici consecutivi si chiamano i *circoli del poligono*. Si chiamano *lati* del poligono gli archi di circoli massimi, minori di un semicircolo, che hanno per estremi due vertici consecutivi del poligono; l'arco, che manca a ciascun lato di un poligono per completare un circolo massimo, dicesi *prolungamento di quel lato*, e si chiamano *diago-*

*nali* gli archi di circoli massimi, minori di un semicircolo, che hanno per estremi due vertici non consecutivi del poligono.

3ª. Un poligono sferico prende il nome di *triangolo, quadrilatero,* o *quadrangolo, pentagono, esagono,....* secondo che ha 3, 4, 5, 6.... lati. La linea formata dai lati di un poligono sferico si chiama *contorno* di esso, e l'arco somma dei lati si chiama *perimetro.*

4ª. Si chiama *linea poligonale sferica* la linea formata da più lati consecutivi di un poligono.

5ª. Un poligono sferico (o una linea poligonale sferica) si dice *convesso,* quando tutti i suoi vertici sono situati da una stessa parte di uno qualunque dei suoi circoli; *concavo* nel caso contrario.

6ª. Un poligono sferico si dice *intrecciato,* o una linea poligonale si dice *intrecciata,* quando due lati non consecutivi si tagliano.

**Teorema.** — *Il contorno di un poligono sferico, non intrecciato, è una linea completa.*

La dimostrazione è in tutto simile a quella dell'analogo teorema per i poligoni piani (§ 74).

**Definizioni.** — 7ª. Si chiama *superficie* di un poligono sferico convesso la parte di superficie sferica, limitata dal contorno del poligono, la quale non contiene i prolungamenti dei lati.

8ª. Ogni angolo sferico convesso, che ha per vertice un vertice del poligono e i cui lati contengono i lati del poligono, che passano per esso vertice, dicesi *angolo sferico interno,* o semplicemente *angolo sferico del poligono.* Ogni angolo sferico, conseguente di un angolo interno del poligono, dicesi *esterno.*

Valgono anche per i poligoni sferici tutte le altre definizioni che abbiamo date per i poligoni piani.

**218. Teoremi.** — *1°. Se un circolo massimo passa per un punto interno ad un poligono convesso, ne incontra il contorno almeno in due punti.*

Si imiti la dimostrazione del Teorema 1° del § 80.

*2°. Un circolo massimo non può incontrare il contorno di un poligono sferico convesso in più di due punti.*

Si imiti la dimostrazione del Teorema 2° del § 80.

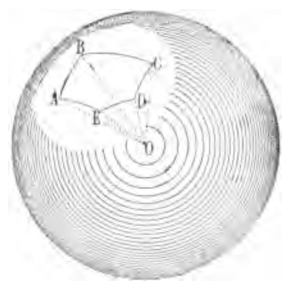


Fig. 193.

**219. Definizioni.** — 1ª. Ogni poligono sferico (fig. 193) determina un angoloide, che si chiama il suo *angoloide corrispondente,* il quale ha per vertice il centro della sfera, per spigoli le semirette, che passano per i vertici del poligono, per facce gli angoli formati da queste semirette, che comprendono i lati del poligono.

2ª. Si chiama *piramide sferica* il solido limitato da un poligono sferico e dall'angoloide corrispondente.

Per le relazioni che passano fra gli archi di circoli eguali e gli angoli al centro che si appoggiano su di essi, e fra gli angoli sferici e i diedri al centro che li comprendono, è chiaro che i poligoni sferici devono godere di proprietà analoghe a quelle degli angoloidi corrispondenti al centro. Esse si ricavano da queste, sostituendo

alla considerazione delle facce quella dei lati, alla considerazione dei diedri quella degli angoli sferici.

Estendiamo pure ai poligoni sferici le definizioni date per gli angoloidi. Così chiameremo poligono *supplementare* o *polare* di un altro convesso quello che ha per angoloide il supplementare dell'angoloide corrispondente al poligono dato. In altre parole, dato un poligono convesso, se costruiamo i poli dei suoi lati situati dalla stessa parte dei vertici del poligono, rispetto ai circoli ai quali appartengono questi lati, il poligono, che ha per vertici questi poli, presi nell'ordine stesso dei lati del poligono dato, è il poligono polare di quello dato.

**Definizione 3ª.** — Il poligono sferico, che ha per vertici consecutivi i punti opposti ai vertici consecutivi di un altro, si dice *opposto* a questo.

**Corollari.** — *1°. Due poligoni sferici opposti sono simmetrici rispetto al centro della sfera.*

Due poligoni opposti hanno tutti i lati e tutti gli angoli eguali; tuttavia è facile vedere che, in generale, come i corrispondenti angoloidi al centro, non si possono portare a coincidere. Sappiamo invece che due poligoni piani, che hanno tutti i lati e gli angoli eguali rispettivamente, si possono portare sempre a coincidere. Questa differenza non può fare meraviglia, se si pensa che nel piano si possono portare a coincidere due figure eguali, ribaltando l'una sull'altra, ossia scambiando le due facce del piano, le quali sono eguali. Nella sfera, invece, le facce interna ed esterna non sono eguali, e quindi non si possono portare a coincidere.

*2°. Due triangoli sferici isosceli opposti sono eguali.*

**220.** Dalle proprietà degli angoloidi dimostrate nel § 114 e seguenti si ricavano immediatamente le seguenti proprietà dei poligoni sferici.

**Teorema** *1°. — In ogni poligono sferico un lato è minore della somma dei rimanenti* (§ 114 Teor.)

**Corollario.** — *In ogni triangolo sferico un lato è maggiore della differenza degli altri due.*

**Teoremi.** — *2°. In ogni poligono sferico convesso la somma dei lati è minore di un circolo massimo* (§ 115 Teor.)

*3°. Se in un triangolo sferico sono eguali due angoli, sono eguali anche i lati opposti ad essi, e viceversa* (§ 113 Cor. 1°).

**Corollario.** — *Un triangolo sferico equilatero è anche equiangolo, e viceversa.*

**Teoremi.** — *4°. Se in un triangolo sferico due angoli sono diseguali, anche i lati opposti sono diseguali, ed è più grande quello opposto all'angolo maggiore, e viceversa* (§ 114 Cor. 2° e 3°).

*5°. Se un poligono sferico è polare di un altro, il secondo è polare del primo* (§ 116 Teor.)

*6°. Se due poligoni sferici sono polari, i lati dell'uno sono supplementari degli archi equatoriali degli angoli sferici dell'altro* (§ 117 Teor.)

*7°. In ogni poligono sferico,*

*a) un angolo, aumentato di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due, supera la somma degli altri angoli;*

*b) la somma di tutti gli angoli è minore di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati, ed è maggiore di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due* (§ 118 Teor.)

**Corollario.** — *In ogni triangolo sferico,*

*a) ciascun angolo sferico, aumentato di un angolo sferico piatto, è maggiore della somma degli altri due;*

*b) la somma degli angoli sferici è maggiore di uno e minore di tre angoli sferici piatti;*

*c) la differenza di due angoli sferici è minore dell'angolo sferico esterno conseguente al terzo.*

**Definizione.** — Un triangolo sferico si dice *rettangolo, birettangolo, trirettangolo,* secondo che ha uno, due, tre angoli sferici retti.

**Teorema** *8°.* — *In una stessa sfera, o in sfere eguali, due triangoli sferici sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto dell'altro,*

*1° se hanno un lato e i due angoli adiacenti rispettivamente eguali* (§ 120 Teor. 1°);

*2° se hanno un angolo eguale compreso fra lati rispettivamente eguali* (§ 120 Teor. 2°);

*3° se hanno due lati e l'angolo opposto ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè gli angoli opposti agli altri due lati eguali sieno della stessa specie, e due almeno dei lati eguali siano diversi da un quarto di circolo* (§ 121 Teor. 1°);

*4° se hanno due angoli e il lato opposto ad uno di essi rispettivamente eguali, purchè i lati opposti agli altri due angoli eguali sieno della stessa specie, e almeno due degli angoli eguali non siano retti* (§ 121 Teor. 2°),

*5° se hanno i tre lati rispettivamente eguali* (§ 123 Teor. 1°),

*6° se hanno i tre angoli rispettivamente eguali* (§ 125 Cor. 2°).

**Teoremi.** — *9°. Se due lati di un triangolo sferico sono rispettivamente eguali a due lati di un altro, e l'angolo compreso fra i due lati del primo è maggiore, eguale o minore dell'angolo compreso fra i due lati eguali dell'altro, il terzo lato del primo è rispettivamente maggiore, eguale o minore del terzo lato dell'altro.*

*E viceversa* (§ 122 Teor. 1°).

*10°. Se due triangoli sferici appartengano ad una stessa superficie sferica, od a superficie sferiche eguali, e due angoli dell'uno sono rispettivamente eguali a due angoli dell'altro, il terzo angolo del primo triangolo è maggiore, eguale o minore del terzo angolo dell'altro triangolo, secondo che il lato opposto a questo angolo nel primo triangolo è maggiore, eguale o minore del lato corrispondente del secondo.*

*E viceversa* (§ 122 Teor. 2°).

*11°. Due poligoni sferici convessi di* n *lati sono eguali, o simmetrici,*

*1° se hanno* n — 1 *lati rispettivamente eguali, ed hanno eguali gli angoli compresi tra i lati eguali;*

*2° se hanno* n — 1 *angoli rispettivamente eguali, ed hanno eguali i lati aventi per estremi i vertici degli angoli eguali;*

*3° se hanno tutti i lati eguali ed* n — 3 *angoli consecutivi, compresi tra i lati eguali, pure eguali;*

*4° se hanno tutti gli angoli eguali ed* n — 3 *lati consecutivi, adiacenti ad angoli eguali, pure eguali* (§ 125).

**221.** Poichè la somma degli angoli di un poligono è maggiore di tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due, esiste un angolo sferico differenza fra la suddetta somma e tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due.

**Definizione.** — Si chiama *eccesso sferico di un poligono* la differenza tra la somma dei suoi angoli e tanti angoli sferici piatti quanti sono i lati meno due.

L'*eccesso sferico* di un triangolo è perciò eguale alla somma dei suoi tre angoli diminuita di un angolo sferico piatto.

**Teoremi.** — *1°. Se un poligono piano o sferico è scomposto in più poligoni, il numero di questi, aumentato del numero dei vertici comuni o non comuni a più poligoni parziali, supera di uno il numero dei lati di questi poligoni.*

Indichiamo con $p$ il numero delle parti in cui è scomposto un dato poligono, con $v$ ed $l$ il numero dei vertici e dei lati comuni o non comuni a queste parti; si deve dimostrare l'eguaglianza

$$v + p - l = 1.$$

Infatti, se dal poligono dato sopprimiamo una delle sue parti che abbia con esso in comune $n$ lati consecutivi, e perciò anche $n - 1$ vertici, e indichiamo con $p', v', l'$ i numeri di poligoni, di vertici e di lati rimanenti si ha

$$p' = p - 1, \qquad v' = v - (n - 1), \qquad l' = l - n,$$

e quindi

$$v' + p' - l' = v + p - l.$$

La differenza $v + p - l$ dunque non cambia, sopprimendo successivamente una ad una le parti del poligono dato. Quando è rimasto un solo poligono parziale di $n$ lati, si ha $v = n$, $l = n$, $p = 1$, e perciò si ha sempre

$$v + p - l = 1.$$

Se ne deduce

$$v - 1 = l - p.$$

*2°. Se un poligono sferico è scomposto in più poligoni sferici, il suo eccesso sferico è eguale alla somma degli eccessi sferici delle sue parti.*

Indichiamo con $m_1, m_2, \ldots, m_p$ i numeri dei lati dei $p$ poligoni, in cui è scomposto un poligono sferico dato, con $S_1, S_2, \ldots, S_p$ le somme degli angoli sferici di questi poligoni, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon_p$ i loro eccessi sferici, con $\varepsilon$ l'eccesso sferico dell'intero poligono, con $\pi$ un angolo sferico piatto. Si ha

$$\varepsilon_1 \equiv S_1 - (m_1 - 2)\pi$$
$$\varepsilon_2 \equiv S_2 - (m_2 - 2)\pi$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_p \equiv S_p - (m_p - 2)\pi,$$

e sommando queste eguaglianze

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv \sum_1^p S_i - \sum_1^p m_i\, \pi + 2\, p\, \pi.$$

Indichiamo ora con $l_1$ il numero dei lati che fanno parte del contorno dell'intero poligono, con $l_2$ quello dei lati interni al medesimo. Siccome ciascuno di questi ultimi lati è comune a due poligoni parziali, mentre ciascuno dei primi appartiene ad un solo di questi poligoni si ha

$$\sum_1^p m_i = l_1 + 2\, l_2,$$

e per conseguenza l'eguaglianza precedente diviene

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv \sum_1^p S_i - l_1\, \pi - 2\, l_2\, \pi + 2\, p\, \pi \equiv \sum_1^p S_i + l_1\, \pi - 2\, (l - p)\, \pi,$$

essendo $l = l_1 + l_2$. Per il teorema precedente si ha pure

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv \sum_1^p S_i + l_1\, \pi - 2\, (v - 1)\, \pi.$$

Se ora sopprimiamo tutti gli $l_2$ lati interni all'intero poligono, per ogni vertice soppresso interno al poligono, $\sum_1^p S_i$ e $2\,(v-1)\,\pi$ diminuiscono ciascuno di $2\,\pi$ e $l_1\,\pi$ non cambia, mentre per ogni vertice soppresso, situato sul contorno ma non appartenente all'intero poligono, $\sum_1^p S_i$ e $l_1\,\pi$ diminuiscono ciascuno di $\pi$ *e* $2\,(v-1)\,\pi$ di $2\,\pi$, e quindi in ogni caso il secondo membro dell'eguaglianza precedente non cambia. Ma così operando $\sum_1^p S_i$ si riduce alla somma S degli angoli dell'intero poligono, $v$ e $l$, diventano il numero $n$ dei suoi vertici e dei suoi lati, onde si ottiene

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv S + n\, \pi - 2\, (n - 1)\, \pi \equiv S - (n - 2)\, \pi \equiv \varepsilon.$$

## 2. — CIRCOLI SOPRA LA SFERA.

**222. Teorema.** — *Fra gl'infiniti archi di circoli massimi, che terminano ad un circolo sopra una sfera, e partono da un punto della superficie sferica, che non sia uno dei poli,*

*1° quello normale, che contiene il centro, è maggiore di qualunque altro;*

*2° quello normale, che non contiene il centro, è minore di qualunque altro;*

*3° due archi, i cui estremi distano egualmente dall'estremo di un arco normale, sono eguali; altrimenti è maggiore quello, il cui estremo ha una distanza maggiore dal segmento normale minimo.*
*E viceversa.*

La dimostrazione è indentica a quella del § 187.

**Corollari.** — *1°. Ad un circolo sopra una sfera non si possono condurre da un punto della superficie sferica, che non sia uno dei centri sferici, più di due archi di circoli massimi eguali fra loro.*
*2°. Fra tutti gli archi di circoli massimi, che terminano a due paralleli di una sfera, quelli ad essi perpendicolari sono eguali fra loro e sono minori di tutti gli altri.*

**Definizioni.** — 1ª. Si chiama *distanza sferica* di un punto di una superficie sferica da uno de' suoi circoli il più piccolo arco di circolo massimo, che si può condurre dal quel punto al circolo.
2ª. Si chiama *distanza sferica di due paralleli* sopra una sfera la distanza sferica di un punto qualunque di uno di essi dall'altro.

**223. Teorema** *1°. — Il luogo dei punti di una superficie sferica, che hanno eguali distanze sferiche da due punti dati su di essa, è il circolo massimo perpendicolare alla distanza sferica dei due punti, condotto per il punto medio di essa.*

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del § 160.

**Corollario** *1°. — I circoli massimi perpendicolari ai lati di un triangolo sferico nei loro punti medi passano per due stessi punti opposti della sfera, che sono i soli punti della medesima aventi eguale distanza sferica dai vertici del triangolo.*

**Teorema** *2°. — Il luogo dei punti di una superficie sferica, che hanno eguali distanze sferiche da due circoli massimi della sfera, è la coppia di circoli massimi bisettori dei quattro angoli sferici formati dai primi due.*

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella del teorema del § 162.

**Corollario** *2°. — I circoli massimi bisettori degli angoli sferici interni ed esterni di un triangolo sferico si incontrano tre a tre in quattro coppie di punti opposti della sfera che sono i soli punti della superficie sferica aventi eguali distanze sferiche dai circoli del triangolo.*

**224. Teorema.** — *Un circolo massimo di una sfera ha con un circolo minore nessuno, uno o due punti in comune, secondo che il circolo massimo ha dal centro sferico del circolo minore una distanza maggiore, eguale o minore del raggio sferico di questo circolo.*

Questo teorema, analogo ad un teorema della geometria sul piano (§ 174) relativo alle posizioni di una retta e di un circolo, si dimostra con eguali ragionamenti, sostituendo alle rette i circoli massimi ed alla distanza ordinaria la distanza sferica.

**Definizioni.** — 1ª. Dati sopra una sfera un circolo massimo ed un circolo minore, diremo che il circolo massimo è *tangente* o *secante* del circolo minore, secondochè ha con esso uno o due punti comuni. Chiameremo poi punto di *contatto*, o di *tangenza*, il punto comune ad un circolo minore, o ad un suo circolo massimo tangente.

2ª. Dicesi *tangente sferica*, condotta da un punto sopra una sfera ad un suo circolo minore, il minore degli archi di circolo massimo tangente, che ha per estremi quel punto e il punto di contatto.

**225. Teorema.** — *Si può sempre condurre uno, ed un solo, circolo massimo tangente ad un dato circolo minore in un suo punto.*

Esso è il circolo massimo perpendicolare nel punto dato al raggio sferico che termina in quel punto; ossia è il circolo massimo il cui piano contiene la retta tangente al dato circolo nel punto considerato.

**226. Teorema.** — *Dati due circoli minori sopra una sfera, aventi raggi sferici diseguali,*

*1° se la distanza sferica dei loro centri è maggiore della somma dei loro raggi sferici, tutti i punti di ciascun circolo sono esterni all'altro;*

*2° se la distanza sferica dei centri è eguale alla somma dei raggi sferici, i due circoli hanno un solo punto comune e tutti gli altri punti dell'uno sono esterni all'altro;*

*3° se la distanza sferica dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi sferici, i due circoli hanno due punti in comune;*

*4° se la distanza sferica dei centri è eguale alla differenza dei raggi sferici, i due circoli hanno un solo punto in comune, e tutti gli altri punti di quello di raggio sferico minore sono interni all'altro;*

*5° se la distanza sferica dei centri è minore della differenza dei raggi sferici, tutti i punti del circolo di raggio sferico minore sono interni all'altro.*

*E viceversa.*

La dimostrazione di questo teorema è perfettamente simile a quella del Teorema del § 188 relativo alla posizione di due circoli in un piano.

**Definizione.** — Diremo che due circoli minori, dati sopra una sfera, sono *tangenti esternamente*, quando hanno un solo punto comune, e tutti gli altri punti di uno di essi sono esterni all'altro; che sono *tangenti internamente*, quando hanno un solo punto comune, e tutti gli altri punti di uno di essi sono interni all'altro.

**Corollari.** — *1°. Due circoli sopra una sfera aventi due punti comuni si tagliano in essi, e l'arco di circolo massimo, che termina a quei due punti, è perpendicolare all'arco di circolo massimo che unisce i centri sferici dei due circoli, ed è diviso da esso per metà.*

*2°. Se due circoli sopra una sfera sono tangenti, il circolo massimo che passa per i loro centri sferici, passa anche per il loro punto di contatto ed è perpendicolare ad entrambi.*

**227. Teorema.** — *Per un punto di una superficie sferica, esterno ad un circolo minore ed al suo simmetrico rispetto al centro della sfera, si possono condurre ad esso due circoli massimi tangenti.*

Sia O il centro sferico di un circolo minore $c$ (fig. 194), ed A un punto della superficie sferica esterno a $c$ ed al suo simmetrico rispetto al centro della sfera. Fatto centro in O, con un raggio sferico eguale al doppio del raggio sferico di $c$, si descriva un circolo $c'$; indi, fatto centro in A, con un raggio sferico eguale ad OA si descriva un altro circolo $c''$, il quale taglierà il circolo $c'$ nei punti B e B'. Ora gli archi di circoli massimi OB, OB' incontrano il circolo $c$ nei punti E, E' tali che i circoli massimi AE, AE' risultano tangenti a $c$. Infatti, essendo E il punto medio di OB, ed essendo A un punto, che ha eguale distanza sferica da B e O per costruzione, è chiaro che il circolo massimo AE è il luogo di tutti i punti dalla superficie sferica, che hanno eguale distanza sferica da B ed O, e perciò esso è perpendicolare al raggio sferico OE, vale a dire è tangente al circolo $c$. Analoga dimostrazione per AE'.

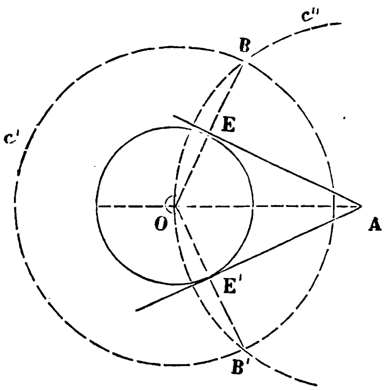



Fig. 194.

Se il punto A fosse dato internamente al circolo minore, è chiaro che non si potrebbe condurre per esso alcun circolo massimo tangente al quel circolo.

Se poi il punto A fosse dato internamente al circolo $c_1$ simmetrico di $c$ rispetto al centro della sfera, si vede subito che, un circolo massimo essendo simmetrico a sè stesso rispetto al centro della sfera, ed ogni circolo massimo condotto per A incontrando necessariamente il circolo $c_1$ in due punti, tutti i circoli massimi condotti per A taglieranno il circolo $c_1$ ed il suo simmetrico $c$ in due coppie di punti rispettivamente simmetrici rispetto al centro della sfera.

**Corollari.** — *1°. Gli archi di circoli massimi tangenti, condotti da un punto di una superficie sferica ad un circolo minore, sono eguali.*

*2°. Se un circolo massimo di una sfera è tangente ad un circolo minore, esso è pure tangente al circolo simmetrico del primo rispetto al centro della sfera.*

### 3. — POLIGONI SFERICI INSCRITTI O CIRCOSCRITTI AD UN CIRCOLO SOPRA LA SFERA.

**228. Definizioni.** — 1ª. Se un poligono sferico ha tutti i suoi vertici su di un circolo della superficie sferica, si dice ch'esso è *inscritto al circolo*, e che il circolo è *circoscritto al poligono*. Dicesi *raggio sferico* di un poligono inscritto, il raggio sferico del circolo ad esso circoscritto.

2ª. Se un poligono sferico ha tutti i suoi lati tangenti ad un circolo sopra la sfera, si dice ch'esso è *circoscritto* al circolo, e che il circolo è *inscritto* nel poligono. Chiamasi *apotema* il raggio sferico del circolo inscritto.

**Teoremi.** — *1°. Ad ogni triangolo sferico si può sempre circoscrivere un circolo.*

*2°. Esistono quattro circoli tangenti ai circoli massimi di un triangolo sferico.*

Le dimostrazioni sono analoghe a quelle del § 194 Teor. 2° e del § 196 Teor. 2°.

**229. Teorema** *1°. — Affinchè si possa circoscrivere un circolo ad un quadrangolo sferico, è necessario e sufficiente che la somma di due angoli opposti sia eguale alla somma degli altri due.*

Sia ABCD (fig. 195) il quadrangolo sferico inscritto al circolo di centro sferico P. Se si congiunge P con tutti i vertici del quadrangolo mediante archi di circoli massimi, è chiaro che si ottengono tanti triangoli sferici isosceli quanti sono i lati del quadrangolo, dalla considerazione dei quali è facile dedurre che $B\widehat{A}D + B\widehat{C}D = A\widehat{D}C + A\widehat{B}C$.

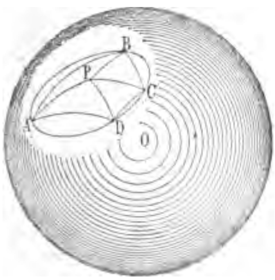



Fig. 195.

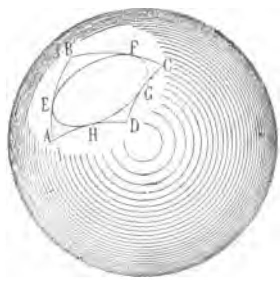



Fig. 196.

Viceversa, se è vera questa eguaglianza, condotto il circolo, che passa per i tre vertici A, B, C del quadrangolo, si dimostra, per assurdo, che esso deve passare anche per il quarto vertice D. Lasciamo, come esercizio, al lettore la cura di esporre il completo sviluppo della dimostrazione.

**Teorema** *2°. — Affinchè si possa inscrivere un circolo ad un quadrangolo sferico, è necessario e sufficiente che la somma di due lati opposti sia eguale alla somma degli altri due.*

La dimostrazione di questo teorema (fig. 196) è del tutto conforme alla dimostrazione del teorema analogo nella geometria del piano, relativo alla condizione necessaria e sufficiente, perchè si possa inscrivere un circolo ad un quadrangolo piano convesso (§ 199).

**230. Definizione.** — Un poligono sferico convesso si dice *regolare*, se ha tutti i suoi lati eguali e tutti i suoi angoli eguali.

**Teorema** *1°. — Ad un poligono sferico regolare si può sempre inscrivere o circoscrivere un circolo.*

**Corollario.** — *Le bisettrici degli angoli di un poligono sferico regolare, e i circoli massimi perpendicolari ai lati nei loro punti medii, pas-*

*sano per due punti opposti della sfera, che sono i centri sferici del circolo inscritto e del circolo circoscritto.*

**Teorema 2°.** — *Se più punti dividono un circolo sopra una sfera in archi eguali, il poligono sferico, che ha per vertici consecutivi i suddetti punti, e quello che ha per circoli consecutivi i circoli massimi tangenti al dato circolo nei punti medesimi sono regolari.*

Si imitino le dimostrazioni dei §§ 200 e 201.

Dai teoremi precedenti risulta che per iscrivere o circoscrivere ad un dato circolo sopra una sfera un poligono sferico regolare di $n$ lati, basta dividere il circolo stesso in $n$ parti eguali. Questo problema è stato già risoluto nel § 203 e seguenti per i casi in cui $n$ abbia i valori 4, 8, 16, ....; 3, 6, 12, ....; 5, 10, 20, ....; 15, 30, etc.

# CAPITOLO IV

## Superficie e solidi di rotazione.

### 1. — SUPERFICIE CONICA E CONO.

**231. Definizioni.** — **1ª. Date in un piano una retta ed una linea qualunque, se facciamo rotare la figura di un intero giro attorno alla data retta, la superficie luogo della linea data, che rota nel modo indicato, si chiama una superficie di *rivoluzione* o di *rotazione* o *rotonda*.**

Per esempio la superficie sferica, generata dalla rotazione di un semicircolo attorno al proprio diametro, è una superficie rotonda.

**2ª. La retta fissa dicesi *asse*, e la linea mobile, in ciascuna sua posizione, dicesi *meridiano*.**

È chiaro che tutti i punti della linea mobile descrivono nella rotazione circoli situati in piani perpendicolari all'asse e aventi per centri punti dell'asse; ed è chiaro altresì che ogni piano passante per l'asse incontra la superficie lungo un meridiano.

**3ª. Tutti i piani perpendicolari all'asse, e che incontrano la superficie, si dicono *normali* e le sezioni prodotte si dicono *sezioni normali*, o *paralleli* della superficie. Tutti i piani che passano per l'asse si dicono *piani meridiani*. Diconsi *poli* i punti d'incontro della superficie col proprio asse.**

**Corollario.** — *Un piano perpendicolare all'asse di una superficie di rotazione taglia questa superficie secondo un circolo; tutti i piani che passano per l'asse la tagliano secondo linee eguali.*

**232. Definizioni.** — 1ª. Se il piano di due rette, che si tagliano, compie un giro, rotando intorno ad una di esse, l'altra retta descrive una superficie, che si chiama *superficie conica rotonda, o di rotazione.*

2ª. La retta mobile, in tutte le sue posizioni, si chiama *generatrice*, e il suo punto d'incontro coll'asse si chiama *vertice* della superficie conica.

3ª. Il vertice di una superficie conica rotonda divide ogni sua generatrice in due parti, e quindi divide anche anche la superficie stessa in due parti dette *falde* della medesima.

Ciascuna falda di una superficie conica rotonda è generata da un lato di un angolo, il cui piano compie un giro, rotando attorno all'altro lato.

4ª. Chiamasi *angolo di una superficie conica rotonda* ciascuno degli angoli acuti formati da una generatrice coll'asse.

**Teorema.** — *Una superficie conica rotonda è il luogo dei punti, le cui congiungenti col vertice della superficie formano coll'asse un angolo eguale all'angolo della superficie conica medesima.*

Risulta evidente dalle definizioni suesposte che ogni punto di una superficie conica rotonda è tale, che la sua congiungente col vertice della superficie forma coll'asse della medesima un angolo eguale all'angolo della superficie conica. Viceversa, se un punto P è tale, che la sua congiungente col vertice formi coll'asse un angolo eguale all'angolo della superficie conica, quel punto si deve trovare sulla superficie medesima, perchè quando il piano della generatrice e dell'asse sia venuto a passare per P, il punto P si deve trovare sulla generatrice.

Deriva inoltre da ciò che precede, che una superficie conica rotonda separa una parte dello spazio, la quale contiene tutti i punti, le cui congiungenti col vertice della superficie conica formano coll'asse un angolo minore dell'angolo della superficie medesima, da un'altra parte che contiene tutti i punti, le cui congiungenti col vertice della superficie conica formano un angolo maggiore dell'angolo della superficie medesima.

In seguito a ciò si può asserire che una superficie conica rotonda è una superficie completa, e che anche ciascuna sua falda è una superficie completa.

**Corollario.** — *Se si taglia una superficie conica rotonda con un piano, che incontri tutte le generatrici in punti appartenenti a una medesima falda, la sezione così ottenuta ha tutti i suoi punti compresi nella superficie medesima.*

**233. Teorema.** — *Un piano passante pel vertice di una superficie conica rotonda,*

*1° ha tutti gli altri suoi punti esterni alla superficie e non compresi fra essa, se forma coll'asse un angolo maggiore di quello della superficie;*

*2° ha in comune con essa tutti e soli i punti di una generatrice, se forma coll'asse un angolo eguale a quello della superficie;*

*3° ha in comune con essa i punti di due generatrici, se forma coll'asse un angolo minore di quello della superficie.*

*E viceversa.*

1°. Sia $\alpha$ (fig. 197) un piano che, passando per il vertice V della superficie conica, faccia coll'asse $a$ un angolo $\widehat{CVO}$ maggiore dell'angolo $\widehat{OVA}$ della superficie medesima. Ogni punto della retta VC, non coincidente con V, è esterno alla superficie conica (§ 233 Teor.), inoltre ogni altro punto P del piano $\alpha$ è pure esterno alla medesima, perchè essendo $\widehat{PVO}$ eguale o maggiore di $\widehat{CVO}$ e quest'ultimo maggiore di $\widehat{OVA}$ per ipotesi, si ha pure $\widehat{PVO} > \widehat{OVA}$; dunque ogni punto P di $\alpha$ è esterno alla superficie conica.

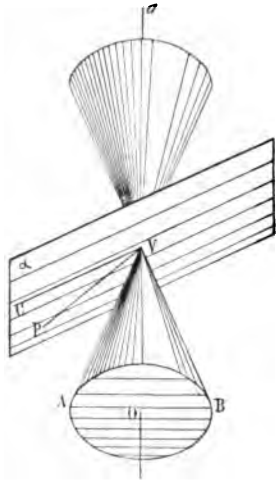


Fig. 197.

2°. Se l'angolo $\widehat{CVO}$ è eguale (fig. 198) all'angolo $\widehat{OVA}$, allora VA coincide con VC, e tutti gli altri punti del piano $\alpha$ sono esterni alla superficie, perchè le loro congiungenti col vertice V formano con l'asse VO un angolo maggiore di $\widehat{CVO}$, e quindi maggiore dell'angolo della superficie conica.

3°. Se infine l'angolo $\widehat{CVO'}$ del piano $\alpha$ coll'asse della superficie conica è minore (fig. 199) di $\widehat{A'VO'}$, tagliando la superficie conica con un piano $\beta$ normale ad essa e passante per C si ottiene, come sezione, un cerchio $c$, di cui C è un punto interno, ed allora la intersezione A′B′

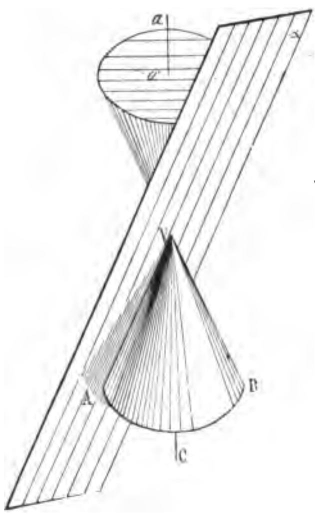


Fig. 198.

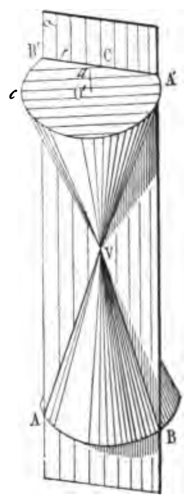


Fig. 199.

dei due piani $\alpha$ e $\beta$ è una retta, la quale, passando per un punto C interno al cerchio $c$, lo taglia in due punti A′, B′ appartenenti alla superficie conica. Ne viene che le rette VA′, VB′ sono comuni al piano $\alpha$ ed alla superficie conica; nè può esistere alcun altro punto P della superficie conica, fuori delle rette VA′, VB′, il quale appartenga anche

al piano $\alpha$, perchè altrimenti il piano $\alpha$ avrebbe in comune colla superficie conica tutta la retta VP e col piano $\beta$ avrebbe in comune un terzo punto, situato fuori della retta A′B′, e che sarebbe l'incontro della retta VP con questo piano; dunque i due piani $\alpha$ e $\beta$ coinciderebbero e ciò è assurdo.

I teoremi inversi sono veri per la solita legge delle inverse esposta nei preliminari.

**Corollario** *1°. — Una retta, che non passi per il vertice di una superficie conica rotonda, e non sia parallela ad una generatrice, può aver comune colla superficie nessuno, uno, o due punti.*

Infatti, condotto il piano individuato dalla retta e dal vertice, secondo che esso ha in comune colla superficie nessuna, una, o due generatrici, la retta avrà in comune colla stessa nessuno, uno, o due punti.

**Definizioni.** — 1ª Un piano si dice *tangente*, o *secante* di una superficie conica rotonda, secondochè ha in comune colla medesima una generatrice, o punti di due o più generatrici. La generatrice, comune ad una superficie conica rotonda e ad un suo piano tangente, si chiama *generatrice di contatto*.

2ª. Una retta, che non passi per il vertice di una superficie conica rotonda e non sia parallela ad una generatrice, si dice *tangente*, o *secante* di essa, secondo che ha in comune colla medesima uno, o due punti.

**Corollari.** — *2°. Per un punto di una superficie conica rotonda che non sia il vertice passa un solo piano tangente, per il vertice ne passano infiniti.*

*3°. Per un punto esterno ad una superficie conica rotonda e non compreso in essa passano due piani tangenti alla medesima.*

Infatti, condotto il piano normale alla superficie, che passa per quel punto, si potranno condurre da esso due sole tangenti al circolo sezione. Ciascuno dei piani individuato da una di quelle tangenti e dal vertice è tangente alla superficie, e questi due sono i soli piani tangenti, che passano per il punto dato.

*4°. Per un punto di una superficie conica rotonda, che non sia il vertice, passano infinite rette tangenti, il cui luogo è il piano tangente alla superficie in quel punto.*

**234. Teorema.** — *Le infinite rette tangenti ad una sfera, condotte per un suo punto esterno, sono le generatrici di una superficie conica rotonda, che ha per vertice quel punto, ed ha per asse la retta che unisce il vertice col centro della sfera.*

Questo teorema discende dal Problema 2° del § 193. È evidente che la superficie conica e la sfera hanno in comune tutti i punti di un circolo minore.

**Definizione.** — Una superficie conica rotonda ed una sfera si dicono *tangenti*, quando hanno in comune tutti, e soli, i punti di un circolo minore, il quale si chiama *circolo di contatto*.

**Corollario.** — *Per un circolo minore di una sfera passa una, ed una sola, superficie conica rotonda tangente alla sfera.*

**235.** Sappiamo che, se si conduce un piano che incontra tutte le generatrici di una superficie conica rotonda in punti appartenenti a una medesima falda, la sezione così ottenuta ha tutti i suoi punti compresi nella superficie conica; per conseguenza (P. IV, 1°) detto piano divide la parte di spazio separata dalla falda, che esso incontra, in due altre parti, delle quali una è finita e contiene il vertice.

**Definizioni.** — 1ª. Il solido finito, limitato da una falda di superficie conica rotonda e da un piano, che ne incontra tutte le generatrici in punti appartenenti alla stessa falda, si chiama *cono rotondo.* Esso si dice *obliquo,* se il piano secante è obliquo all'asse, *retto* se il piano secante è normale all'asse. Il cono rotondo e retto si dirà semplicemente *cono rotondo.*

2ª. La superficie, limitata dalla sezione suddetta, si dice *base* del cono; il vertice della superficie si chiama il *vertice* del cono. La distanza del vertice dal piano della base si dice *altezza*; i segmenti eguali di generatrici compresi fra il vertice e la base di un cono rotondo si dicono *apotemi* del cono.

3ª. Chiamasi *superficie laterale* del cono la parte di falda limitata dalla base, e *superficie totale* la superficie formata dalla base e dalla superficie laterale.

4ª. Chiamasi *tronco di cono* la parte di cono compresa fra il piano della base ed un piano segante, che incontra il primo secondo una retta esterna al cono, o è parallelo ad esso. Se il cono è rotondo e il piano segante è parallelo al piano della base, i due cerchi che limitano il tronco si dicono *basi,* e il tronco si dice a *basi parallele.*

5ª. Chiamasi *asse, altezza, apotemi, superficie laterale* di un tronco di cono a basi parallele, i segmenti dell'asse, dell'altezza, degli apotemi e la parte di superficie laterale del cono corrispondente, compresi fra i piani delle due basi del tronco.

**Corollari.** — *1°. Il luogo dei punti medii degli apotemi di un cono rotondo è un circolo situato in un piano parallelo alla base ed equidistante da essa e dal vertice.*

*2°. Il luogo dei punti medii degli apotemi di un tronco di cono rotondo a basi parallele è un circolo situato in un piano parallelo alle basi ed equidistante da esse.*

**Definizione 6ª.** — Chiamasi *sezione media* di un cono rotondo, o di un tronco di cono a basi parallele, la sezione fatta da un piano, che divide per metà tutti gli apotemi, e chiamasi *sezione principale* la sezione fatta da un piano, che passa per l'asse. Se la sezione principale di un cono rotondo è un triangolo equilatero, il cono si dice pure *equilatero.*

È chiaro che un cono rotondo può essere generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad un cateto; in questo caso l'ipotenusa ne è l'apotema, il cateto fisso l'altezza, e l'altro cateto il raggio della base. Analogamente un tronco di cono a basi parallele può essere generato da un trapezio rettangolo, che roti intorno al lato perpendicolare alle basi; allora l'altro lato ne è l'apotema e le due basi del trapezio sono i raggi delle basi del tronco.

**236.** Due semipiani (fig. 200) AVO, BVO, uscenti dall'asse VO di un cono rotondo, dividono il cono e la sua superficie laterale in due parti. Ognuna delle due parti di superficie è terminata dalle due generatrici AV, BV e dall'arco AB, ed ognuna delle parti del cono è limitata dai triangoli rettangoli AVO, BVO, dal settore circolare AOB e da una parte della superficie conica.

Analoga considerazione (fig. 201) si può fare relativamente al tronco di cono.

**Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *angolo conico* ciascuna delle due parti, in cui la superficie laterale di un cono rotondo è divisa da due sue generatrici (dette *lati*). Il vertice del cono dicesi anche *vertice dei due angoli conici.*

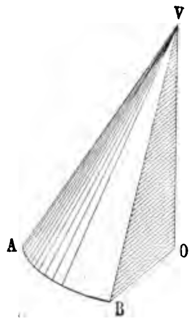



Fig. 200.

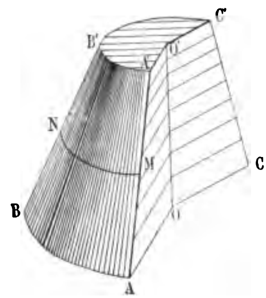



Fig. 201.

2ª. Dicesi *settore conico* ciascuna delle due parti, in cui un cono rotondo resta diviso da due semipiani, uscenti dall'asse. Le parti di questi semipiani interne al cono si dicono *facce* dei due settori.

3ª. Dicesi *trapezio conico* ciascuna delle due parti, in cui la superficie laterale di un tronco di cono rotondo a basi parallele è divisa da due dei suoi apotemi (detti *lati*). I due archi delle basi del tronco, che limitano il trapezio conico, si dicono *basi* del medesimo.

4ª. Dicesi *settore tronco-conico* ciascuna delle due parti, in cui un tronco di cono a basi parallele resta diviso da due semipiani, uscenti dall'asse. Le parti di questi semipiani interne al tronco di cono si dicono *facce* dei due settori tronco-conici.

È facile vedere come si possa estendere anche agli angoli (o settori) conici appartenenti ad un dato cono i concetti di angolo (o settore) convesso, concavo, o piatto, ed in generale tutte le proprietà che si sono dimostrate per gli angoli (o spicchi) sferici.

Per conseguenza riteniamo che gli angoli (o settori) conici di uno stesso cono, o di coni eguali, costituiscano infinite altre classi di grandezze geometriche omogenee.

5ª. Dicesi *sezione media* di un settore (o angolo) conico la sezione fatta da un piano che divide per metà tutti gli apotemi.

6ª. Una piramide (o settore piramidale) dicesi *inscritta*, o *circoscritta*, ad un cono (o settore conico) rotondo, se ha lo stesso vertice, ed ha per base un poligono (o settore poligonale) inscritto, o circoscritto, alla base del cono (o settore conico).

7ª. Un tronco di piramide dicesi *inscritto*, o *circoscritto*, ad un tronco di cono, quando ha per base due poligoni inscritti, o circoscritti, alle basi del tronco di cono.

È chiaro che, se una piramide è inscritta in un cono rotondo, gli spigoli laterali della piramide sono apotemi del cono; e se una piramide regolare è circoscritta ad un cono rotondo, gli apotemi della piramide sono quegli apotemi del cono, lungo i quali le facce laterali sono tangenti alla superficie conica.

Altrettanto si dica per un tronco di piramide regolare inscritto, o circoscritto, ad un tronco di cono rotondo a basi parallele.

**Corollari.** — *1°. Si può sempre inscrivere, o circoscrivere, una piramide (o settore piramidale) regolare ad un cono (o settore conico) rotondo,*

*quando nella base di esso è possibile inscrivere, o circoscrivere, il poligono (o settore poligonale) base della piramide (o del settore piramidale).*

2°. *Si può sempre inscrivere, o circoscrivere, in un tronco di cono a basi parallele un tronco di piramide regolare, quando nelle basi del tronco di cono è possibile inscrivere, o circoscrivere, i poligoni basi del tronco di piramide.*

## 2. — SUPERFICIE CILINDRICA E CILINDRO.

**237. Definizioni.** — 1ª. Se il piano di due rette parallele compie un giro, rotando intorno ad una di esse, l'altra retta descrive un superficie, che si chiama *superficie cilindrica rotonda, o di rotazione.*

2ª. La retta mobile, in tutte le sue posizioni, si chiama *generatrice*, e la sua distanza dall'asse di rotazione si dice *raggio della superficie cilindrica.*

**Teorema.** — *Una superficie cilindrica rotonda è il luogo dei punti, che hanno dall'asse una distanza eguale al raggio della medesima.*

Risulta evidente dalla definizione suesposta, che ogni punto di una superficie cilindrica rotonda ha dall'asse una distanza eguale al raggio della superficie medesima. Viceversa, se un punto P ha dall'asse di una superficie cilindrica rotonda una distanza eguale al raggio della superficie, quel punto deve appartenere alla superficie medesima, perchè quando il piano della generatrice e dell'asse sia venuto a passare per P, il punto P si deve trovare sulla generatrice.

Deriva inoltre da ciò che precede che una superficie cilindrica rotonda separa una parte dello spazio, i cui punti hanno dall'asse una distanza maggiore del raggio, da un'altra, i cui punti hanno dall'asse una distanza minore del raggio.

In seguito a ciò si può asserire che una superficie cilindrica rotonda è una superficie completa.

**Corollario.** — *Se si taglia una superficie cilindrica rotonda con un piano, che incontri tutte le generatrici, la sezione così ottenuta ha tutti i suoi punti compresi nella superficie medesima.*

**238. Teorema.** — *Le sezioni normali di una superficie cilindrica rotonda sono circoli eguali.*

Infatti essi hanno raggi eguali al raggio della superficie cilindrica.

**239. Teorema.** — *Un piano parallelo all'asse di una superficie cilindrica di rotazione:*

*1° ha tutti i suoi punti esterni ad essa, se ha dall'asse una distanza maggiore del raggio;*

*2° ha in comune con essa tutti e soli i punti di una generatrice, se la sua distanza dall'asse è eguale al raggio;*

*3° ha in comune con essa tutti i punti di due generatrici, se la sua distanza dall'asse è minore del raggio.*

Sia $\alpha$ un piano dato (fig. 202) parallelo all'asse di una superficie cilindrica. Condotto un piano $\pi$ normale alla superficie cilindrica, esso

la taglia secondo un circolo $c$, avente per centro il punto O d'incontro del piano $\pi$ coll'asse, e taglia il piano $\alpha$ secondo una retta $a$, avente dal centro O del circolo $c$ una distanza eguale alla distanza del piano $\alpha$ dall'asse, ed è perciò esterna, tangente o secante del circolo $c$, secondo che la suddetta distanza è maggiore, eguale o minore del raggio. Ora, se il piano $\alpha$ ha un punto comune colla superficie cilindrica, esso contiene anche tutta la generatrice parallela all'asse, che passa per quel punto (§ 40 Cor. 1°), e quindi il piano $\alpha$ ha nessuna, una o due generatrici comuni colla superficie cilindrica data, seconda che la retta $a$ ha nessuno, uno o due punti comuni col circolo $c$.

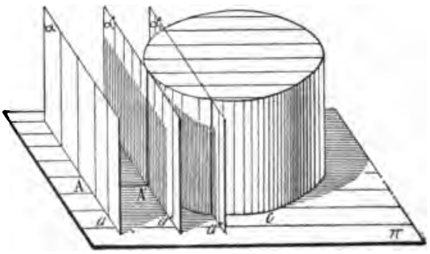


Fig. 202.

I teoremi inversi sono veri per la solita legge delle inverse esposta nei preliminari.

**Corollari**. — *1°. Una retta, non parallela ad una generatrice di una superficie cilindrica rotonda, può avere con la superficie nessuno, uno o due punti in comune.*

Infatti, condotto per la retta il piano parallelo all'asse, secondo che esso ha in comune colla superficie nessuna, una o due generatrici, la retta avrà in comune colla stessa superficie nessuno, uno o due punti.

**Definizioni.** — 1ª. Un piano si dice *tangente*, o *secante* di una superficie cilindrica rotonda, secondochè ha in comune colla medesima una generatrice, o punti di due o più generatrici.

La generatrice, comune ad una superficie cilindrica rotonda e ad un suo piano tangente, si chiama *generatrice di contatto.*

2ª. Una retta, non parallela a una generatrice di una superficie cilindrica rotonda, si dice *tangente*, o *secante* di essa, secondo che ha in comune colla medesima uno, o due punti.

*2°. Per un punto di una superficie cilindrica rotonda passa uno, ed un solo, piano tangente.*

Esso è individuato dalla generatrice, che passa per quel punto, e dalla tangente alla sezione normale della superficie cilindrica nel punto medesimo.

*3°. Per un punto, esterno ad una superficie cilindrica rotonda, e non compreso in essa, passano due piani tangenti alla medesima.*

Infatti, condotto il piano normale alla superficie, che passa per quel punto, si potranno condurre dal punto due sole tangenti al circolo sezione. Ciascuno dei piani individuati da una di quelle tangenti e dalla generatrice, che passa per il punto di contatto, è tangente alla superficie; e questi due sono i soli piani tangenti, che passano per il punto dato.

4°. *Per un punto di una superficie cilindrica rotonda passano infinite rette tangenti ad essa, il luogo delle quali è il piano tangente alla superficie in quel punto.*

**240. Teorema.** — *Le infinite rette tangenti ad una sfera, condotte per i punti di un suo circolo massimo e perpendicolari al piano del medesimo, sono le generatrici di una superficie cilindrica rotonda, che ha per asse la retta perpendicolare al piano di quel circolo, condotta per il centro di esso.*

Infatti, condotti i circoli massimi perpendicolari a quello dato, le tangenti ad essi nei punti d'intersezione con questo sono tutte parallele al diametro comune ad essi.

**Definizione.** — Una superficie cilindrica rotonda ed una sfera si dicono *tangenti*, quando hanno in comune tutti e soli i punti di un circolo massimo, il quale si chiama *circolo di contatto.*

**Corollario.** — *Per un circolo massimo di una sfera passa una, ed una sola, superficie cilindrica rotonda tangente alla sfera.*

**241.** Sappiamo che, se si conduce un piano che incontri tutte le generatrici di una superficie cilindrica rotonda, tutti i punti della sezione così ottenuta sono compresi nella superficie cilindrica, per conseguenza (P. IV, 1°) due piani secanti una superficie cilindrica rotonda, e che si tagliano secondo una retta esterna alla superficie medesima o sono paralleli, dividono la parte di spazio separata dalla superficie in tre parti.

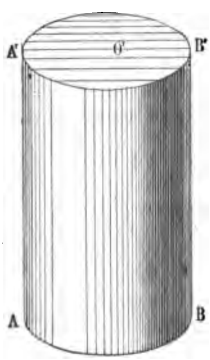


Fig. 203.

**Definizioni.** — 1ª. Il solido finito, limitato da una superficie cilindrica rotonda e da due piani paralleli che ne incontrano tutte le generatrici, si chiama *cilindro rotondo.* Esso si dice *obliquo,* se i piani secanti sono obliqui all'asse, *retto* se essi sono normali all'asse. Il cilindro rotondo e retto si dirà semplicemente *cilindro rotondo.*

2ª. Le superficie, limitate dalle sezioni suddette, si dicono *basi;* la loro distanza dicesi *altezza,* e i segmenti eguali di generatrici compresi fra le due basi si dicono *lati* del cilindro.

3ª. Chiamasi *superficie laterale* del cilindro la parte di superficie cilindrica limitata dalle due basi, e *superficie totale* la superficie formata dalle basi e dalla superficie laterale.

4ª. Chiamasi *tronco di cilindro* la parte di cilindro compresa tra il piano di una base ed un piano secante, che incontra il primo secondo una retta esterna al cilindro.

5ª. Chiamasi *sezione principale* di un cilindro rotondo la sezione fatta da un piano, che passa per l'asse. Se la sezione principale di un cilindro rotondo, è un quadrato, il cilindro si dice *equilatero.*

È chiaro che un cilindro rotondo può essere generato dalla rotazione di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati.

**242.** Due semipiani (fig. 204) OO'A, OO'B, uscenti dall'asse OO' di un cilindro rotondo, dividono il cilindro e la sua superficie laterale in due parti. Ognuna delle due parti di superficie è terminata dai due lati AA', BB' e dagli archi AB, A'B', ed ognuna delle parti del cilindro

è limitata dai rettangoli AOO'A', BOO'B' e dai settori circolari AOB, A'O'B' e da una parte della superficie cilindrica.

**Definizioni.** — 1ª. Chiamasi *striscia cilindrica,* ciascuna delle due parti, in cui la superficie laterale di un cilindro rotondo è divisa da due suoi lati (detti *lati* delle strisce).

2ª. Dicesi *settore cilindrico* ciascuna delle due parti, in cui un cilindro rotondo resta diviso da due semipiani, uscenti dall'asse. Le parti di questi semipiani interne al cilindro si dicono *facce* dei due settori.

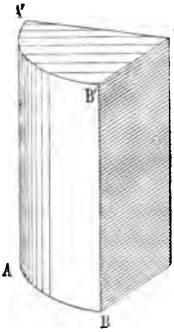


Fig. 204.

Si possono estendere anche alle strisce cilindriche e settori cilindrici, appartenenti ad uno stesso cilindro o a cilindri eguali, le definizioni e le proprietà relative agli angoli e spicchi sferici; per conseguenza riteniamo che le strisce cilindriche e i settori cilindrici di uno stesso cilindro, o di cilindri eguali, costituiscano infinite altre classi di grandezze geometriche omogenee.

3ª. Un prisma (o settore prismatico) dicesi *inscritto,* o *circoscritto,* a un cilindro (o settore cilindrico) rotondo, se le sue basi sono inscritte, o circoscritte, alle basi del cilindro (o settore cilindrico).

È chiaro che, se un prisma è inscritto in un cilindro rotondo, gli spigoli laterali del prisma sono lati del cilindro; e, se un prisma è circoscritto ad un cilindro rotondo, le facce laterali del prisma sono tangenti alla superficie laterale del cilindro.

**Corollario.** — *Si può sempre inscrivere, o circoscrivere, un prisma (o settore prismatico) regolare ad un cilindro (o settore cilindrico), quando nella base di esso è possibile inscrivere, o circoscrivere, il poligono (o settore poligonale) base del prisma (o settore prismatico).*

# ESERCIZI

## TEOREMI.

**312.** Se si divide una corda di circolo in tre parti eguali, i raggi, che passano per i punti di divisione, dividono l'arco sotteso in tre parti, delle quali le estreme sono eguali fra loro e minori della intermedia.

**313.** Se due corde eguali di un circolo si tagliano, i segmenti di una sono rispettivamente eguali ai segmenti dell'altra.

**314.** Per un punto A, esterno ad un cerchio di centro O, si conduca una secante ACD, la cui parte esterna AC sia eguale al raggio, e si conduca inoltre il diametro AOB. Dimostrare che l'angolo $\widehat{COA}$ è la terza parte dell'angolo $\widehat{DOB}$.

**315.** Sopra due lati AC, BC di un triangolo qualunque ABC si costruiscano i quadrati ACE, CBD. Dimostrare che le congiungenti AD, BE passano per uno stesso punto dell'altezza CF del triangolo.

**316.** Se due corde AB, CD di un circolo si tagliano, la somma AC + BD degli archi da esse compresi è eguale alla somma degli archi compresi dai due diametri paralleli a queste corde.

**317.** Essendo A, B, C tre punti qualunque di un circolo, D il punto medio dell'arco AB ed E il punto medio dell'arco AC, la retta DE incontra rispettivamente in F e in G le corde AB, AC. Dimostrare che AF $\equiv$ AG.

**318.** Essendo A un punto qualunque di un diametro di un circolo, B l'estremo del raggio perpendicolare ad esso, se si conduce BA, che incontra il circolo in P, poi la tangente nel punto P, che taglia il prolungamento del diametro nel punto C, si ha CA $\equiv$ CP.

**319.** Se A, B, C, A′, B′, C′ sono sei punti di un circolo, tali che le corde AB, AC siano rispettivamente parallele alle corde A′B′, A′C′, anche BC′ e CB′ sono parallele.

**320.** Due corde che s'incontrano sono eguali, se fanno angoli eguali col diametro che passa per la loro intersezione; e viceversa.

**321.** Se si conducono dalle estremità di un diametro le perpendicolari ad una secante di un circolo, le parti della secante, comprese fra le due perpendicolari ed il circolo, sono eguali.

**322.** Dato un angolo $\widehat{BAC}$, si faccia passare per A e per un punto fisso D della bisettrice un circolo che tagli i lati nei punti B, C. La somma AB + AC è costante qualunque sia il circolo considerato.

**323.** Se due circoli *c* e *c′* sono tangenti internamente nel punto A, e BC è una corda del circolo maggiore tangente in D al circolo minore, la semiretta AD è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$.

**324.** Se due circoli sono tangenti internamente, fra tutte le corde del circolo maggiore tangenti al minore la massima è quella che è parallela alla tangente comune ai due circoli.

**325.** Il segmento tangente ad un circolo, e compreso fra due tangenti parallele, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha il vertice nel centro del circolo.

**326.** I circoli che hanno per centri i tre vertici di un triangolo, e passano per i punti di contatto del circolo inscritto, sono tangenti due a due.

**327.** Facendo centro in un punto di un circolo $c$ si descriva un circolo $c'$, che tagli $c$ in due punti A, B, e per uno di questi punti B si tracci una retta che tagli $c$ in un punto M e $c'$ in un punto N. I segmenti AM, MN sono eguali.

**328.** Se due sfere sono tangenti in un punto A, e BB', CC', DD' sono tre secanti che passano per A, i piani BCD, B'C'D' sono paralleli.

**329.** Se due circoli (o due sfere) sono tangenti, le congiungenti gli estremi di due diametri paralleli passano per il punto di contatto.

**330.** Se due circoli (o due sfere) sono tangenti in un punto A, le rette (o piani) tangenti nei punti d'incontro con una secante condotta per A sono parallele.

**331.** Se due circoli (o due sfere) si tagliano, e si conducono i diametri AB, AB', che passano per un punto comune A, il segmento BB' passa per un altro punto d'intersezione, ed è eguale al doppio della distanza dei centri.

**332.** I tre circoli, che passano per due vertici di un triangolo e per il punto d'incontro delle altezze, sono eguali.

**333.** Se una corda di un circolo è divisa per metà da un'altra, e si prolunga la prima fino ad incontrare le tangenti al circolo condotte per gli estremi della seconda, i segmenti, esterni al cerchio e compresi fra il circolo e le due tangenti, sono eguali.

**334.** Se due circoli si tagliano in due punti A, B, e CC' è una secante mobile attorno al punto A; 1° l'angolo $\widehat{CBC'}$ è costante; 2° l'angolo delle tangenti in C e C' è pure costante.

**335.** Se due circoli (o due sfere) si tagliano, e per due punti comuni si conducono due rette parallele, i segmenti di esse compresi tra i due circoli (o tra le due sfere) sono eguali.

**336.** Se due circoli (o due sfere) si tagliano, e per i centri si conducono le perpendicolari ad una secante condotta per un punto comune, la distanza delle due perpendicolari è eguale alla semisomma o alla semidifferenza delle corde intercettate su quella secante dai due circoli (o sfere).

**337.** Se due circoli si tagliano, e BB', CC' sono due secanti condotte per uno dei punti comuni, l'angolo delle rette BC, B'C' è costante.

**338.** Due circoli sono tangenti internamente in un punto A. Se per il punto B, opposto ad A nel circolo esterno, si conduce una tangente all'altro circolo, che lo tocchi nel punto C e incontri il primo in un altro punto D, la semiretta AC è bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$.

**339.** Se un triangolo inscritto in un circolo varia comunque, restando costante un suo angolo, il lato opposto resta tangente ad un circolo concentrico al primo.

**340.** Tutti i circoli, che passano per due punti, tagliano due rette condotte per questi punti in coppie di punti tali che le loro congiungenti sono parallele.

**341.** Le bisettrici di tutti gli angoli eguali, i cui lati passano per due medesimi punti, passano tutte per uno stesso punto.

**342.** Il raggio del circolo exinscritto ad un triangolo rettangolo e tangente alla ipotenusa è eguale alla somma dei raggi degli altri due circoli exinscritti e del raggio del circolo inscritto.

**343.** Se un circolo tangente alle quattro rette di un quadrangolo è esterno ad esso, la differenza di due lati opposti del quadrangolo è eguale alla differenza degli altri due.

**344.** Se in un quadrangolo la differenza di due lati opposti è eguale alla differenza degli altri due, esiste un circolo tangente alle quattro rette del quadrangolo ed esterno ad esso.

**345.** Se un quadrilatero ha due angoli opposti retti, le proiezioni dei lati opposti sulla retta, che passa per i vertici degli angoli retti, sono eguali.

**346.** L'altezza di un triangolo regolare è il lato di un triangolo regolare inscritto nel circolo, che ha per diametro un lato del triangolo dato.

**347.** In ogni triangolo rettangolo, il diametro del circolo inscritto è eguale all'eccesso della somma dei due cateti sull'ipotenusa.

**348.** Se ABC è un triangolo inscritto nel circolo di centro O e D è il punto medio dell'arco compreso nell'angolo $\widehat{BAC}$, l'angolo $\widehat{ODA}$ è eguale alla semidifferenza degli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ del triangolo.

**349.** La bisettrice di un angolo interno di un triangolo incontra il circolo circoscritto al triangolo in un punto equidistante dagli altri due vertici del triangolo.

**350.** In ogni triangolo, la distanza di un lato dal centro del circolo circoscritto è la metà della distanza del vertice opposto dal punto di concorso delle altezze.

**351.** Il circolo che ha per diametro il segmento di tangente, comune a due circoli tangenti dati, e che ha per estremi i punti di contatto, passa per il punto di tangenza dei due circoli ed è tangente alla retta dei circoli medesimi.

**352.** Se un lato di un triangolo è diviso per metà da un diametro del circolo circoscritto, e da una estremità di questo diametro si conduce una perpendicolare sul lato maggiore, questa dividerà il lato stesso in due parti, una delle quali è eguale alla semisomma e l'altra alla semidifferenza degli altri due lati.

**353.** I raggi del circolo circoscritto ad un triangolo, che passano per i vertici di questo, sono rispettivamente perpendicolari ai lati del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze del primo.

**354.** I tre vertici di un triangolo e le sue tre altezze dividono il circolo circoscritto al triangolo in 6 archi, due a due eguali fra loro.

**355.** Il prolungamento di un'altezza di un triangolo incontra il circolo circoscritto in un punto, che è simmetrico del punto d'incontro delle tre altezze rispetto al lato, su cui cade l'altezza considerata.

**356.** I prolungamenti delle tre altezze di un triangolo incontrano il circolo circoscritto in tre punti, che sono i vertici di un triangolo, le cui bisettrici coincidono coll'altezze del triangolo dato.

**357.** La bisettrice di un angolo interno di un triangolo incontra il circolo circoscritto in un punto tale, che se si conduce da esso una corda parallela ad un lato dell'angolo, questa è eguale all'altro lato.

**358.** La bisettrice di un angolo interno di un triangolo è anche bisettrice dell'angolo compreso dall'altezza e dal raggio del circolo circoscritto, che terminano allo stesso vertice.

**359.** Se per il punto medio A di un arco BC di un circolo si tirano due corde qualunque AD, AE, che incontrano la corda BC nei punti F, G, il quadrangolo DFGE è inscrittibile in un circolo.

**360.** Le bisettrici degli angoli di un quadrangolo formano un quadrilatero inscrittibile in un circolo. Considerare ciò che diventa questo quadrangolo secondo i varii casi che si possono dare per il primo.

**361.** Se dalle estremità di ciascuno di due lati opposti di un quadrangolo inscritto in un circolo si conducono delle perpendicolari sul lato opposto, i quattro punti d'intersezione delle perpendicolari coi due lati sono vertici di un nuovo quadrangolo inscrittibile.

**362.** I punti d'incontro delle altezze dei quattro triangoli determinati dai vertici di un quadrangolo inscritto in un circolo, presi tre a tre, sono vertici di un nuovo quadrangolo eguale al dato.

**363.** Se le diagonali di un quadrangolo sono perpendicolari, i punti medii dei lati sono sopra un circolo.

**364.** Se un quadrangolo inscrittibile in un circolo ha le diagonali perpendicolari:

1° il quadrilatero, che ha per vertici le proiezioni del punto d'incontro delle diagonali sui lati del quadrangolo dato, è insieme inscrivibile e circoscrivibile;

2° il circolo, che passa per le quattro proiezioni suddette, passa anche per i punti medii dei lati del quadrangolo dato.

**365.** Se sopra i lati di un triangolo qualunque ABC si costruiscono esteriormente ad esso tre triangoli equilateri ABC′, BCA′, CAB′, i tre segmenti AA′, BB′, CC′ sono eguali, e s'incontrano in un punto O, dal quale i lati del triangolo dato sono visti sotto angoli eguali.

**366.** In ogni triangolo, i punti medii dei lati, i piedi dell'altezze e i punti medi dei segmenti dell'altezze, compresi tra il vertice e il loro punto d'incontro, giacciono sopra uno stesso circolo (detto circolo dei nove punti).

**367.** Il centro del circolo dei nove punti divide per metà il segmento che unisce il punto d'incontro dell'altezze col centro del circolo circoscritto.

**368.** Il raggio del circolo dei nove punti è la metà del raggio del circolo circoscritto.

**369.** Un triangolo dato e i tre triangoli che hanno per base uno dei lati del primo triangolo e per vertice il punto d'incontro delle altezze di questo stesso triangolo, hanno lo stesso circolo dei nove punti.

**370.** I sei punti medii dei segmenti, che si ottengono congiungendo due a due i centri dei circoli inscritto ed exinscritti ad un triangolo, sono situati sopra un circolo, che passa anche per i vertici del triangolo.

**371.** La somma dei raggi dei tre circoli exinscritti ad un triangolo è eguale al raggio del circolo inscritto, aumentato di quattro volte il raggio del circolo circoscritto.

**372.** Il centro del circolo inscritto, quello del circolo circoscritto e il punto d'incontro delle perpendicolari condotte dai centri dei circoli exinscritti sui lati di un triangolo sono in linea retta; e il centro del circolo circoscritto è equidistante dagli altri due punti.

**373.** Le perpendicolari, condotte dai centri dei circoli exinscritti sui lati di un triangolo, passano per uno stesso punto.

**374.** Dati tre circoli in un piano, se per un punto del piano passano tre tangenti interne comuni ai circoli presi due a due, le altre tre tangenti comuni passano pure per un medesimo punto.

**375.** Le proiezioni di un vertice di un triangolo sulle bisettrici degli angoli interni ed esterni, che hanno i vertici negli altri due vertici del triangolo, sono in linea retta.

**376.** Se una figura piana si sposta in un modo qualunque nel suo piano, essa può essere condotta da una posizione F ad una posizione F′ mediante una rotazione attorno ad un punto conveniente del piano.

**377.** Se due poligoni di $2n$ lati inscritti in uno o in due circoli, hanno $2n - 1$ coppie di lati rispettivamente paralleli, anche i rimanenti lati sono paralleli.

**378.** Quando un poligono di $2n + 1$ lati è costantemente inscritto in un circolo, e $2n$ lati si muovono restando paralleli a sè stessi, l'altro lato rimane di grandezza costante.

**379.** Se un parallelogrammo si sposta in un piano, in modo che due lati consecutivi passino per due punti fissi, anche la diagonale concorrente con quei due lati passa per un punto fisso.

**380.** Il circolo che ha il centro nel punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo ed ha per diametro la somma dei cateti, è tangente ai due circoli, che hanno per diametri i cateti.

**381.** Se un circolo ha per diametro il raggio di un altro, tutte le corde del circolo di raggio maggiore, condotte per il punto comune ai due circoli, sono divise per metà dall'altro circolo.

**382.** Se per i vertici di un triangolo si fanno passare tre circoli, che si taglino due a due sui lati del medesimo, le tre circonferenze passano per un punto.

**383.** Date in un piano quattro rette, si possono formare con esse quattro triangoli. I circoli ad essi circoscritti passano per un punto. I centri di questi circoli e il loro punto comune sono sopra uno stesso circolo.

**384.** Dati cinque piani tali che quattro di essi non abbiano un punto comune si possono con essi formare cinque tetraedri. Le sfere circoscritte a questi tetraedri passano a quattro a quattro per cinque punti situati rispettivamente sui cinque piani dati, e ognuna di esse è circoscritta a uno dei tetraedri, che si possono formare con questi cinque punti.

**385.** Con quattro rette si possono formare quattro triangoli. I centri dei quattro circoli inscritti in essi sono sopra una stessa circonferenza.

**386.** Sui lati di un quadrangolo inscritto, presi come diametri, si descrivano quattro circoli. Ognuno di questi taglia il successivo in un punto fuori di un vertice, e i quattro punti così ottenuti sono sopra un circolo.

**387.** Le diagonali di un pentagono regolare sono le rette di un altro pentagono regolare.

**388.** Se i vertici di un esagono regolare inscritto in un circolo sono vertici di due triangoli regolari, ciascun lato di un triangolo è diviso dai lati dell'altro in tre parti eguali.

**389.** In ogni poligono inscritto di un numero pari di lati la somma degli angoli di posto pari è eguale alla somma di quelli di posto dispari.

**390.** Se A, B, C, D, E sono i vertici successivi di un pentagono regolare, ed M è un punto dell'arco AB del circolo circoscritto, si ha

$$MA + MB + MD \equiv MC + ME.$$

**391.** Se ABC è un triangolo equilatero, D, E, F i punti medi dei lati AC, BC, AB, la congiungente DF risulta tangente al circolo, che passa per i punti C, D, E.

**392.** Se un raggio di un circolo è diametro di un altro circolo, e dal centro del primo si tirano due raggi, che taglino il secondo, la corda dell'arco del circolo di raggio minore, compreso tra questi due raggi, è eguale al segmento di perpendicolare condotta dall'estremo di uno dei due raggi sull'altro.

**393.** Se due circoli sono tangenti, e si tirano due secanti per il loro punto di contatto, le corde degli archi compresi fra le due secanti sono parallele.

**394.** I quattro centri dei circoli, ciascuno dei quali è tangente ad un lato di uno stesso quadrangolo e ai prolungamenti dei due lati consecutivi, sono vertici di un quadrangolo inscrittibile in un circolo.

**395.** Se quattro circoli sono tali che ciascuno passi per due vertici successivi di un quadrangolo inscritto in un circolo, gli altri quattro punti, nei quali ciascun circolo incontra il seguente, sono vertici di un quadrangolo inscrittibile in un circolo.

**396.** In ogni quadrilatero inscrittibile in un circolo, le bisettrici degli angoli formati dalle coppie di lati opposti sono parallele alle bisettrici degli angoli formati dalle diagonali.

**397.** Dato un quadrilatero inscritto in un cerchio, ogni coppia di lati opposti è tagliata da una delle bisettrici degli angoli formati dagli altri due lati. Si hanno così 4 punti che sono vertici di una losanga inscritta nel quadrilatero.

**398.** I cinque circoli circoscritti ai triangoli formati da ciascun lato di un pentagono coi prolungamenti dei due lati consecutivi s'incontrano in cinque altri punti, oltre i vertici, che giacciono sopra uno stesso circolo.

**399.** I circoli aventi per diametri tre corde di un circolo, condotte per uno stesso suo punto, s'incontrano in altri tre punti situati in linea retta.

**400.** Due diagonali di un pentagono regolare, non uscenti dallo stesso vertice, si dividono a vicenda in due segmenti, il maggiore dei quali è eguale al lato del pentagono.

**401.** In ogni triangolo la somma dei raggi dei circoli inscritto e circoscritto è eguale alla somma delle distanze del centro del circolo circoscritto dai lati.

**402.** Se si unisce un punto qualunque del circolo circoscritto ad un triangolo coi tre vertici, si ottengono tre segmenti, uno dei quali è eguale alla somma degli altri due.

**403.** In ogni triangolo la perpendicolare a un lato sul suo punto medio incontra la bisettrice dell'angolo opposto e la bisettrice dell'angolo esterno opposto in punti appartenenti al circolo circoscritto al triangolo.

**404.** Un esaedro è inscrittibile in una sfera quando le sue facce sono quadrilateri inscrittibili.

**405.** Se gli spigoli opposti di un ottaedro inscritto in una sfera giacciono in un medesimo piano, le tre diagonali dell'ottaedro si tagliano in un punto, e i piani tangenti alla sfera nei vertici dell'ottaedro formano un esaedro circoscritto, le cui facce, prese quattro a quattro, passano per uno stesso punto.

**406.** I punti medii degli spigoli di un tetraedro regolare sono vertici di un ottaedro regolare.

**407.** I punti medii degli spigoli di un tetraedro qualunque sono vertici di un ottaedro, i cui spigoli opposti sono eguali e paralleli.

**408.** I centri delle facce di un esaedro regolare sono vertici di un ottaedro regolare.

**409.** I punti medii di sei spigoli consecutivi di un cubo, tali che tre non sieno in una faccia, sono vertici di un esagono regolare.

**410.** Se per il punto di mezzo della congiungente i centri di due sfere inscritte in un tetraedro si conducono le perpendicolari alle facce del tetraedro, i loro piedi sono in un piano.

**411.** Se su ciascuno spigolo di un tetraedro si prende un punto, e per ciascun vertice e per i tre punti, che giacciono sugli spigoli del triedro corrispondente, si fa passare una sfera, si ottengono quattro sfere, che s'intersecano in un punto.

**412.** Se le quattro diagonali di un esaedro si tagliano in un punto, le tre rette, che congiungono due a due i punti di concorso delle diagonali delle facce opposte, si tagliano nello stesso punto.

**413.** Due superficie coniche di rotazione, aventi l'asse in comune e i vertici distinti, si tagliano secondo uno o due circoli.

**414.** Per due circoli qualunque di una superficie cilindrica rotonda di rotazione passa anche una superficie conica rotonda e una superficie sferica.

**415.** Per due circoli qualunque di una superficie conica rotonda passa anche un'altra superficie conica o cilindrica rotonda ed una superficie sferica.

**416.** Per due circoli di una superficie sferica passano due superficie coniche, oppure una superficie conica ed una cilindrica rotonda, solamente nel caso che i due circoli sieno in piani paralleli.

**417.** A quale condizione si può inscrivere un cilindro in un prisma quadrangolare?

**418.** A quale condizione si può circoscrivere un cilindro rotondo ad un prisma quadrangolare?

## LUOGHI GEOMETRICI.

**419.** Trovare il luogo del punto medio del segmento, che unisce i punti medii di due lati AB, AC di un triangolo ABC, i cui vertici B e C sono fissi, e l'angolo $\widehat{A}$ è costante.

**420.** Trovare il luogo dei centri dei circoli inscritti nei triangoli, aventi un lato comune ed eguale l'angolo opposto a questo lato.

**421.** I vertici A, B di un triangolo ABC scorrono lungo due rette fisse OX, OY, l'angolo delle quali è supplementare dell'angolo $\widehat{C}$ del triangolo. Trovare il luogo del terzo vertice.

**422.** Da un punto qualunque di un dato circolo si conduca la perpendicolare a un diametro fisso e il raggio, sul quale si prenda, a partire dal centro, un segmento eguale alla perpendicolare. Trovare il luogo dell'estremo di questo segmento.

**423.** Le cose restando come nell'esercizio precedente, si prenda sul raggio, a partire dal centro, un segmento eguale alla distanza del centro dalla perpendicolare, e si determini il luogo dell'estremo di questo segmento.

**424.** Qual'è il luogo del vertice C dei triangoli sferici, che hanno un lato AB in comune, e la somma degli altri due lati è un semicircolo massimo?

**425.** Trovare il luogo percorso dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo dato, quando gli estremi della ipotenusa scorrono lungo due rette perpendicolari.

**426.** Il vertice C dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si muove sul circolo circoscritto al triangolo e l'ipotenusa AB rimane fissa; prendendo sul prolungamento del cateto BC un segmento CE $\equiv$ BC, ed unendo D col centro O del circolo, si domanda il luogo del punto d'incontro di OD con AC.

**427.** Essendo AB un diametro fisso di un cerchio dato e CD una corda parallela a questo diametro, se si conducono CB e DA, che si tagliano in M, poi CA e CB, che s'incontrano in N, trovare il luogo dei punti M ed N, quando la corda CD si sposta parallelamente a sè stessa.

**428.** Qual'è il luogo dei centri delle circonferenze dello stesso raggio, che dividono una circonferenza data in due parti eguali?

**429.** Qual'è il luogo dei punti medii delle corde di un circolo, che passano per uno stesso punto, oppure i cui prolungamenti passano per uno stesso punto?

**430.** Se in un circolo, da un estremo A di un diametro fisso, si tira una corda AC, e sul prolungamento di essa si prende un segmento CM eguale alla distanza CB, trovare il luogo dei punti M.

**431.** Dato un triangolo equilatero, qual'è il luogo dei punti, tali che la somma delle distanze da due vertici del triangolo sia eguale alla distanza dal terzo vertice?

**432.** Il luogo dei punti di contatto di un piano con le sfere ad esso tangenti, che passano per un punto, è un circolo o una retta.

**433.** Trovare il luogo dei punti di un piano tali che le due tangenti condotte da essi ad un circolo formino un angolo eguale ad un angolo dato.

**434.** Trovare il luogo delle proiezioni di un punto sulle rette di un piano (o dello spazio) uscenti da un altro punto.

**435.** Il luogo dei punti di contatto di una sfera con le sfere ad essa tangenti, che passano per due punti dati, è un circolo.

**436.** Trovare il luogo dei punti equidistanti da tre piani comunque situati nello spazio.

**437.** Trovare il luogo del punto d'incontro delle altezze dei triangoli, che hanno un lato comune ed hanno eguali gli angoli opposti a questo lato.

**438.** Trovare il luogo dei punti, tali che, se si abbassano da ciascuno di essi le perpendicolari sui tre lati di un triangolo dato, i piedi di queste perpendicolari sieno in linea retta.

**439.** Trovare il luogo dei centri dei circoli, che hanno un dato raggio, e tagliano sotto un angolo dato un circolo dato.

**440.** Trovare il luogo dei centri dei circoli, che hanno un dato raggio, e tagliano un circolo dato, in modo che la corda comune sia eguale ad un segmento dato.

**441.** Da un punto qualunque dei prolungamenti di un diametro di un circolo si conduca una tangente e la bisettrice dell'angolo così formato. Trovare il luogo del punto, in cui la bisettrice è incontrata dalla perpendicolare condotta ad essa dal centro.

**442.** Trovare il luogo dei punti d'incontro dei circoli circoscritti ai triangoli formati dalle rette di un triangolo con un'altra retta qualunque del piano.

**443.** Due rette $a$ e $b$ si tagliano, ed un segmento AB ha gli estremi sopra le due rette. Sia M il punto d'incontro delle perpendicolari alle rette $a$ e $b$ condotte rispettivamente dai punti A, B, e sia N il punto d'incontro delle perpendicolari alle rette $b$ ed $a$ condotte dagli stessi punti; trovare il luogo dei punti M ed N.

**444.** Per un punto A si conduce una retta, che taglia un circolo dato in due punti B, D; qual'è il luogo del punto d'incontro M dei circoli tangenti al circolo dato, che passano rispettivamente per le coppie di punti A, B; A, D?

**445.** Qual'è il luogo del punto medio dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, quando il triangolo rota attorno al vertice dell'angolo retto, e gli altri due vertici descrivono due circoli dati?

**446.** Trovare il luogo dei punti, tali che le tangenti condotte da essi ad un circolo dato sieno eguali ad un dato segmento.

**447.** Dati due circoli concentrici, trovare il luogo del vertice di un angolo retto, i cui lati sono tangenti rispettivamente ai due circoli dati.

**448.** Un angolo è inscritto in un circolo; trovare il luogo del punto medio della corda che sottende l'arco, su cui insiste l'angolo dato, quando esso si sposta, in modo che il vertice percorra la circonferenza.

**449.** Se un circolo gira intorno ad uno dei suoi punti, e in ogni posizione si conducono le tangenti parallele ad una retta, trovare il luogo dei punti di contatto.

**450.** Trovare il luogo descritto dal baricentro di un triangolo rettangolo, che si muove in modo che l'ipotenusa abbia gli estremi sopra due rette perpendicolari.

**451.** Dato un circolo di centro O ed un punto A compreso in esso si conduca una secante BAC, e per le coppie di punti A, B; A, C si facciano passare due circoli tangenti al primo; trovare il luogo del loro punto d'incontro M.

**452.** Sui lati di un angolo $\widehat{BAC}$ sono dati due punti B, C a disuguali distanze dal vertice A; si descrivono due circoli tangenti fra loro, di cui uno è tangente ad AB nel punto B e l'altro è tangente ad AC nel punto C. Trovare il luogo del punto di contatto dei due circoli.

**453.** Sopra due rette perpendicolari, a partire dal loro punto d'incontro, si prendano due segmenti OA, OB, la cui somma sia eguale ad un segmento dato; trovare il luogo dei punti, in cui il circolo circoscritto al triangolo AOB è incontrato dalla retta OM, condotta per il vertice O parallelamente alla retta AB.

**454.** Trovare il luogo del punto di incontro delle diagonali dei parallelogrammi aventi i vertici sui lati di un quadrilatero gobbo.

**455.** Qual'è il luogo dei baricentri delle sezioni triangolari di un tetraedro?

**456.** Qual'è il luogo dei centri dei parallelogrammi sezioni di un tetraedro con un piano?

**457.** Qual'è il luogo dei punti che hanno date distanze da due parallele date?

**458.** Qual'è il luogo dei centri dei circoli sopra una sfera, i cui piani passano per un medesimo punto?

**459.** Qual'è il luogo dei centri dei circoli sopra una sfera, i cui piani passano per una medesima retta?

**460.** Qual'è il luogo dei punti, che hanno date distanze da un punto e da un piano dati?

**461.** Qual'è il luogo delle rette che passano per un punto e fanno con un piano un angolo dato?

**462.** Qual'è il luogo delle rette che passano per un punto e sono perpendicolari ai piani tangenti di una superficie conica rotonda?

**463.** Qual'è il luogo dei punti che hanno distanze date da due punti dati?

## PROBLEMI.

**464.** Descrivere un circolo tangente a due rette date e che passa per un punto di una di esse.

**465.** Descrivere un circolo di dato raggio che passi per un punto dato, e sia tangente ad una retta data.

**466.** Descrivere un circolo di dato raggio tangente a due rette date.

**467.** Costruire una sfera di dato raggio tangente a un piano dato e che passi per due punti dati.

**468.** Descrivere un circolo che passi per due punti dati, e sia tangente a una retta data.

**469.** Descrivere una sfera, che passi per tre punti dati, e sia tangente ad un piano dato.

**470.** Descrivere un circolo, che passi per un punto dato, e sia tangente a due rette date.

**471.** Descrivere una sfera, che passi per due punti dati, e sia tangente a due piani dati.

**472.** Dati due circoli in un piano, trovare un punto del medesimo piano tale, che gli angoli formati dalle coppie di tangenti, da esso condotte ai due circoli, sieno eguali a due angoli dati.

**473.** Descrivere una sfera, che passi per un punto dato, e sia tangente a tre piani dati.

**474.** Descrivere un circolo che passi per due punti dati, e sia tangente a un circolo dato.

**475.** Descrivere una sfera, che passi per tre punti dati e sia tangente a una sfera data.

**476.** Descrivere un circolo di dato raggio, che divida in due parti eguali due altri circoli dati in un piano.

**477.** Descrivere una sfera di dato raggio, che divida in due parti eguali tre superficie sferiche date.

**478.** Descrivere un circolo tangente ad un circolo dato e ad una retta in un suo punto dato.

**479.** Costruire una sfera di dato raggio tangente a una sfera data, e che passi per due punti dati.

**480.** Descrivere un circolo tangente ad una retta data e ad un circolo in un suo punto dato.

**481.** Descrivere un circolo, che passi per un punto dato, e sia tangente ad un circolo dato in un suo punto.

**482.** Descrivere un circolo tangente a due circoli dati, e che passi per un punto dato di uno di essi.

**483.** Costruire una sfera di dato raggio tangente a una sfera e ad un piano dato, e che passi per un punto dato.

**484.** Condurre una tangente ad un circolo, che faccia un angolo dato con una retta data.

**485.** Descrivere una sfera di dato raggio, che passi per un punto dato, e sia tangente a due piani dati.

**486.** Descrivere un circolo tangente a due rette parallele, che passi per un punto dato della striscia.

**487.** Descrivere un circolo che passi per due punti dati ed abbia il centro su di un circolo dato.

**488.** Descrivere un circolo tangente a tre circoli eguali dati e tangenti fra loro.

**489.** Descrivere un circolo che sia equidistante da quattro punti dati.

**490.** Descrivere un circolo che abbia un dato raggio, o passi per un punto dato, e sia equidistante da tre punti dati.

**491.** Descrivere un circolo di dato raggio, che determini sopra due rette date corde eguali a due segmenti dati.

**492.** Descrivere un circolo tangente ad una retta, o ad una circonferenza, data e che determini su due rette parallele date corde eguali a segmenti dati.

**493.** Descrivere un circolo, che passi per due punti dati, e che tagli un circolo dato in modo che la corda comune sia parallela ad una retta data.

**494.** Descrivere un circolo, che passi per un vertice e sia tangente a due lati di un quadrato dato.

**495.** Dati in un piano un circolo ed una retta, condurre una tangente al circolo in modo che il segmento di essa, che ha per estremi il punto di contatto ed un punto della retta, sia eguale ad un segmento dato.

**496.** Descrivere un circolo tangente a due rette date, e che abbia il centro su di una linea data.

**497.** Per un punto comune a due circoli dati in un piano condurre una secante, in modo che il segmento, che ha per estremi gli altri due punti ove essa incontra i due circoli, rimanga diviso per metà in quel punto.

**498.** Descrivere una sfera di dato raggio che passi per un punto dato, e sia tangente a due sfere date.

**499.** Descrivere una sfera di dato raggio tangente a tre piani dati.

**500.** Descrivere una sfera di dato raggio tangente a tre sfere date.

**501.** Descrivere una sfera di dato raggio tangente a due piani e ad una sfera data.

**502.** Descrivere con raggi dati due circoli tangenti fra loro e tangenti ad una retta data.

**503.** Per un punto comune a due circoli dati in un piano condurre una secante, in modo che la somma, o la differenza, dei segmenti che terminano al punto dato e agli altri due punti, ove la retta incontra i due circoli, sia eguale ad un segmento dato.

**504.** Descrivere una sfera di dato raggio tangente ad un piano e a due sfere date.

**505.** In un circolo dato inscrivere un angolo eguale ad un angolo dato, e i cui lati passino per due punti dati.

**506.** Data una sfera, un piano ed un segmento, costruire la sfera, che abbia per raggio il segmento dato, ed abbia colla sfera data per piano radicale il piano dato.

**507.** In un circolo dato inscrivere un angolo eguale ed un angolo dato, un lato del quale passi per un punto dato, mentre l'altro lato è parallelo, o fa un angolo dato con una retta data.

**508.** Inscrivere un trapezio in un circolo, data l'altezza e la somma, o la differenza, delle basi.

**509.** Da un punto dato nel piano di un circolo condurre una secante al circolo, in modo che la somma, o la differenza, dei segmenti, che terminano a quel punto e ai punti, ove la secante incontra il circolo, sia eguale ad un segmento dato.

**510.** Sopra un arco di circolo trovare un punto, tale che la somma, o la differenza, delle sue distanze dagli estremi dell'arco sia eguale ad un segmento dato.

**511.** Condurre una corda in un circolo, che sia eguale ad un segmento dato, e resti divisa per metà da una retta, o circonferenza, data.

**512.** Condurre una corda in un circolo, che sia eguale ad un segmento dato, e sia parallela ad una retta data, o faccia con essa un angolo dato.

**513.** Inscrivere in un circolo un trapezio, dati due vertici e la somma, o la differenza, delle basi.

**514.** Date in un piano due circonferenze esterne l'una all'altra ed una retta, condurre una secante comune parallela alla retta data, ed in modo che la somma delle corde intercette sia eguale ad un segmento dato.

**515.** Dato un punto sopra un circolo ed una corda, condurre dal punto un'altra corda che sia divisa dalla prima per metà.

**516.** Per un punto dato condurre una retta, in modo che nel triangolo formato da essa con altre due rette date, l'eccesso della somma di due lati sul terzo sia eguale ad un segmento dato.

**517.** Dati due punti A e B sopra un circolo e un diametro fisso EF, trovare sul circolo un punto C, tale che le corde CA, CB determinino sul diametro un segmento MN eguale ad un segmento dato.

**518.** Da un punto dato esterno ad un cerchio condurre una secante, in modo che la parte esterna sia eguale alla parte interna al cerchio.

**519.** Dati due punti A, B sopra un circolo e un diametro fisso EF, trovare sul circolo un punto C, tale che le corde CA, CB determinino sul diametro dato, a partire dal centro O, due segmenti OM, ON eguali.

**520.** Per un punto dato condurre una secante ad un circolo, in modo che la somma delle distanze dei punti d'intersezione da una retta data sia eguale ad un dato segmento.

**521.** Dati due circoli in un piano, condurre una secante comune, in modo che la corda intercetta nel primo circolo sia eguale ad un segmento dato, e che la corda intercetta nel secondo sia pure eguale ad un altro segmento dato.

**522.** Date due rette parallele ed un punto interno alla striscia, descrivere un circolo che passi per quel punto, sia tangente ad una delle rette, e determini sull'altra un segmento eguale ad un segmento dato.

**523.** Dati un angolo e due segmenti $a$ ed $a'$, determinare sopra uno dei lati dell'angolo un punto tale che la circonferenza, descritta da questo punto, come centro, e con raggio $a$, intercetti sull'altro lato dell'angolo un segmento eguale ad $a'$.

**524.** Per un punto dato condurre una secante ad un circolo, in modo che la corda intercettata sia eguale ad un segmento dato.

**525.** Dato un punto nel piano di un circolo, descrivere un nuovo circolo col centro in quel punto, in modo che il segmento di tangente esterna comune sia eguale ad un segmento dato.

**526.** Tagliare i tre lati di un triangolo con una secante LMN in modo che sia $LM \equiv MN \equiv a$.

**527.** In un dato triangolo inscrivere un nuovo triangolo eguale ad un triangolo dato.

**528.** Costruire un triangolo, dato un lato, l'altezza e la mediana corrispondenti.

**529.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato e un'altezza.

**530.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato e il raggio di uno dei quattro circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

**531.** Costruire un triangolo dati due angoli e il raggio di un circolo tangente alle tre rette del triangolo.

**532.** Costruire un triangolo dato un lato, la somma o la differenza degli altri due e il raggio di un circolo tangente alle tre rette del triangolo.

**533.** Costruire un triangolo, dato un angolo, la bisettrice corrispondente ed un'altezza.

**534.** Costruire un triangolo, conoscendo i punti medii di due lati e l'estremo di un'altezza.

**535.** Costruire un triangolo, dato un angolo, l'altezza corrispondente e il raggio del circolo inscritto.

**536.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza ed il perimetro.

**537.** Costruire un triangolo, dato un angolo e i raggi di due circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

**538.** Costruire un triangolo, dato il perimetro e i raggi di due circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

**539.** Costruire un triangolo, dato il perimetro, la bisettrice di un angolo ed il raggio del circolo exinscritto compreso in quell'angolo.

**540.** Costruire un triangolo, dato un lato, un'altezza e il raggio del circolo circoscritto.

**541.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza e il raggio del circolo circoscritto.

**542.** Costruire un triangolo, dato il perimetro, un angolo e il raggio del circolo circoscritto.

**543.** Costruire un triangolo, dati due angoli e il raggio del circolo circoscritto.

**544.** Costruire un triangolo, dati due lati e il raggio del circolo circoscritto.

**545.** Costruire un triangolo, dato un angolo, una mediana e il raggio del circolo circoscritto.

**546.** Costruire un triangolo, dato un lato, una mediana e il raggio del circolo circoscritto.

**547.** Costruire un triangolo, dato il perimetro, un lato e il raggio del circolo circoscritto.

**548.** Costruire un triangolo, dato un angolo, il lato opposto e l'altezza corrispondente a questo lato.

**549.** Costruire un triangolo, dato un lato, la somma o la differenza degli altri due e il raggio del circolo circoscritto.

**550.** Costruire un triangolo, data l'altezza e la bisettrice uscenti dallo stesso vertice e il raggio del circolo circoscritto.

**551.** Costruire un triangolo, dati due lati ed un'altezza.

**552.** Costruire un triangolo, dato un lato e due altezze.

**553.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un lato ed una mediana.

**554.** Costruire un triangolo, dato un angolo e due mediane.

**555.** Costruire un triangolo, data la mediana e la bisettrice uscenti dallo stesso vertice e il raggio del circolo circoscritto.

**556.** Costruire un triangolo, dati i centri di tre circoli tangenti alle tre rette del triangolo.

**557.** Costruire un triangolo, dati due angoli ed una bisettrice.

**558.** Costruire un triangolo, data l'altezza, la mediana e la bisettrice uscenti dallo stesso vertice.

**559.** Costruire un triangolo, dato un lato, un angolo adiacente e la bisettrice di quest'angolo.

**560.** Costruire un triangolo, dato un angolo, la bisettrice corrispondente e il raggio del circolo inscritto.

**561.** Costruire un triangolo, dato l'eccesso della somma di due lati sul terzo, la bisettrice che incontra questo lato e il raggio del circolo inscritto.

**562.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza e l'eccesso della somma di due lati sul terzo.

**563.** Costruire un triangolo equilatero, avente i vertici sopra tre rette parallele.

**564.** Costruire un triangolo, data un'altezza, il raggio del circolo inscritto e l'eccesso della somma di due lati sul terzo.

**565.** Costruire un triangolo, dato un angolo, un'altezza e il raggio del circolo inscritto.

**566.** Costruire un triangolo, data un'altezza, il perimetro e il raggio di un circolo exinscritto.

**567.** Costruire un triangolo, dati due angoli e due circoli concentrici, sui quali devono stare i vertici.

**568.** Costruire un parallelogrammo, date le diagonali e l'angolo da esse formato

**569.** Costruire un rettangolo, date le diagonali ed un lato.

**570.** Costruire un quadrato, data una diagonale.

**571.** Costruire un quadrangolo, dati i lati e la congiungente i punti medii delle diagonali.

**572.** In un circolo dato inscrivere un rettangolo di dato perimetro.

**573.** Condurre una secante a due circoli concentrici, in modo che la parte compresa nel circolo di raggio maggiore sia doppia di quella compresa nel circolo di raggio minore.

**574.** Dati tre punti A, B, C ed una retta, che passi per A, descrivere un circolo, che passi per A e per B, e che tagli la retta data in un punto D, in modo che DC sia tangente al circolo.

**575.** Determinare sui prolungamenti di un diametro di un circolo un punto tale, che il segmento di tangente condotta da quel punto al circolo, compreso fra quel punto e il punto di contatto sia eguale al diametro.

**576.** Sui prolungamenti di un diametro di un circolo trovare un punto tale. che tirando da esso le due tangenti al circolo, questo rimanga diviso dai punti di contatto in due archi uno doppio dell'altro.

**577.** In un piano sopra una retta data determinare un punto tale, che le tangenti condotte da esso a due circoli del piano formino angoli eguali colla retta data.

**578.** Costruire un triangolo eguale ad un triangolo dato, i cui lati passino per tre punti dati.

**579.** Per un punto condurre una retta, in modo che il triangolo formato da essa con due altre rette date abbia il perimetro eguale ad un segmento dato.

**580.** Condurre una retta parallela ad una retta data, in modo che il segmento limitato da due dati circoli sia eguale ad un segmento dato.

**581.** Ad un triedro dato inscrivere e circoscrivere una superficie conica di rotazione.

**582.** Costruire un cilindro tangente a tre piani paralleli ad una retta data e che si tagliano due a due.

**583.** Dati due circoli in un piano (o due sfere), quali sono i loro punti più vicini e quali i più lontani?

**584.** Di tutte le corde di un circolo, che passano per un punto, qual'è la massima e quale la minima?

**585.** Tagliare un cubo con un piano, in modo che la sezione sia un esagono regolare.

**586.** Dato un esagono regolare, costruire un cubo, di cui l'esagono sia una sezione.

**587.** Da un vertice di un cubo si conducano le diagonali delle facce, e su ciascuna di esse si determini un punto, in modo che questi formino col vertice opposto un tetraedro regolare.

**588.** In un cono rotondo costruire un cubo, in modo che quattro vertici siano sulla superficie conica e quattro sulla base.

**589.** Si tagli con un piano un tetraedro, in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente i lati eguali a segmenti dati.

**590.** Si tagli con un piano un tetraedro, in modo che la sezione sia un parallelogrammo avente una diagonale eguale ad un segmento dato.

**591.** Si tagli con un piano una piramide quadrangolare convessa, in modo che la sezione sia un parallelogrammo.

**592.** Costruire una superficie sferica, che passi per tre punti, e tagli ortogonalmente una superficie sferica data.

**593.** Costruire una superficie sferica, che passi per due punti e tagli ortogonalmente due superficie sferiche date.

**594.** Costruire una superficie sferica che passi per un punto, e tagli ortogonalmente tre superficie sferiche date.

**595.** In un piano costruire un circolo, che passi per due punti dati, e tagli ortogonalmente un circolo dato.

**596.** In un piano costruire un circolo, che passi per un punto, e tagli ortogonalmente due circoli dati.

**597.** Trovare i piani che hanno date distanze da due rette parallele date.

**598.** Trovare le rette, che passano per un punto, ed hanno date distanze da due rette non parallele.

**599.** Per un punto interno ad una superficie cilindrica rotonda condurre il piano parallelo all'asse, che tagli la superficie secondo la striscia minima.

**600.** Per un punto dato condurre un piano che tagli una superficie cilindrica rotonda secondo due rette parallele aventi una data distanza fra loro.

**601.** Per un punto condurre un piano, che tagli una superficie conica rotonda secondo due rette, che formano un angolo dato.

**602.** Supposto che due superficie coniche rotonde, aventi il vertice in comune, si taglino secondo due rette, trovare con costruzioni piane l'angolo di queste rette, conoscendo l'angolo degli assi delle due superficie e i due angoli delle due superficie stesse.

**603.** Trovare con costruzioni piane l'angolo delle due rette d'intersezione di una superficie conica rotonda con un piano secante condotto per il vertice, conoscendo l'angolo della superficie e l'angolo che il piano secante fa con l'asse.

**604.** Per un punto dato condurre le rette, che hanno date distanze da due punti dati.

**605.** Trovare le rette di un piano che hanno distanze date da due punti fuori di esso.

# LIBRO QUARTO

## CAPITOLO I

### Teoria generale dell'equivalenza.

**243.** Nel § 20 abbiamo definito come *classe di grandezze* una serie di enti, pei quali si può stabilire il concetto di eguaglianza e di somma di un numero qualunque di essi, in modo che tale somma sia sempre un ente della serie stessa.

Ciascuna delle classi di grandezze, che abbiamo incontrate fino ad ora, gode delle seguenti proprietà caratteristiche:

1°. Addizionando due o più grandezze della medesima classe, si ottiene una nuova grandezza, che è la loro somma, appartenente alla classe stessa.

2°. La somma di più grandezze di una classe gode della proprietà commutativa, cioè tutte le somme, che si possono ottenere riunendo in diversi modi le medesime grandezze, sono eguali.

3°. Date due grandezze della stessa classe, una deve essere necessariamente maggiore, o eguale, o minore dell'altra, cioè la prima deve essere eguale alla somma della seconda con un'altra grandezza, oppure la prima deve essere eguale alla seconda, oppure la seconda deve essere eguale alla somma della prima con un'altra grandezza; e questi tre casi si escludono a vicenda.

Tutte le altre proprietà di tali classi di grandezze, le più notevoli delle quali sono state esposte nel § 20, sono conseguenze delle tre proprietà caratteristiche sopra enunciate.

Esempi di classi di grandezze, che si trovano in queste condizioni sono:

1° la classe formata da tutti i segmenti,
2° " " " tutti gli angoli,
3° " " " tutti i diedri,
4° " " " tutti gli archi di uno stesso circolo, o di circoli eguali,
5° " " " tutti i settori appartenenti ad uno stesso cerchio, o a cerchi eguali,

6° la classe formata da tutte le strisce,
7° " " " tutti gli strati,
8° " " " tutti gli angoli sferici di una stessa sfera, o di sfere eguali,
9° " " " tutti gli spicchi appartenenti alla stessa sfera, o a sfere eguali,
10° " " " tutti i parallelogrammi di una serie,
11° " " " tutti i prismi di una serie.

Passiamo ora a stabilire il concetto di somma per altre serie di grandezze geometriche mediante le seguenti

**Definizioni.** — 1ª. Dati due, o più poligoni piani non intrecciati, se si divide convenientemente ciascuno di essi in un numero arbitrario di poligoni convessi, indi si riuniscono queste parti, in modo che ognuna abbia una porzione del suo contorno in comune col contorno di un'altra parte, ed ogni punto interno ad una di esse sia esterno all'altra, e si sopprime poi la porzione di contorno comune a due parti consecutive, otteniamo un nuovo poligono non intrecciato, che risulta dalla riunione di tutte le parti dei poligoni dati, e che si dice una loro *somma.*

2ª. Dati due o più poliedri non intrecciati, se si divide convenientemente ciascuno di essi in un numero arbitrario di poliedri convessi, indi si riuniscono queste parti, in modo che ognuna abbia una porzione della sua superficie in comune colla superficie di un'altra parte, ed ogni punto interno ad una di esse sia esterno all'altra, e si sopprime poi la porzione di superficie comune a due parti consecutive, otteniamo un nuovo poliedro non intrecciato, che risulta dalla riunione di tutte le parti dei poliedri dati, e che si dice una loro *somma.*

Tali somme si possono eseguire in infiniti modi, e i risultati ottenuti non sono eguali.

3ª. L'operazione, mediante la quale si cerca una somma di due o più grandezze di una classe, si dice *addizione.*

Per indicare che la grandezza S è una somma delle grandezze A, B, C,... si scrive

$$S = A + B + C + \ldots$$

4ª. Se una grandezza A è somma di due, tre,... *n* grandezze eguali a B, si dice che A è *doppia, tripla,...* in generale *multipla di B secondo il numero* n, e che B è la *metà,* la *terza parte,...* in generale una *summultipla di A secondo il numero* n. Una grandezza si considera multipla di sè stessa secondo il numero 1.

S'indica ciò colle scritture

$$A = 2B, \quad A = 3B, \quad \ldots, \quad A = nB;$$

$$B = \frac{1}{2}A, \quad B = \frac{1}{3}A, \quad \ldots, \quad B = \frac{1}{n}A.$$

5ª. Due grandezze si dicono *equimultiple (o equisummultiple)* di altre due, se sono rispettivamente multiple (o summultiple) di esse secondo lo stesso numero.

Definizioni analoghe si possono stabilire rispetto a due altre serie di enti geometrici, quella dei poligoni sferici appartenenti ad una stessa superficie sferica, o a superficie sferiche eguali, e quella delle piramidi sferiche appartenenti ad una stessa sfera o a sfere eguali. Ne viene che i poligoni piani, i poliedri, i poligoni sferici appartenenti ad una stessa superficie sferica, o a superficie sferiche eguali, le piramidi

sferiche appartenenti alla stessa sfera, o a sfere eguali, sono quattro serie di enti, per ciascuna delle quali si può stabilire il concetto di somma, la quale somma è un ente della stessa serie. Esse sono dunque quattro classi di grandezze (§ 20 Def.); ma queste classi non hanno la seconda e la terza delle proprietà caratteristiche enunciate sopra, perciò non possono avere nemmeno le altre proprietà che da queste derivano, di cui godono le classi, che abbiamo incontrato fino ad ora.

Nel presente capitolo ci proponiamo appunto di studiare le proprietà di tali classi di grandezze. Notiamo fin d'ora che, in ciò che segue, parlando di due o più grandezze insieme considerate, sottintenderemo che esse sieno della stessa classe. Le proprietà che esporremo valgono per tutte quelle classi di grandezze, per le quali, come per i poligoni, poliedri ecc. (P. IV) si può ammettere la seguente proprietà:

*Se una grandezza è scomposta in parti in due modi diversi, si può produrre una terza divisione della data grandezza in parti, le quali saranno le parti risultanti dalla prima divisione suddivise, mediante la seconda divisione, e saranno anche le parti risultanti dalla seconda divisione, suddivise per mezzo della prima divisione.*

**244. Definizione.** — Due grandezze si dicono *equivalenti*, se si possono scomporre in egual numero di parti rispettivamente eguali.

L'equivalenza di due grandezze A, B s'indica colla scrittura

$$A = B$$

che si legge " *A equivalente a B* ".

**Corollario.** — *Due grandezze eguali sono anche equivalenti.*

**Teorema.** — *Due grandezze equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.*

Se due grandezze A, B sono equivalenti ad una terza C, esiste una scomposizione di A e di C, per la quale tutte le parti di A sono rispettivamente eguali a tutte le parti di C, ed un'altra scomposizione di B e C, per la quale tutte le parti di B sono eguali rispettivamente a tutte quelle di C.

Se pratichiamo sulla grandezza C contemporaneamente la decomposizione in parti eguali a quelle di A ed in parti eguali a quelle di B, la prima decomposizione suddividerà le parti eguali a quelle di B, e viceversa. Operando allora sulle parti di A le decomposizioni, che si verificano sulle eguali parti di C, e sulle parti di B le decomposizoni che si verificano sulle eguali parti di C, A e B trovansi decomposte in parti rispettivamente eguali, e sono perciò equivalenti.

**245. Teorema 1°.** — *Tutte le somme di due o più grandezze sono grandezze equivalenti.*

Infatti S, S′ essendo due somme delle stesse grandezze, A, B, C, la grandezza S si ottiene, riunendo le parti provenienti da una conveniente divisione di A, B, C ...., e S′ si ottiene, riunendo le parti provenienti da un'altra divisione di A, B, C .... Eseguendo su A, B, C ... le due divisioni insieme, ed operando sulle parti di S, S′ le suddivisioni

ottenute nelle parti di A, B, C ..., si ha che S, S' sono scomposte in parti eguali, e perciò sono equivalenti.

**Corollario** *1°*. — *Tutti i multipli di una medesima grandezza secondo uno stesso numero sono grandezze equivalenti.*

**Teorema** *2°*. — *Se una grandezza è somma di altre, ogni grandezza ad essa equivalente è pure somma delle medesime.*

Cioè, se

$$S = A + B + C + \dots, S' = S,$$

si ha

$$S' = A + B + C + \dots.$$

**Corollario** *2°*. — *Se una grandezza è multipla di un'altra secondo un numero qualunque, anche ogni grandezza equivalente alla prima è multipla dell'altra secondo lo stesso numero.*

**Teorema** *3°*. — *Se una grandezza è somma di più altre, è pure somma di grandezze ad esse equivalenti.*

Cioè, se

$$S = A + B + C + \dots, A = A', B = B', C = C', \dots$$

si ha

$$S = A' + B' + C' + \dots$$

**Corollario** *3°*. — *Se una grandezza è multipla di un'altra, è pure multipla secondo lo stesso numero di ogni grandezza equivalente a quella.*

**Teoremi.** — *4°*. *Sono equivalenti due grandezze somme di grandezze rispettivamente equivalenti.*

Cioè, se

$$A = A', B = B', C = C', \dots,$$

si ha pure

$$A + B + C + \dots = A' + B' + C' + \dots$$

*5°*. *Una grandezza somma di più altre è anche somma della somma di alcune di esse e delle rimanenti, e viceversa.*

Cioè, se

$$S = A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n + B + C, A = A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

si ha pure

$$S = A + B + C.$$

*6°*. *Se più grandezze sono equimultiple di più altre, secondo un numero* n, *la somma delle prime è pure multipla, secondo il numero* n, *della somma delle seconde.*

Cioè, se

$$A = nA', B = nB', C = nC' \dots, \quad S = A + B + C + \dots, \quad S' = A' + B' + C' + \dots,$$

si ha pure

$$S = n S'.$$

*7°. Se una grandezza è multipla di un'altra secondo il numero* m, *e questa è multipla di una terza secondo il numero* n, *la prima è multipla della terza secondo il numero* m, n.

Cioè, se

$$A = mB, \quad B = nC,$$

si ha pure

$$A = mnC.$$

*8°. Se una grandezza A è multipla secondo il numero* m *di una multipla di C secondo il numero* n, *essa è pure multipla secondo il numero* n *di una multipla di C secondo il numero* m.

Cioè, se

$$A = m\,(nC),$$

si ha pure

$$A = n\,(mC).$$

*9°. Se due grandezze sono equimultiple di altre due e queste sono pure equimultiple di altre due, le prime due sono equimultiple delle ultime.*

Cioè, se

$$A = mA_1, \; B = mB_1\,; \; A_1 = nA_2, \; B_2 = nB_2,$$

si ha

$$A = mnA_2 \quad , \quad B = mnB_2.$$

**246.** Ammettiamo in questo § e nei successivi che le grandezze, di cui si tratta, oltre alla proprietà indicata nel § precedente ed espressa dal Post. IV, abbiano pure la proprietà enunciata dalla seguente

**Proposizione di De-Zolt.** — *Se due grandezze A, B sono scomposte in parti, in modo che in A si trovino parti eguali a tutte quelle di B insieme ad altre, non è possibile trovare un'altra scomposizione di A e B, per la quale in A si trovino parti rispettivamente eguali a tutte quelle di B e nessuna di più, oppure in B si trovino parti rispettivamente eguali a tutte quelle di A insieme ad altre.*

Postulato XI *(dell'equivalenza).*

*La classe di grandezze costituita dai poligoni e quella costituita dai poliedri verificano la proposizione di De Zolt.*

Possiamo ora estendere a queste classi di grandezze i concetti di grandezza maggiore di un'altra, o minore di un'altra, o differenza fra due grandezze date, mediante le seguenti

**Definizioni.** — 1ª. Se due grandezze A, B si possono scomporre in parti, in modo che in A si trovino parti eguali a tutte quelle di B insieme ad altre, si dice che A è *maggiore* di B, o che B è *minore* di A.

Si indica ciò, scrivendo

$$A > B \text{ oppure } B < A$$

2ª. Se una grandezza A è somma di due o più altre grandezze B, C, D...., si dice che ciascuna di queste è la *differenza* fra A e una somma delle rimanenti.

Per indicare che C è la differenza tra A e B si scrive

$$C = A - B$$

e si legge " C equivalente ad A meno B ".

3ª. L'operazione, mediante la quale si trova la differenza di due grandezze, si dice *sottrazione*.

**247.** Nel § precedente abbiamo accennato, e fra breve lo dimostreremo, che esistono classi di grandezze tali che, date due grandezze A, B, l'una deve necessariamente essere maggiore, equivalente, o minore dell'altra, dando a queste parole il significato stabilito nel § 246, ed esistono altre classi per le quali questa proprietà non si verifica. Ci conviene perciò stabilire fin d'ora una distinzione delle classi di grandezze, basata su questa proprietà.

**Definizioni.** — 1ª. Diremo che una classe di grandezze è di *1ª specie,* se si può asserire che di due grandezze della classe l'una è necessariamente *maggiore, eguale o minore* dell'altra, e la somma di più grandezze gode della proprietà commutativa.

2ª. Diremo che una classe di grandezze è di *2ª specie,* se si può asserire che di due grandezze della classe l'una è necessariamente *maggiore, equivalente, o minore* dell'altra, e la somma di più grandezze della classe non gode della proprietà commutativa.

3ª. Diremo di *3ª specie* tutte le altre classi di grandezze.

Le classi dei segmenti, angoli e le altre enumerate nel § 243 sono di 1ª specie. Dimostreremo poi che la classe dei poligoni, quella dei poligoni sferici, appartenenti alla stessa superficie sferica o a superficie sferiche eguali, quella delle piramidi sferiche, appartenenti alla stessa sfera o a sfere eguali, sono di 2ª specie.

**Corollario.** — *Due grandezze di 1ª specie equivalenti sono eguali.*

**248. Teoremi.** — *1°. Se una grandezza è maggiore (o minore) di un'altra, essa è pure rispettivamente maggiore (o minore) di tutte le grandezze equivalenti a questa.*

Cioè, se

$$A > B\,,\ B = B'\,,$$

si ha pure

$$A > B'$$

*2°. Se una grandezza è maggiore (o minore) di un'altra, è pure maggiore (o minore) di tutte le grandezze minori (o maggiori) di quest'altra.*

Cioè, se

$$A > B,\ \ B > C,$$

si ha pure

$$A > C.$$

*3°. Se più grandezze sono rispettivamente maggiori di altre, la somma delle prime è pure maggiore della somma delle seconde.*

Cioè, se

$$A > A', \quad B > B', \quad C > C', \ldots\ldots,$$

si ha pure

$$A + B + C + \ldots\ldots > A' + B' + C' + \ldots\ldots$$

4°. *Se una grandezza è maggiore di un'altra, e con esse si sommano rispettivamente due grandezze equivalenti, la somma proveniente dalla prima grandezza è maggiore di quella proveniente dalla seconda.*

Cioè, se

$$A > B, \quad C = D,$$

si ha pure

$$A + C > B + D.$$

5°. *Se una grandezza è differenza di due altre, ogni grandezza ad essa equivalente è pure differenza delle medesime grandezze.*

Cioè, se

$$C = A - B, \quad C \doteq C',$$

si ha pure

$$C' = A - B.$$

6°. *Se una grandezza è differenza di due altre, essa è anche differenza di due grandezze equivalenti a queste.*

Cioè, se

$$C = A - B, \quad A = A', \quad B = B',$$

si ha pure

$$C = A' - B'.$$

7°. *Sono equivalenti due grandezze differenze di grandezze equivalenti.*

Cioè, se

$$C = A - B, \quad C' = A' - B',$$

si ha

$$C = C'.$$

8°. *Se una grandezza è maggiore di un'altra, e questa di una terza, la differenza fra la prima e la terza è maggiore della differenza fra la seconda e la terza.*

Cioè, se

$$A > B > C,$$

si ha

$$A - C > B - C.$$

9°. *Se da grandezze equivalenti, si sottraggono grandezze non equivalenti, è maggiore la differenza, che si ottiene sottraendo la grandezza minore.*

Cioè, se

$$A = A' > B > B',$$

si ha pure

$$A - B < A' - B'.$$

*10°. Se due grandezze sono equimultiple (o equisummultiple) di due altre, la multipla (o summultipla) della prima è maggiore, equivalente o minore di quella della seconda, secondo che la prima è maggiore, equivalente o minore della seconda.*

Cioè, se

$$A = mA', \quad B = mB', \quad A' \gtreqless B',$$

si ha rispettivamente

$$A \gtreqless B.$$

*11°. Se due grandezze sono equimultiple di altre due secondo il numero* n, *la differenza delle prime è multipla secondo lo stesso numero* n *della differenza delle seconde.*

Cioè, se

$$A = nA', \quad B = nB', \quad A' > B',$$

si ha

$$A - B = n(A' - B').$$

# CAPITOLO II

## Equivalenza di poligoni e superficie poliedriche.

### 1. — TRASFORMAZIONE DEI POLIGONI IN RETTANGOLI EQUIVALENTI DI UNA STESSA SERIE.

**249.** La classe di grandezze costituita dai poligoni piani gode di tutte le proprietà relative alla equivalenza esposte nei §§ 244-245, poichè a causa del P. IV vale per i poligoni la proposizione fondamentale dalla quale esse derivano.

**Definizioni.** — 1.ª Chiameremo *rettangolo di due segmenti* AB, CD il rettangolo, che ha le coppie di lati opposti eguali ai dati segmenti, e l'indicheremo colla scrittura $\overline{AB \cdot CD}$.

2ª. Chiameremo *quadrato di un segmento* AB il quadrato che ha i suoi lati eguali al dato segmento e lo indicheremo colla scrittura $\overline{AB}^2$

**250. Teorema.** — *Due triangoli che hanno un lato eguale ed eguale l'altezza corrispondente, sono equivalenti.*

Si dispongano i due triangoli in modo che abbiano un lato AB in comune, e che i due vertici rimanenti $C, C_1$ sieno situati dalla medesima parte della retta AB, e per conseguenza la retta $CC_1$ risulti parallela alla AB. Si possono allora considerare tre casi, secondo che il segmento $CC_1$ è eguale, minore o maggiore di AB.

1°. Se $CC_1 \equiv AB$ (fig. 205), la figura $ABC_1C$ è un parallelogrammo, e i lati $AC_1$, $BC$ si tagliano nel loro punto di mezzo O. È facile allora vedere che i due triangoli AOC, $C_1OB$ sono eguali, e che perciò sono equivalenti i due triangoli ABC, $ABC_1$, che si ottengono sommando il triangolo AOB coi due triangoli suddetti rispettivamente.

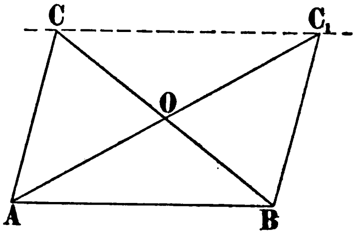


Fig. 205.

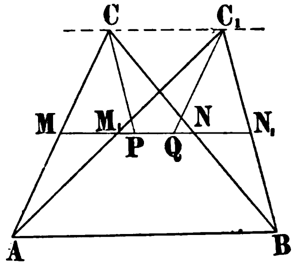


Fig. 206.

2°. Se $CC_1 < AB$ (fig. 206), si conduca la retta parallela alle rette AB, $CC_1$ ed equidistante da esse, la quale incontrerà i lati AC, BC, $AC_1$, $BC_1$ nei loro punti di mezzo M, N, $M_1$, $N_1$. Si conduca poi per C la parallela CP alla $C_1B$; essa taglia il lato AB e perciò è interna all'angolo ACB. Similmente la retta $C_1Q$, parallela alla AC, è interna all'angolo $AC_1B$. È allora facile vedere che si ha

$$CMP \equiv C_1QN_1, \qquad CPN \equiv BN_1N,$$
$$AMM_1 \equiv C_1QM_1, \quad AM_1NB \equiv AM_1NB,$$

e quindi, sommando tutte queste eguaglianze,

$$ABC = ABC_1.$$

3°. Se $CC_1 > AB$, riportiamo sul segmento $CC_1$, a partire da C, il segmento AB tante volte quante è possibile, in modo che sia $CD_2 \equiv D_2D_3 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}D_n \equiv AB$, essendo $D_n C_1$ eguale o minore di AB. Per le dimostrazioni precedenti sarà $ABC = ABD_2 = ABD_3 = \ldots =$ $= ABD = ABC_1$ e quindi $ABC = ABC_1$.

**Corollari.** — *1°. Due parallelogrammi che hanno eguali due coppie di lati opposti ed eguali le altezze corrispondenti, sono equivalenti.*

Infatti essi sono doppi di due triangoli equivalenti.

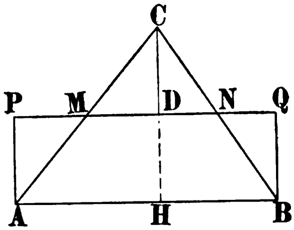


Fig. 207.

*2°. Ogni parallelogrammo è equivalente al rettangolo di un suo lato e dell'altezza corrispondente.*

**251. Teorema.** — *Ogni triangolo è equivalente al rettangolo di un suo lato e della metà dell'altezza corrispondente.*

Sia ABC (fig. 207) il dato triangolo e supponiamo dapprima che la perpendicolare condotta dal vertice C alla retta AB incontri questa retta in un punto H non esterno al segmento AB. Per il punto di mezzo D della CH si con-

duca la parallela PQ alla AB, e per i punti A, B le rette AP, BQ perpendicolari alla AB.

Essendo CD ≡ DH, deve essere anche CM ≡ MA e CN ≡ NB (§ 53 T. 1), ed allora i triangoli CMD, AMP sono eguali perchè hanno i lati CM, MA eguali, gli angoli $\widehat{CMD}$, $\widehat{AMP}$ eguali come opposti al vertice e gli angoli $\widehat{CDP}$, $\widehat{MPA}$ eguali perchè retti. In modo simile si può dimostrare che anche i triangoli CDN, BQN sono eguali.

Allora il triangolo ABC, e il rettangolo APQB, essendo composti di parti rispettivamente eguali sono equivalenti.

Se il punto H è esterno al segmento AB, si costruisca un triangolo, equivalente a quello dato, che abbia la stessa base AB e la stessa altezza del dato triangolo, ma in modo che il piede dell'altezza sia interno al segmento AB, e poi su questo nuovo triangolo si eseguisca la costruzione sopra indicata. Il rettangolo che si ottiene sarà equivalente anche al dato triangolo.

**Corollari.** — *1°. Se due triangoli hanno un lato eguale, secondo che l'altezza del primo triangolo corrispondente a questo lato è maggiore, eguale o minore dell'altezza corrispondente del secondo, il primo triangolo è maggiore, equivalente o minore dell'altro; e viceversa.*

*2°. Se la base di un triangolo è divisa in 2, 3 .... n segmenti eguali, i segmenti, che hanno per estremi il vertice opposto e i punti di divisione della base, scompongono il triangolo in 2, 3 .... n triangoli equivalenti.*

*3°. Un poligono convesso circoscritto ad un circolo è equivalente al rettangolo del perimetro e della metà del raggio del circolo inscritto.*

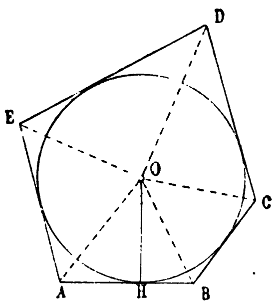


Fig. 208.

Sia ABCDE (fig. 208) il poligono circoscritto al circolo di centro O. I segmenti, che uniscono il centro O coi vertici dividono il poligono nei triangoli AOB, BOC...., ciascuno dei quali ha per base un lato del poligono e per altezza il raggio del circolo inscritto, e quindi equivale al rettangolo di quel lato e della metà del raggio OH. Facendo poi la somma di tutti questi rettangoli della stessa serie, si ha che l'intero poligono è equivalente al rettangolo della somma dei lati e della metà del raggio OH.

**252. Teorema.** — *Un trapezio è equivalente al rettangolo della sua altezza e della sua sezione media.*

Sia ABCD un trapezio ed HK la sua sezione media (fig. 209). Per il punto H conduciamo una retta LM parallela al lato opposto AD. I due triangoli LHC, MHB sono eguali, perchè hanno i lati CH, HB eguali per costruzione, gli angoli $\widehat{LCH}$, $\widehat{MBH}$ eguali, come alterni interni rispetto alle parallele AB, DL e alla trasversale BC, e gli angoli $\widehat{CHL}$, $\widehat{BHM}$ eguali come opposti al vertice. Perciò il trapezio ABCD e il parallelogrammo AMLD, che si possono scomporre, l'uno nelle parti AMHCD, HMB, l'altro nelle parti AMHCD, HLC, sono equivalenti. Siccome il parallelogrammo AMLD

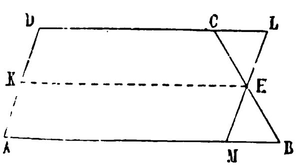


Fig. 209.

è equivalente al rettangolo dell'altezza e della sua base AM, che è eguale a HK, anche il trapezio dato sarà equivalente ad un tale rettangolo.

**Corollario.** — *Un trapezio è equivalente al rettangolo della sua altezza e della semisomma delle sue basi.*

Infatti la sezione media di un trapezio è eguale alla semisomma delle basi (§ 102 Teor.).

**253. Teorema.** — *Se due triangoli rettangoli sono equiangoli fra loro, il rettangolo di un cateto del primo e del cateto non corrispondente dell'altro è equivalente al rettangolo degli altri due cateti.*

Disponiamo i due triangoli rettangoli dati ABC, $AB_1C_1$ (fig. 210) in modo che i loro angoli retti e i cateti corrispondenti sieno sovrapposti; allora per l'eguaglianza degli angoli ABC, $AB_1C_1$ le ipotenuse BC, $B_1C_1$ risultano parallele.

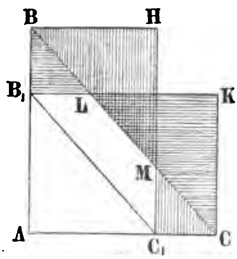


Fig. 210.

Condotte per C e $C_1$ le parallele alla AB e per B e $B_1$ le parallele alla AC si ottengono i due rettangoli $ABHC_1$, $AB_1KC$ che sono equivalenti.

Infatti, supposto $AC > AC_1$, possono distinguersi due casi $AC \leqq 2AC_1$ oppure $AC > 2AC_1$.

Nel 1° caso, essendo L ed M i punti d'incontro della retta BC colle rette $B_1K$, $C_1H$, è facile vedere che i triangoli $BB_1L$, $MC_1C$ sono eguali, perchè hanno tutti gli angoli eguali (avendo i lati paralleli e diretti nello stesso senso) e i lati $BB_1$, $MC_1$ eguali, come segmenti paralleli compresi fra rette parallele. Ne segue $BL \equiv MC$ e quindi anche $BM \equiv LC$. Allora i due triangoli BHM, LKC sono pure eguali, avendo i lati BM, LC eguali, e tutti gli angoli rispettivamente eguali.

Essendo

$$ABHC_1 = AB_1LM + BB_1L + BHM$$
$$AB_1KC = AB_1LM + MC_1C + LKC,$$

segue

$$ABHC_1 = AB_1KC.$$

Nel 2° caso si portino sopra AC dei segmenti consecutivi $AC_1$, $C_1C_2$, $C_2C_3$.... tutti eguali fra loro. Per il postulato di Archimede si dovrà trovare uno di questi punti esterno ad AC. Sia per es. $C_3$ l'ultimo punto contenuto nel segmento AC. Condotte per $C_2$, $C_3$, le parallele a $B_1C_1$ che incontrino in $B_2$, $B_3$ la AB si ha (§ 53 Teor. 1) $AB_1 \equiv B_1B_2 \equiv B_2B_3$. Conducendo allora per $B_2$, $B_3$ delle rette parallele ad AC e per $C_2$, $C_3$ delle parallele ad AB è facile dimostrare come nel 1° caso che

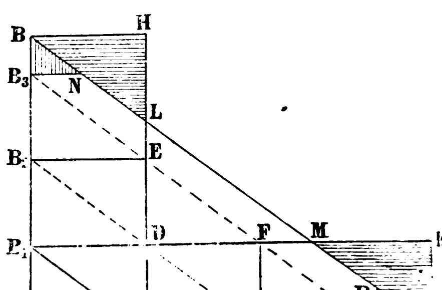


Fig. 211.

$$AB_1DC_1 \equiv B_1B_2ED \equiv C_1DFC_2$$
$$B_2B_3NLE \equiv C_2FMPC_3$$
$$B_3BN \equiv C_3PC$$
$$BHL \equiv MKC,$$

ed allora i due rettangoli $ABHC_1$, $AB_1KC$ essendo composti di parti rispettivamente eguali sono equivalenti.

**254. Problema.** — *Costruire un triangolo che sia equivalente ad un dato poligono non intrecciato.*

Supponiamo da prima (fig. 212) che il dato poligono sia convesso, e sia per es. il pentagono ABCDE. Presi i tre vertici consecutivi C, D, E, si conduca per quello intermedio una retta DF parallela alla diagonale CE, che congiunge gli altri due. Questa parallela incontrerà una delle due rette del poligono che passano per i punti C ed E, per esempio AE, in un punto F. Conducendo il segmento CF, si ottiene un triangolo CEF equivalente a CDE, poichè questi due triangoli hanno la stessa base CE ed eguale altezza. Ne segue che i due poligoni ABCDE, ABCF, somme dei due triangoli equivalenti CDE, CFE col quadrilatero ABCE, sono equivalenti.

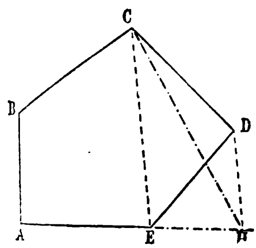


Fig. 212.

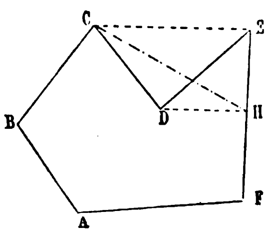


Fig. 213.

Così abbiamo ottenuto un poligono, equivalente al dato pentagono, e che ha un lato di meno. Ripetendo su questo la medesima costruzione, otterremo un altro poligono equivalente e con un lato di meno, cioè un triangolo.

Nello stesso modo, ripetendo tante volte quante occorre la costruzione precedente, si può costruire un triangolo equivalente ad un poligono qualunque.

Se il poligono non è convesso si può applicare sempre la costruzione precedente, come mostra la fig. 213; la dimostrazione resta invariata.

**255. Problema 1°.** — *Costruire un rettangolo che sia equivalente ad un dato rettangolo, e che abbia due lati opposti eguali ad un segmento dato.*

Sia ABCD il dato rettangolo, MN il dato segmento. Sopra una retta AB del rettangolo prendiamo, a partire da A, un segmento $AH \equiv NM$, situato rispetto ad A dalla stessa parte del segmento AB; si tracci la retta HD, e per il vertice B la parallela BL ad HD, che incontrerà in L la retta AD. Il rettangolo AHKL dei segmenti AH, AL è equivalente (§ 253 Teor.) al rettangolo ABCD.

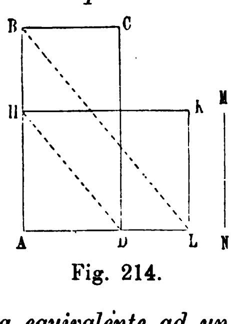


Fig. 214.

**Problema 2°.** — *Costruire un rettangolo, che sia equivalente ad un poligono dato non intrecciato, e che abbia due lati opposti eguali ad un segmento dato.*

Nel modo indicato nel § precedente si può prima di tutto costruire un triangolo equivalente al poligono dato. Allora il rettangolo della base e della metà dell'altezza di questo triangolo è equivalente al poligono dato (§ 251 Teor.) Finalmente applicando le costruzioni del problema precedente si può costruire un rettangolo, che abbia due lati opposti eguali ad un segmento dato, e che sia equivalente al rettangolo ottenuto, e quindi anche al dato poligono.

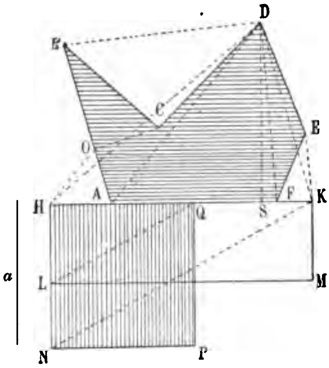


Fig. 215.

Nella fig. 215, dato l'esagono ABCDEF ed il segmento *a*, è stato costruito il triangolo DHK equivalente al dato poligono, poi il rettangolo HKML della base e della metà dell'altezza di questo triangolo; infine il rettangolo HQPN, che è equivalente a questo, e quindi anche al dato poligono, e che ha i lati opposti HQ, NP eguali al dato segmento *a*.

**256. Teorema.** — *Tutti i poligoni piani non intrecciati costituiscono una classe di grandezze di 2ª specie.*

Dati infatti due o più poligoni piani non intrecciati, le costruzioni dei §§ precedenti ci danno il modo di ottenere altrettanti rettangoli, aventi due lati opposti eguali ad un segmento dato, ed equivalenti rispettivamente ai poligoni dati. Tutti questi rettangoli così ottenuti fanno parte di una classe di grandezze di prima specie, e perciò di due di essi uno è sempre maggiore, eguale o minore dell'altro, e quindi anche di due poligoni uno è sempre maggiore, equivalente o minore dell'altro.

Si noti che, eseguendo tutte le costruzioni, si potrebbero sempre scomporre due poligoni in un numero finito di parti rispettivamente eguali, se essi sono equivalenti, oppure, se non sono equivalenti, si potrebbero scomporre ambedue in un numero finito di parti, in modo che il maggiore contenesse tutte le parti del minore insieme ad altre, e più generalmente valgono per i poligoni tutti i teoremi del § 248.

**Corollario.** — *Di un poligono qualunque può trovarsi un summultiplo secondo qualsiasi numero.*

## 2. — RELAZIONI DI RETTANGOLI, O QUADRATI, COSTRUITI SUI LATI DI UN TRIANGOLO, O DI UN QUADRILATERO.

**257. Teorema.** — *Il rettangolo di due segmenti, ciascuno dei quali è somma di altri segmenti, è equivalente alla somma di tutti i rettangoli di una parte del primo segmento e di una del secondo.*

Sia per es. (fig. 216) $AD \equiv AB + BC + CD$, $AA'' \equiv AA' + A'A''$, e sia $ADD''A''$ il rettangolo dei segmenti $AD, AA''$. Conducendo per i punti B, C delle rette parallele ad $AA''$ e per il punto $A'$ una retta parallela ad AD, il suddetto rettangolo resta scomposto in sei quadrilateri, che sono rettangoli, perchè hanno i lati opposti paralleli e gli

angoli retti. Inoltre, siccome i segmenti di parallele compresi fra parallele sono eguali, si ha

$$AB \equiv A'B' \equiv A''B'',\ BC \equiv B'C' \equiv B''C'',\ CD \equiv C'D' \equiv C''D''$$
$$AA' \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD',\ A'A'' \equiv B'B'' \equiv C'C'' \equiv D'D'',$$

perciò questi rettangoli sono tutti i possibili rettangoli di una parte del segmento AD e di una del segmento AA″.

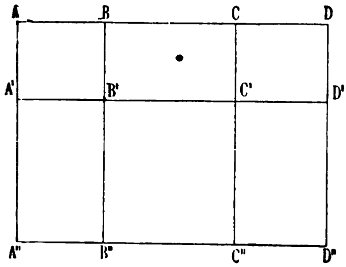


Fig. 216.

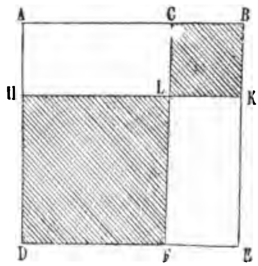


Fig. 217.

**Corollario.** — *Il quadrato di un segmento somma di altri due è equivalente alla somma dei quadrati di questi segmenti e del doppio rettangolo dei medesimi.*

Se AB (fig. 217) è somma dei due segmenti AC, CB, il suo quadrato, potendosi riguardare come il rettangolo delle due somme $\overline{AC + CB}$, $\overline{AC + CB}$, è equivalente alla somma dei rettangoli $\overline{AC . AC}$, $\overline{AC . CB}$, $\overline{CB . AC}$, $\overline{CB . CB}$, ossia

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\,\overline{AC . CB}.$$

**258. Teorema.** — *Il quadrato di un segmento, differenza di altri due segmenti, è equivalente alla differenza fra la somma dei quadrati di questi segmenti e il doppio rettangolo dei segmenti stessi.*

Infatti sia AB ≡ AC — BC. Costruiamo (fig. 218) il quadrato AEDC di AC; prendiamo su di EA un segmento EK, eguale al segmento minore BC, e su questo costruiamo il quadrato EKFH situato, rispetto alla retta AE, dalla parte opposta del quadrato AEDC; prolunghiamo il lato HK, e conduciamo per B una retta parallela a CD. È facile vedere che AKOB è il quadrato di AB, ed è chiaro inoltre che esso è la somma dei quadrati di AC e BC, diminuita dei due rettangoli LOHF, LDCB, che sono eguali e che hanno le coppie di lati opposti eguali ai segmenti AC, BC.

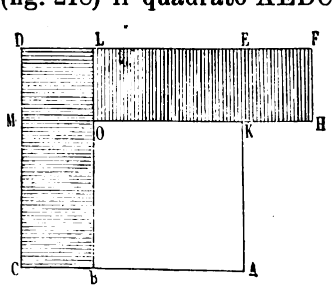


Fig. 218.

**259. Teorema.** — *La differenza di due quadrati è equivalente al rettangolo della somma e della differenza dei loro lati.*

Disponiamo (fig. 219) i due quadrati dati, in modo che abbiano un angolo retto C comune. La loro differenza è l'esagono concavo ADHFEB, il quale dal prolungamento FN del lato EF è diviso in due rettangoli NABE, DHFN, che hanno i lati DH, NF, NA, EB eguali come differenze dei lati dei quadrati dati. Ora portando il secondo di questi rettangoli nella posizione EBLK, in modo che abbia un lato in comune col primo e ogni punto interno all'uno sia esterno all'altro, si vede che la somma dei due rettangoli suddetti, cioè la differenza dei quadrati dati, è equivalente al rettangolo NALK, che ha due lati NA, KL eguali alla differenza dei lati dei quadrati dati, e gli altri due NK, AL eguali alla somma dei lati stessi.

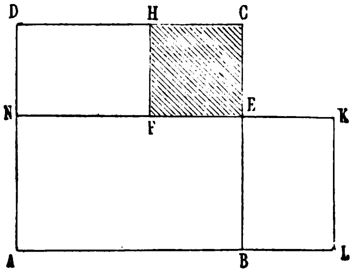


Fig. 219.

**260. Teoremi.** — *1°. Due triangoli sono equiangoli fra loro, se hanno un angolo eguale compreso fra lati tali che il rettangolo di due di essi, non appartenenti allo stesso triangolo, sia equivalente al rettangolo degli altri due.*

Sieno i due triangoli ABC, AB′C′, i quali hanno l'angolo $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'AC'}$ e sia $\overline{AB \,.\, AC'} = \overline{AB' \,.\, AC}$. Portiamo il triangolo AB′C′ sull'altro, in modo che gli angoli in A eguali coincidano (fig. 220), e i lati, che concorrono a formare uno stesso rettangolo, non sieno sovrapposti. Per il punto A conduciamo, fuori del piano dei due triangoli, una retta AD′ perpendicolare ad AC, e prendiamo su di questa, a partire da A, due segmenti AD, AD′ rispettivamente eguali ai segmenti AB, AB′.

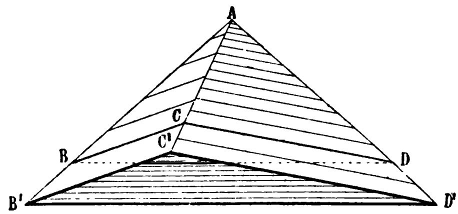


Fig. 220.

I triangoli BAD, B′AD′ sono isosceli ed hanno l'angolo $\widehat{BAD}$ in comune, dunque le rette BD, B′D′ sono parallele. Inoltre i due triangoli rettangoli CAD, C′AD′ sono tali che $\overline{AC \,.\, AD'} = \overline{AC' \,.\, AD}$, quindi (§ 253 Teor.) la retta CD è parallela a C′D′. Ne segue che gli angoli $\widehat{BDC}$, $\widehat{B'D'C'}$, avendo i loro lati rispettivamente paralleli, individuano due piani paralleli, i quali tagliano il piano del triangolo B′AC′ secondo due rette B′C′, BC parallele. Dunque i due triangoli ABC, AB′C′ sono equiangoli fra loro.

*2°. Se due triangoli sono equiangoli fra loro, il rettangolo di ogni lato del primo triangolo e di un lato non corrispondente del secondo è equivalente al rettangolo dei due lati corrispondenti ai primi; e viceversa, se fra i lati di due triangoli sono verificate due delle equivalenze suddette, i due triangoli sono equiangoli fra loro.*

1°. Si dispongano i due triangoli (fig. 220), in modo che due angoli eguali coincidano, e che sieno sovrapposte due coppie di lati corrispondenti. A causa dell'eguaglianza degli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{AB'C'}$, la BC risulta parallela a B′C′. Inoltre costruita la figura, come è detto nel teorema

precedente, si ha che BD è pure parallela a B′D′, e quindi i piani individuati dalle coppie di rette rispettivamente parellele BC, BD; B′C′, B′D′ sono paralleli, e tagliano il piano delle rette AC′, AD′ secondo rette parallele CD, C′D′. Ne segue che i due triangoli rettangoli ACD, AC′D′ sono equiangoli fra loro, e quindi (§ 253 Teor.) $\overline{AC}\,.\,\overline{AD'} = \overline{AC'}\,.\,\overline{AD}$, ossia $\overline{AC}\,.\,\overline{AB'} = \overline{AC'}\,.\,\overline{AB}$. Altre equivalenze analoghe si ricavano portando a coincidere altri due angoli eguali dei triangoli dati.

2°. Sieno ABC, A′B′C′ (fig. 221) due triangoli dati, tali che si abbia $\overline{AB}\,.\,\overline{B'C'} = \overline{A'B'}\,.\,\overline{BC}$, $\overline{AB}\,.\,\overline{A'C'} = \overline{A'B'}\,.\,\overline{AC}$; si vuol dimostrare che sono equiangoli fra loro. Sui lati BA, BC del primo triangolo si portino, a partire dal vertice B, due segmenti BA″, BC″ eguali rispettivamente a B′A′, B′C′ e si congiunga A″ con C″. I triangoli BA″C″, BAC hanno un angolo eguale, ed inoltre si ha per ipotesi che $\overline{AB}\,.\,\overline{BC''} = \overline{A''B}\,.\,\overline{BC}$; dunque i detti triangoli per il teor. preced. sono equiangoli fra loro. Allora, per ciò che si è dimostrato più sopra, si ha pure che $\overline{AB}\,.\,\overline{A''C''} = \overline{A''B}\,.\,\overline{AC}$, ossia, sostituendo ad A″B il suo eguale A′B′, $\overline{AB}\,.\,\overline{A''C''} = \overline{A'B'}\,.\,\overline{AC}$. Confrontando questa equivalenza con quella data per

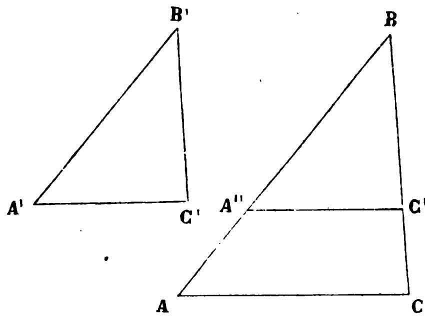



Fig. 221.

ipotesi $\overline{AB}.\overline{A'C'} = \overline{A'B'}.\overline{AC}$, si ricava $\overline{AB}.\overline{A''C''} = \overline{AB}.\overline{A'C'}$, da cui si ha che A″C″=A′C′. Ne segue che i due triangoli BA″C″, B′A′C′, avendo i lati rispettivamente eguali, sono eguali, e poichè il primo ha gli angoli ordinatamente eguali a quelli del triangolo ABC, anche A′B′C′, ABC sono equiangoli fra loro.

**261. Teorema.** (*) — *In ogni triangolo rettangolo:*

*1° il quadrato dell'altezza corrispondente all'ipotenusa è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa;*

*2° il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo della ipotenusa e della sua proiezione sull'ipotenusa.*

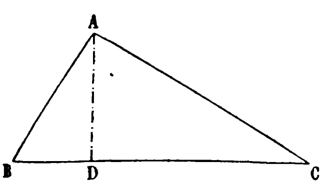



Fig. 222.

Sia ABC (fig. 222) un triangolo rettangolo, AD la sua altezza corrispondente alla ipotenusa. I triangoli DBA, ABC hanno l'angolo $\widehat{ABD}$ comune, gli angoli $\widehat{BDA}$, $\widehat{BAC}$ eguali, perchè retti, perciò anche il terzo angolo $\widehat{BAD}$ del primo è eguale al terzo angolo $\widehat{ACD}$ dell'altro. Similmente i due triangoli DAC, ABC, avendo l'angolo $\widehat{ACD}$ comune e gli angoli $\widehat{ADC}$, $\widehat{BAC}$ eguali perchè retti, hanno pure eguali gli angoli $\widehat{DAC}$, $\widehat{ABC}$. Ne segue che anche gli angoli del triangolo DBA sono rispettivamente eguali a quelli del triangolo DAC.

(*) Questo teorema ed i seguenti si potrebbero generalizzare sostituendo ai rettangoli i parallelogrammi e ai quadrati le losanghe che hanno gli angoli eguali.

Nel triangolo DBA corrisponde il lato BD al lato AD del triangolo DAC
„ „ AD „ DC „ „
perciò (§ 260 Teor. 2°).

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}.\overline{DC}.$$

Nel triangolo ABD corrisponde il lato BD al lato AB del triangolo CBA
„ „ AB „ BC „ „
perciò (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BD}.$$

Analogamente si dimostra che

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{DC}.$$

**262. Teorema** (di Pitagora). — *Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.*

1ª. **Dimostrazione.** — Questo teorema puo riguardarsi come corollario di quello del § prec.; infatti, essendo

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BD}$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{DC},$$

risulta

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{(BD + DC)},$$

ossia

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 .$$

2ª. **Dimostrazione.** — Costruiamo i quadrati ABDE e KHFD dei cateti del triangolo dato ABC (fig. 223), disponendoli in modo che un lato DK dell'uno giaccia sulla retta DE dell'altro, e sieno situati in parti opposte rispetto a questa retta; allora gli altri due lati DB, DF risulteranno per diritto, essendo la somma degli angoli $\widehat{BDE}, \widehat{EDF}$ eguale ad un angolo piatto. Prolungato il lato DE di un segmento EL eguale al cateto BC del triangolo, si traccino i segmenti AL, LH, HC. I quattro triangoli ABC, AEL, LKH, CFH sono eguali; infatti gli angoli $\widehat{ABC}, \widehat{AEL}, \widehat{LKH}, \widehat{CFH}$ sono retti, i cateti BC, EL, KH, FH sono eguali per costruzione, e i cateti AB, AE, LK, CF sono pure eguali. È chiaro allora che la somma dei due quadrati ABDE, KHFD e il quadrilatero ACHL sono equivalenti, perchè si possono scomporre l'una nel pentagono ACHKE e nei due triangoli ABC, CFH, l'altro nello stesso pentagono e nei triangoli AEL, LKH, eguali ai primi.

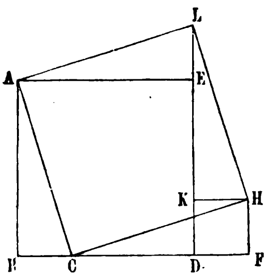


Fig. 223.

Il quadrilatero ALHC non è altro che il quadrato costruito sull'ipotenusa AC del triangolo dato. Infatti esso ha tutti i suoi lati eguali, come ipotenuse di quei triangoli rettangoli eguali; e l'angolo $\widehat{CAL}$ retto, perchè, essendo $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EAL}$, è anche $\widehat{BAC} + \widehat{CAE} \equiv \widehat{EAL} + \widehat{CAE}$ ossia $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CAL}$.

**Corollari.** — *1°. Il quadrato di un cateto di un triangolo rettangolo è equivalente alla differenza fra il quadrato dell'ipotenusa e il quadrato dell'altro cateto.*

*2°. Il quadrato della diagonale di un quadrato è equivalente al doppio del quadrato dato.*

**263. Teoremi.** — *1°. Il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso di un triangolo ottusangolo è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati e del doppio rettangolo di uno di questi lati e della proiezione dell'altro lato sulla retta di esso.*

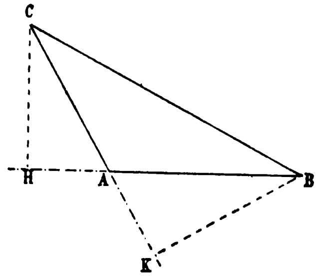


Fig. 224.

Sia BAC (fig. 224) un triangolo, avente l'angolo $\widehat{BAC}$ ottuso; la perpendicolare CH, condotta da C sulla retta del lato opposto AB deve incontrare questa retta in un punto H, esterno al segmento AB e dalla parte di A, poichè se cadesse nell'interno del segmento AB, o sul suo prolungamento dalla parte di B, l'angolo $\widehat{CAB}$ sarebbe acuto. Si ha perciò

$$HB \equiv HA + AB,$$

e quindi (§ 257 Cor.)

$$\overline{HB}^2 = \overline{HA}^2 + \overline{AB}^2 + 2\overline{HA}.\overline{AB}.$$

e per conseguenza

$$\overline{HC}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{HA}^2 + \overline{AB}^2 + 2\overline{HA}.\overline{AB}.$$

Ora i due triangoli BCH, ACH essendo rettangoli, si ha

$$\overline{HC}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{BC}^2, \quad \overline{HC}^2 + \overline{HA}^2 = \overline{AC}^2,$$

e quindi l'equivalenza precedente diviene

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\overline{HA}.\overline{AB}.$$

Analogamente, essendo AK la proiezione di AB sulla retta AC, si ha

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\overline{CA}.\overline{AK}$$

*2°. Il quadrato del lato opposto ad un angolo acuto di un triangolo qualunque è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio rettangolo di uno di questi lati e della proiezione dell'altro lato sulla retta di esso.*

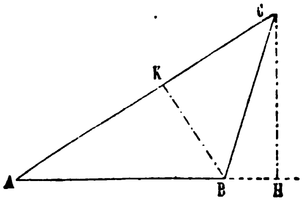


Fig. 225.

Nel triangolo qualunque ABC (fig. 225) l'angolo $\widehat{CAB}$ sia acuto, e dal vertice C conduciamo la perpendicolare CH sulla retta AB. Se l'angolo $\widehat{CBA}$ è retto, il segmento AH $\equiv$ AB, e quindi (§ 262 Cor. 1°)

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AH}.$$

Se poi l'angolo $\widehat{CBA}$ non è retto, è facile vedere che il punto d'incontro H della AB colla perpendicolare suddetta cade sul prolungamento, o nell'interno del segmento AB, secondo che l'angolo $\widehat{CBA}$ è ottuso, od acuto.

Nel primo caso si ha dunque $HB \equiv AH - AB$, nel secondo $HB \equiv AB - AH$, e perciò in tutti i casi si ha (§ 258 Teor.)

$$\overline{HB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB\,.\,AH},$$

e quindi

$$\overline{HC}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB\,.\,AH}.$$

Inoltre, i due triangoli BCH, ACH essendo rettangoli, si ha

$$\overline{HC}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{BC}^2, \qquad \overline{HC}^2 + \overline{HA}^2 = \overline{AC}^2;$$

perciò l'equivalenza precedente diviene

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB\,.\,AH}.$$

Analogamente, essendo AK la proiezione del lato AB sulla retta AC, si ricava

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AC\,.\,AK}.$$

**Corollario.** — *Il rettangolo di un lato di un triangolo e della proiezione di un altro lato sulla sua retta è equivalente al rettangolo del secondo lato e della proiezione del primo sulla retta del secondo.*

Dalle equivalenze dei due teoremi precedenti si ricava infatti

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \pm 2\,\overline{AB\,.\,AH} = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \pm 2\,\overline{AC\,.\,AK},$$

e quindi

$$\overline{AB\,.\,AH} = \overline{AC\,.\,AK}.$$

**264. Teorema.** — *In ogni triangolo*

*1° la somma dei quadrati di due lati è equivalente alla somma del doppio del quadrato della metà del terzo lato e del doppio del quadrato della mediana, che termina a questo lato;*

*2° la differenza dei quadrati di due lati è equivalente al doppio rettangolo del terzo lato e della proiezione sulla sua retta della mediana, che termina ad esso.*

1°. Se il triangolo ABC ha i suoi lati AB, AC eguali, la mediana AM risulta perpendicolare al lato BC, e i due triangoli ABM, ACM sono rettangoli; perciò si ha (§ 261 Teor.)

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2,$$

e quindi, siccome $BM \equiv MC$,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2.$$

Se poi i lati AB, AC del triangolo dato sono diseguali (fig. 226), ed è per esempio AB > AC, il triangolo AMB ha i lati AM, MB eguali ai lati AM, MC del triangolo AMC, ed il lato AB maggiore del terzo lato AC di questo triangolo, e perciò l'angolo $\widehat{AMB}$ è maggiore dell'angolo $\widehat{AMC}$ (§ 90 Cor. 1°), e perciò l'angolo $\widehat{AMB}$ è ottuso, e $\widehat{AMC}$ acuto.

Se ora dal vertice A conduciamo la AH perpendicolare al lato BC del triangolo, il segmento MH è la proiezione del segmento AM. Per i teoremi del § precedente si ha:

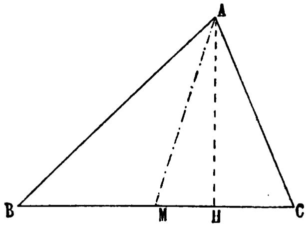


Fig. 226.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\overline{BM.MH},$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 - 2\overline{CM.MH},$$

e quindi, essendo BM ≡ CM,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2$$

2°. Se il triangolo ABC è isoscele, ossia è AB ≡ AC, il segmento MH è nullo, e quindi

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC.MH}$$

Se poi è AB > AC, dalle equivalenze trovate si ricava

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 4\overline{BM.MH};$$

ossia, essendo 2 BM ≡ BC,

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC.MH}.$$

**265. Teoremi.** — *1°. Sono equivalenti tutti i rettangoli delle coppie di segmenti, condotti da un punto ad un circolo (o ad una sfera) e situati sopra una medesima segante.*

*Inversamente se su due rette* a, a′ *che si tagliano in un punto* A *sono date due coppie di punti* B, C *e* B′, C′ *tali che* A *sia o interno ai due segmenti* BC, B′C′ *o esterno ad ambedue e che sia* $\overline{AB.AC} = \overline{AB'.AC'}$, *i quattro punti* B, C, B′, C′ *sono situati sopra un circolo.*

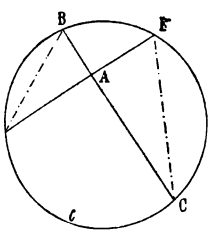


Fig. 227.

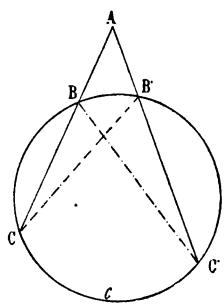


Fig. 228.

1°. Se per un punto A, preso nel piano del circolo *c*, interno (fig. 227) od esterno (fig. 228) al cerchio, si conducono due seganti, che taglino il circolo nelle coppie di punti B, C; B′, C′, e si tracciano i segmenti B′C, BC′, si ottengono due triangoli ABC′, AB′C, che hanno i loro angoli rispettivamente eguali, poichè evidentemente si ha $\widehat{BAC'} \equiv \widehat{B'AC}$, $\widehat{ACB'} \equiv \widehat{AC'B}$ (§ 183 Cor. 1°).

Nel triangolo ABC′ il lato AB corrisponde al lato AB′ del trian-

golo AB'C e il lato AC' corrisponde al lato AC del triangolo AB'C, perciò (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{AB}\,.\,\overline{AC} = \overline{AB'}.\overline{AC'}.$$

Nel caso poi di una sfera, se si conduce il piano individuato dalle due seganti, e si applicano al circolo intersezione le considerazioni precedenti, il teorema resta dimostrato.

2°. Essendo B,C, B',C' quattro punti tali che sia $\overline{AB}\,.\,\overline{AC} = \overline{AB'}\,.\,\overline{AC'}$ e che A sia o interno o esterno ad ambedue i segmenti BC B'C', si faccia passare un circolo per i tre punti B,C',B'. Questo taglierà la semiretta AC' in un punto C'' tale che si avrà $\overline{AB}.\,\overline{AC} = \overline{AB'}\,.\,\overline{AC''}$. Si avrà perciò $\overline{AB'}.\overline{AC'} = \overline{AB'}.\overline{AC''}$ e quindi $AC' \equiv AC''$, cioè i punti C',C'' coincidono.

2°. *Il rettangolo di una coppia di segmenti, condotti ad un circolo per un suo punto esterno, e situati sopra una medesima segante, è equivalente al quadrato di un segmento tangente al circolo, condotto per lo stesso punto.*

*Inversamente, se B, C sono due punti di una semiretta uscente da un punto A, e D un punto di un'altra semiretta uscente da A, tale che sia* $\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{AC}$, *il circolo che passa per i punti B, C, D è tangente in D alla retta AD.*

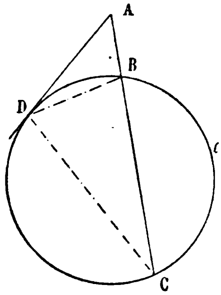


Fig. 229.

1°. Siano AB, AC (fig. 229) due segmenti, condotti ad un circolo *c* per un punto A esterno ad esso e situati sopra una stessa segante, AD un segmento tangente. Conducendo i segmenti BD, DC, si ottengono i due triangoli ADC, ABD, che hanno l'angolo $C\widehat{A}D$ comune, gli angoli $A\widehat{C}D$, $B\widehat{D}A$ eguali (§ 184 Teor.), ed hanno quindi eguali anche gli angoli $A\widehat{D}C$, $A\widehat{B}D$.

Nel triangolo ADC il lato AC corrisponde al lato AD del triangolo ABD, il lato AD corrisponde al lato AB del triangolo ABD e perciò (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{AB}\,.\,\overline{AC} = \overline{AD}^2.$$

2°. Inversamente, se B, C sono due punti di una semiretta uscente da A e D un altro punto tale che sia $\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,.\,\overline{AC}$, si conduca il circolo che passa per i tre punti B, C, D; se esso non fosse tangente alla semiretta AD la taglierebbe in un altro punto D tale che sarebbe $\overline{AD}\,.\,\overline{AD'} = \overline{AB}\,.\,\overline{AC}$. Si avrebbe perciò $\overline{AD}\,.\,\overline{AD'} = \overline{AD}^2$, ossia $AD \equiv AD'$, il che è assurdo.

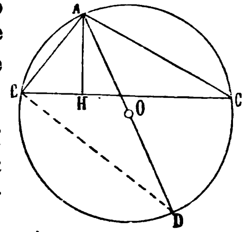


Fig. 230.

**266. Teorema.** — *Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al rettangolo dell'altezza relativa al terzo lato e del diametro del circolo circoscritto al triangolo.*

Sia *c* (fig. 230) il circolo circoscritto al dato triangolo ABC, AH l'altezza del triangolo relativa al lato BC, AD il diametro che passa per A. Condotto il segmento BD, si ottengono due trian-

goli AHC, ABD, che hanno gli angoli $\widehat{AHC}$, $\widehat{ABD}$ eguali, perchè retti, gli angoli $\widehat{ACH}$, $\widehat{ADB}$ eguali, perchè inscritti in uno stesso arco, e perciò hanno eguali anche gli angoli $\widehat{CAH}$, $\widehat{DAB}$.

Nel triangolo AHC il lato AH corrisponde al lato AB del triangolo ABD, il lato AC corrisponde al lato AD del triangolo ABD e perciò (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AH}.\overline{AD}.$$

**267. Teorema.** — *Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente alla somma del quadrato della bisettrice dell'angolo compreso e del rettangolo dei due segmenti, nei quali questa bisettrice divide il terzo lato.*

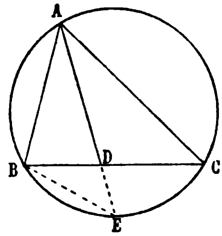


Fig. 231.

Sia AD (fig. 231) la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ del triangolo ABC ed E il punto, distinto da A, in cui questa semiretta incontra il circolo circoscritto al dato triangolo. Condotto il segmento BE, si ottengono due triangoli ABE, ADC, che hanno gli angoli $\widehat{BAE}$, $\widehat{DAC}$ eguali per ipotesi, gli angoli $\widehat{BEA}$, $\widehat{DCA}$ eguali, perchè inscritti in uno stesso arco di circolo, e perciò hanno anche l'angolo $\widehat{ABE}$ eguale all'angolo $\widehat{ADC}$.

Nel triangolo ABE il lato AB corrisponde al lato AD del triangolo ADC, il lato AE corrisponde al lato AC del triangolo ADC, e perciò (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}.\overline{AE}.$$

Essendo $AE \equiv AD + DE$, ne risulta (§ 257 Teor.)

$$\overline{AD}.\overline{AE} = \overline{AD}^2 + \overline{AD}.\overline{DE},$$

ed anche

$$\overline{AD}.\overline{AE} = \overline{AD}^2 + \overline{BD}.\overline{DC},$$

poichè per il teorema 1° del § 265, si ha

$$\overline{AD}.\overline{DE} = \overline{BD}.\overline{DC},$$

Si ha dunque

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}^2 + \overline{BD}.\overline{DC}.$$

**268. Teorema.** — *Se la bisettrice di un angolo interno, od esterno, di un triangolo incontra la retta del lato opposto, i rettangoli delle distanze del punto di intersezione dai due vertici, situati su quella retta, e dei lati non consecutivi ad esse sono equivalenti.*

*Viceversa, la semiretta uscente dal vertice di un triangolo, che incontra la retta del lato opposto in un punto tale, che i rettangoli delle distanze di questo punto dai due vertici del triangolo, situati su quella retta, e dei lati non consecutivi ad esse siano equivalenti, è bisettrice dell'angolo interno, od esterno, del triangolo.*

1°. Sia AD una bisettrice interna (fig. 232), od esterna (fig. 233), del triangolo ABC; si vuol dimostrare che

$$\overline{BD\,.\,AC} = \overline{DC\,.\,AB}.$$

Dal vertice C conduciamo la parallela alla AD, che incontrerà la retta del lato opposto in un punto E, e dal vertice A si conduca la parallela al lato BC che incontrerà in K la CE. Considerando le due

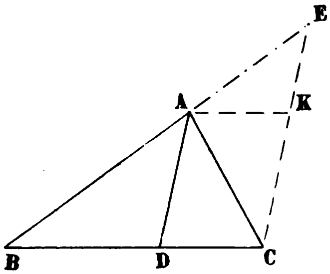



Fig. 232.

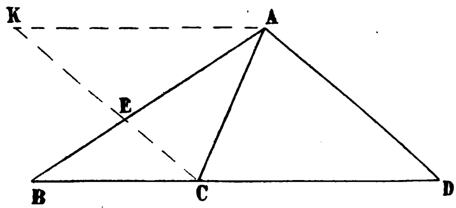



Fig. 233.

rette parallele AD, CE, tagliate dalle due trasversali AB ed AC, si vede che gli angoli $\widehat{ACE}$, $\widehat{AEC}$ sono rispettivamente eguali agli angoli $\widehat{DAC}$, $\widehat{BAD}$, ciascuno dei quali è la metà dell'angolo diviso dalla bisettrice, e quindi sono eguali fra loro. Perciò il triangolo AEC è isoscele, ed è $AC \equiv AE$.

Ora i due triangoli ABD, EAK sono equiangoli fra loro, perchè gli angoli $\widehat{DBA}$, $\widehat{DAB}$ dell'uno sono ordinatamente eguali agli angoli $\widehat{KAE}$, $\widehat{KEA}$ dell'altro, come corrispondenti rispetto a rette parallele, e perciò avremo (§ 260 Teor. 2°).

$$\overline{AB\,.\,AK} = \overline{BD\,.\,AE},$$

ovvero, essendo $AK \equiv DC$, $AE \equiv AC$,

$$\overline{AB\,.\,DC} = \overline{AC\,.\,BD}$$

2°. Inversamente, supponiamo che esista la equivalenza

$$\overline{AB\,.\,DC} = \overline{AC\,.\,BD}.$$

Facendo la costruzione sopra indicata si ricava facilmente

$$\overline{AB\,.\,DC} = \overline{AE\,.\,BD},$$

e confrontando questa equivalenza colla precedente si ottiene

$$\overline{AC\,.\,BD} = \overline{AE\,.\,BD},$$

e quindi $AC \equiv AE$. Allora si vede che il triangolo AEC è isoscele, perciò gli angoli alla base $\widehat{AEC}$, $\widehat{ACE}$ sono eguali fra loro. Ma gli angoli che AD forma coi due lati AB, AC del triangolo ABC sono ordinatamente eguali agli angoli alla base del triangolo AEC, e quindi sono eguali fra loro, ossia AD è bisettrice di uno degli angoli formati dalle rette AB, AC.

**269. Teorema.** — *In ogni quadrilatero, piano o gobbo, la somma dei quadrati dei quattro lati è equivalente alla somma dei quadrati delle due diagonali e di quattro volte il quadrato del segmento, che ha per estremi i punti medi delle diagonali.*

Sieno H, K i punti medi delle diagonali AC, BD del dato quadrilatero ABCD (fig. 234 e 235). I segmenti AK, CK, KH sono mediane dei

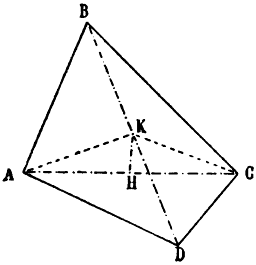



Fig. 234.

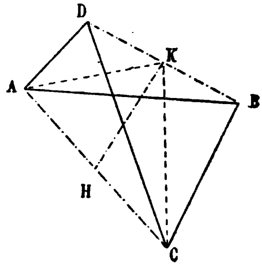



Fig. 235.

triangoli ADB, CDB, KAC rispettivamente, perciò (§ 264 Teor.) si ha

$$\overline{AB}^2 + \overline{DA}^2 = 2\,\overline{BK}^2 + 2\,\overline{AK}^2 ,$$
$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\,\overline{BK}^2 + 2\,\overline{CK}^2 ,$$
$$2\,\overline{AK}^2 + 2\,\overline{CK}^2 = 4\,\overline{AH}^2 + 4\,\overline{HK}^2$$

Sommando queste equivalenze membro a membro, si ha,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4\,\overline{BK}^2 + 4\,\overline{AH}^2 + 4\,\overline{HK}^2.$$

Essendo BD $\equiv$ 2 BK, AC $\equiv$ 2 AH, è anche

$$\overline{BD}^2 = 4\,\overline{BK}^2 , \quad \overline{AC}^2 = 4\,\overline{AH}^2 ,$$

perciò

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\,\overline{HK}^2.$$

**Corollari.** — *1°. La somma dei quadrati dei quattro lati di un parallelogrammo è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Infatti nel parallelogrammo i punti di mezzo delle diagonali coincidono, e quindi il segmento HK è nullo.

*2°. La somma dei quadrati dei dodici spigoli di un parallelepipedo è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Infatti, (fig. 236) essendo AA′C′C, BB′D′D, ABCD tre parallelogrammi, per il corollario precedente si ha:

$$\overline{AC'}^2 + \overline{A'C}^2 = 2\,\overline{AA'}^2 + 2\,\overline{AC}^2$$
$$\overline{BD'}^2 + \overline{B'D}^2 = 2\,\overline{BB'}^2 + 2\,\overline{BD}^2$$
$$2\,\overline{AC}^2 + 2\,\overline{BD}^2 = 4\,\overline{AB}^2 + 4\,\overline{AD}^2 .$$

Siccome $AA' \equiv BB'$, da queste equivalenze si ricava

$$\overline{AC'}^2 + \overline{A'C}^2 + \overline{BD'}^2 + \overline{B'D}^2 = 4\overline{AA'}^2 + 4\overline{AB}^2 + 4\overline{AD}^2.$$

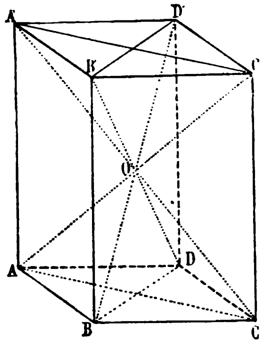


Fig. 236.

3°. *Il quadrato di una diagonale di un parallelepipedo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati dei tre spigoli concorrenti in un vertice.*

Infatti nel parallelepipedo rettangolo le diagonali sono eguali, perciò si ha

$$4\overline{AC'}^2 = 4\overline{AA'}^2 + 4\overline{AB}^2 + 4\overline{AD}^2,$$

e quindi anche

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2.$$

4°. *Il quadrato della diagonale di un cubo è equivalente al triplo di una faccia.*

**270. Teorema.** — *Se un quadrangolo convesso è inscritto in un circolo, il rettangolo delle sue diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli delle coppie di lati opposti.*

Sia ABCD (fig. 237) un quadrilatero inscritto in un circolo. Dall'angolo $D\widehat{A}B$ si stacchi una parte $D\widehat{A}E \equiv B\widehat{A}C$, e si considerino i due triangoli DAE, CAB, i quali hanno gli angoli $D\widehat{A}E, C\widehat{A}B$ eguali per costruzione, gli angoli $A\widehat{D}E, A\widehat{C}B$ eguali, perchè inscritti in uno stesso arco, e perciò hanno anche gli angoli $A\widehat{E}D$, $A\widehat{B}C$ eguali. Nel triangolo DAE il lato DA corrisponde al lato AC del triangolo CAB, il lato DE corrisponde al lato BC del triangolo CAB perciò (§ 260 Teor. 2°)

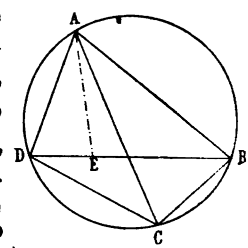


Fig. 237.

$$\overline{DA \cdot BC} = \overline{AC \cdot DE}.$$

I triangoli EAB, DAC hanno gli angoli $E\widehat{A}B, D\widehat{A}C$ eguali, perchè sono differenze di angoli eguali, essendo

$$E\widehat{A}B \equiv D\widehat{A}B - D\widehat{A}E, \qquad D\widehat{A}C \equiv D\widehat{A}B - C\widehat{A}B;$$

inoltre hanno gli angoli $A\widehat{B}D, A\widehat{C}D$ eguali, perchè inscritti nello stesso arco, perciò hanno eguali anche gli angoli $A\widehat{E}B, A\widehat{D}C$.

Nel triangolo EAB il lato AB corrisponde al lato AC del triangolo ADC, il lato EB corrisponde al lato CD del triangolo ADC, perciò (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{AB \cdot CD} = \overline{AC \cdot EB}.$$

Dalle equivalenze ottenute si ricava:

$$\overline{DA \cdot BC} + \overline{AB \cdot CD} = \overline{AC \cdot DE} + \overline{AC \cdot EB},$$

ossia, essendo DE + EB ≡ DB,

$$\overline{DA}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD} = \overline{AC}.\overline{BD},$$

Questo teorema è conosciuto col nome di Teorema di Tolomeo.

## 3. — ALCUNI PROBLEMI.

**271.** Come applicazione delle proprietà dimostrate sull'equivalenza dei poligoni, risolviamo alcuni problemi importanti.

**Problema.** — *Costruire un quadrato equivalente ad un dato rettangolo.*

1ª **Risoluzione.** — Presi due segmenti adiacenti AB, BC (fig. 238) eguali ai lati del dato rettangolo, si descriva un semicircolo, che abbia per diametro il segmento AC. Se $H_1$ è il punto d'incontro di questo semicircolo colla retta perpendicolare ad AC condotta per B, il segmento $BH_1$, è il lato del quadrato richiesto. Infatti l'angolo $AH_1C$ è retto, perchè inscritto in una semicirconferenza, e perciò il quadrato dell'altezza $H_1B$ del triangolo rettangolo $AH_1C$ è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa (§ 261 Teor.), cioè al rettangolo dato.

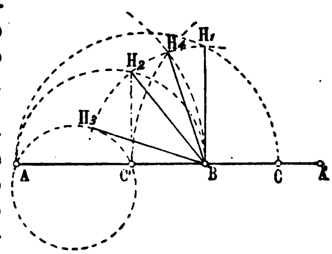


Fig. 238.

2ª **Risoluzione.** — Si descriva un semicircolo che abbia per diametro uno dei due lati maggiori AB del rettangolo; e su questo lato si prenda un segmento BC′ eguale al lato minore BC. Se $H_2$ è il punto in cui il semicircolo suddetto è incontrato dalla perpendicolare ad AB, condotta per il punto C′, $BH_2$ è il lato del quadrato richiesto. Infatti l'angolo $AH_2B$ è retto, perchè inscritto in una semicirconferenza, e perciò il quadrato dal cateto $BH_2$ del triangolo rettangolo $AH_2B$ è equivalente al rettangolo dell'ipotenusa e della proiezione di quel cateto sull'ipotenusa (§ 261 Teor.), cioè al rettangolo dato.

3ª **Risoluzione.** — Sul lato maggiore AB del dato rettangolo si prenda una parte BC′ eguale al lato minore BC, e si descriva un circolo che passi per i punti A, C′. Il segmento $BH_3$, condotto dal punto B tangente a questo circolo è il lato del quadrato richiesto (§ 265 Teor. 2°).

4ª **Risoluzione.** — Sopra un segmento AB eguale al lato maggiore del rettangolo si prenda una parte BC′ eguale al lato minore; indi sulla retta AB, a partire da C′ e dalla parte opposta del punto A, si prenda un segmento C′A′ eguale ad AB. Si descrivano due circoli con raggio AB, che abbiano per centri i due punti A, A′. Essi si devono incontrare in due punti (§ 188 Teor.) Se $H_4$ è uno di questi punti, il segmento $BH_4$ è il lato del quadrato richiesto.

Infatti è facile vedere che, se si tracciassero le rette $AH_4$, $H_4C'$, si otterrebbero due triangoli isosceli $ABH_4$, $H_4BC'$ i quali hanno l'angolo $\widehat{ABH_4}$ comune, e perciò sono equiangoli fra loro. Per il teorema 2° del § 260 se ne ricava immediatamente

$$\overline{BH_4}^2 = \overline{AB}.\overline{BC'}.$$

È da notarsi che l'ultima costruzione indicata è quella che si eseguisce più speditamente.

**Corollario.** — *È sempre possibile trasformare un poligono, non intrecciato, in un quadrato equivalente.*

Infatti abbiamo già visto (§ 255 Prob. 2°) che è possibile costruire un rettangolo equivalente ad un dato poligono. Costruendo poi un quadrato equivalente al rettangolo ottenuto, esso risulterà equivalente anche al dato poligono.

**272. Problema.** — *Costruire un quadrato equivalente alla somma, o alla differenza, di altri quadrati.*

Se si costruisce un triangolo rettangolo, che abbia per cateti i lati dei due quadrati dati, il quadrato costruito sull'ipotenusa sarà equivalente alla somma di quadrati dati (§ 262 Teor.)

Ripetendo più volte la costruzione sopra indicata, potremo costruire un quadrato equivalente alla somma di più quadrati dati.

Se invece, dati due quadrati disuguali, si costruisce un triangolo rettangolo, che abbia per ipotenusa il lato del maggiore, e che abbia un cateto eguale al lato del minore, il quadrato dell'altro cateto è equivalente alla differenza dei quadrati dati.

**273. Problema** *1°*. — *Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, tale che la somma di due lati consecutivi sia eguale ad un segmento dato.*

Descriviamo un circolo che abbia per diametro il segmento AB (fig. 239), al quale deve essere eguale la somma di due lati consecutivi del rettangolo, e conduciamo una retta DE, parallela ad AB ad una distanza da essa eguale al lato del quadrato dato. Se D è un punto comune a questa retta ed al circolo suddetto, la retta CD, condotta per esso perpendicolare alla AB, divide il segmento AB in due parti AC, CB il cui rettangolo è equivalente al quadrato dato.

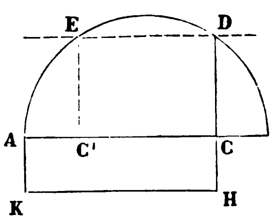



Fig. 239.

Infatti l'angolo $\widehat{ADB}$ essendo retto, perchè inscritto in un mezzo circolo, si ha (§ 261 Teor.)

$$\overline{AC . CB} = \overline{CD}^2 .$$

Se il lato del quadrato dato è maggiore della metà di AB, la ED non incontra il circolo, ed il problema è impossibile. Se il lato del quadrato dato è eguale, o minore, della metà di AB, la retta ED è tangente, o segante, del circolo ed il problema ammette una soluzione.

**Problema** *2°*. — *Costruire un rettangolo equivalente ad un dato quadrato, in modo che la differenza di due lati consecutivi sia eguale ad un dato segmento.*

Si descriva un circolo che abbia per diametro il segmento, al quale deve essere eguale la differenza dei lati del rettangolo richiesto (fig. 240); e sopra una tangente di questo circolo si prenda, a partire dal punto di contatto, un segmento DC eguale al lato del quadrato dato, e si tracci la retta individuata dal punto C e dal centro del circolo. Il rettangolo che ha per lati CA, CB è quello richiesto.

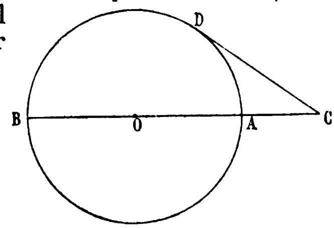


Fig. 240.

Infatti si ha

$$CB - CA \equiv AB,$$

e (§ 265 Teor. 2°)

$$\overline{CD}^2 = \overline{CA \, . \, CB}.$$

**274. Definizione.** — Se un segmento è diviso in due parti, in modo che il quadrato della parte maggiore sia equivalente al rettangolo di tutto il segmento e dall'altra parte, si dice che esso è diviso in *sezione aurea,* e la parte maggiore dicesi la *parte aurea* del segmento.

**Problema.** — *Dividere un segmento in sezione aurea.*

Sia AB il segmento dato (fig. 241). Con raggio OB perpendicolare ad AB ed eguale alla sua metà si descriva il circolo di centro O, il quale taglierà la retta AO nei punti D ed E, e sarà tangente ad AB nel punto B. Essendo $AD \equiv AO - OB < AB$, si porti su AB, a partire da A, un segmento $AC \equiv AD$; il punto C dividerà AB in sezione aurea.

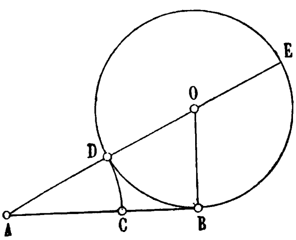


Fig. 241.

Infatti per il teorema 2° del § 265 abbiamo

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE \, . \, AD},$$

ed essendo $AD \equiv AC$ e $AE \equiv AD + DE \equiv AC + AB$, se ne deduce

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC\,(AC + AB)},$$

ovvero

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AC \, . \, AB},$$

ed anche

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC \, . \, AB} = \overline{AC}^2 .$$

Ma la differenza di due rettangoli, che hanno un lato eguale, è equivalente al rettangolo costruito con quel lato e con la differenza degli altri due, dunque si ha:

$$\overline{AB \, . \, CB} = \overline{AC}^2 .$$

**Corollario.** — *Il lato del decagono regolare inscritto in un circolo è eguale alla parte aurea del raggio.*

Infatti, se AB (fig. 242) è un lato del decagono regolare inscritto in un circolo, OA ed OB i raggi che terminano ai punti A e B, sappiamo che l'angolo $A\widehat{O}B$ è $\frac{1}{5}$ di angolo piatto e gli altri $O\widehat{A}B$, $O\widehat{B}A$ sono ciascuno $\frac{2}{5}$ di angolo piatto. Condotta la bisettrice AC di uno di questi angoli, gli angoli risultanti $O\widehat{A}C$, $C\widehat{A}B$ sono ciascuno $\frac{1}{5}$ di angolo piatto, di guisa che i due triangoli AOC, CAB sono isosceli, ed è $OC \equiv AC \equiv AB$; allora i due triangoli OAB, ABC sono equiangoli fra loro, e per conseguenza si ha (§ 260 Teor. 2°)

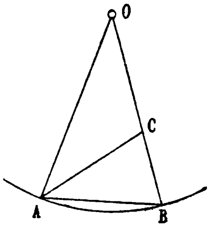


Fig. 242.

$$\overline{AB^2} = \overline{OB \cdot BC}.$$

Dunque $AB \equiv OC$ è la parte aurea del raggio.

## 4. — EQUIVALENZA DI ALCUNE SUPERFICIE POLIEDRICHE.

**275. Teorema** *1°*. — *La superficie laterale di un prisma è equivalente al rettangolo del perimetro di una sezione normale e di uno spigolo laterale.*

Abbiasi il prisma ABCDEA′B′C′D′E′ (fig. 243) e sia A″B″C″D″E″ una sua sezione normale. Poichè ogni parallelogrammo è equivalente ad un rettangolo di egual base e di eguale altezza si ha:

$$AA'B'B = \overline{AA' \cdot A''B''}$$

$$BB'C'C = \overline{BB' \cdot B''C''}$$

$$CC'D'D = \overline{CC' \cdot C''D''}$$

$$DD'E'E = \overline{DD' \cdot D''E''}$$

$$EE'A'A = \overline{EE' \cdot E''A''};$$

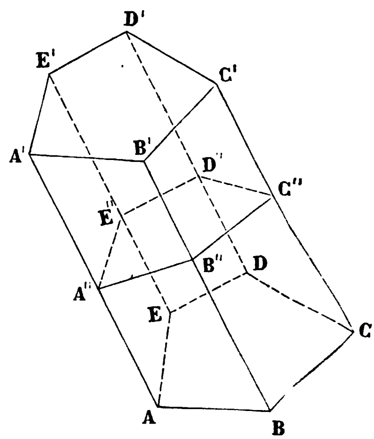


Fig. 243.

indicando con S la somma delle faccie laterali, dalle equivalenze precedenti a causa della eguaglianza degli spigoli laterali del prisma, si ottiene

$$S = \overline{AA' \cdot (A''B'' + B''C'' + C''D'' + D''E'' + E''A'')}.$$

**Corollario** *1°*. — *La superficie laterale di un prisma retto è equivalente al rettangolo del perimetro di una base e dell'altezza del prisma.*

**Teorema 2°.** — *La superficie laterale di un tronco di prisma è equivalente alla somma dei rettangoli di ciascun lato di una sezione normale e della somisomma dei due spigoli laterali, che comprendono questo lato.*

Infatti, ogni faccia laterale del tronco di prisma è un trapezio, che ha per altezza un lato della sezione normale; cosicchè ciascuna faccia laterale è equivalente al rettangolo della semisomma dei due spigoli laterali, che la comprendono, e del lato della sezione normale, che termina ad essi. La somma di tutti questi rettangoli è la superficie laterale richiesta.

**Corollario 2°.** — *La superficie laterale di un tronco di prisma regolare è equivalente al rettangolo di un lato della base e della somma degli spigoli laterali.*

**276. Teoremi.** — *1°. La superficie laterale di una piramide regolare è equivalente al rettangolo dell'apotema e del semiperimetro della base.*

Sia VABCDE (fig. 244) la piramide regolare data, e VH l'apotema sappiamo che

$$AVB = \frac{1}{2}\overline{AB \,.\, VH}$$

$$BVC = \frac{1}{2}\overline{BC \,.\, VH}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

perciò, indicando con S la somma delle facce laterali della piramide, si ottiene:

$$S = \frac{1}{2}\overline{(AB + BC + \ldots + EA) \,.\, VH.}$$

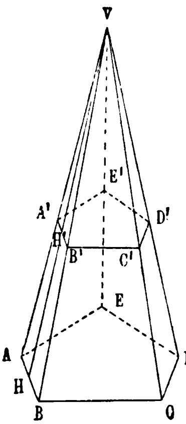


Fig. 244.

*2°. La superficie laterale di un tronco di piramide regolare a basi parallele è equivalente al rettangolo dell'apotema del tronco e della semisomma dei perimetri delle basi.*

Infatti, ogni faccia del tronco di piramide regolare a basi parallele è un trapezio, che ha per basi due lati delle basi dal tronco e per altezza l'apotema, cosicchè ciascuna faccia laterale è equivalente al rettangolo dell'apotema e della semisomma dei due lati delle basi contenuti in essa. La superficie laterale del tronco è la somma di tutti questi rettangoli della stessa serie, e quindi è equivalente al rettangolo della stessa serie, che ha per altro lato la semisomma dei perimetri delle basi del tronco.

**Corollario.** — *La superficie laterale di una piramide regolare, o di un tronco di piramide regolare a basi parallele, è equivalente al rettangolo dell'apotema e del perimetro della sezione media.*

**277. Teorema.** — *Se due prismi retti hanno per basi due triangoli equiangoli fra loro, e due loro facce laterali corrispondenti sono equivalenti, sono pure equivalenti le altre coppie di facce laterali corrispondenti.*

Sieno ABCA'B'C', $ADEA_1D'E'$ (fig. 245) due prismi retti, che abbiano per basi due triangoli ABC, ADE equiangoli, e sieno equivalenti le facce ABB'A', $ADD'A_1$. Voglio dimostrare che anche due altre facce corrispondenti, per es. ACC'A', $AEE'A_1$ sono equivalenti.

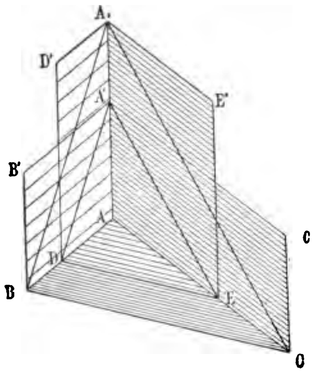


Fig. 245.

Disponiamo infatti i due prismi in modo che le basi ABC, ADE sieno sullo stesso piano, che i due prismi si trovino da una stessa parte di questo piano, e che l'angolo $B\widehat{A}C$ coincida col suo eguale $D\widehat{A}E$ coincidendo le due semirette AB, AD e le due AC, AE. Allora il lato BC risulta parallelo al lato DE, e lo spigolo $AA_1$ si dispone sulla semiretta AA'.

I due triangoli $ABA_1$, ADA' hanno l'angolo $\widehat{A}$ in comune, e il rettangolo di AD e $AA_1$ è equivalente al rettangolo di AB e AA', perciò essi sono equiangoli fra loro (§ 260 Teor. 1°), e la DA' è parallela alla $BA_1$. Ne segue che i due piani A'DE, $A_1BC$, individuati da due coppie di rette rispettivamente parallele sono paralleli (§ 48 Cor. 2°) e tagliano il piano $A_1AC$ secondo due rette A'E, $A_1C$ parallele (§ 46 Teor.). Perciò i triangoli $AA_1C$, AA'E sono equiangoli fra loro, ed il rettangolo $\overline{AC\,.\,AA'}$ è equivalente al rettangolo $\overline{AE\,.\,AA_1}$.

**Corollari.** — *1°. Se due settori prismatici regolari, compresi in diedri all'asse eguali, hanno un egual numero di facce laterali, e sono equivalenti i due rettangoli, ciascuno dei quali ha per lati opposti l'asse e uno spigolo laterale di uno dei due settori, oppure quelli, ciascuno dei quali, ha per lati opposti l'asse e la mediana di una faccia laterale, le superficie laterali dei due settori prismatici sono equivalenti.*

*2°. Se due prismi regolari hanno un egual numero di facce laterali, e sono equivalenti i due rettangoli, ciascuno dei quali ha per lati opposti l'asse ed uno spigolo laterale di uno dei due prismi, oppure quelli, ciascuno dei quali ha per lati opposti l'asse e la mediana di una faccia laterale, le superficie laterali dei due prismi sono equivalenti.*

**278. Teorema.** — *Se due piani paralleli ai piani delle basi di due piramidi, aventi basi equivalenti ed altezze eguali, condotti a distanze eguali dal vertice, tagliano le superficie laterali delle medesime, le sezioni prodotte da essi sono poligoni equivalenti.*

Scomposte le due basi in poligoni eguali, si potranno scomporre le piramidi in altre, che abbiano per basi i poligoni in cui sono state divise le basi delle piramidi date, e per vertici i vertici delle medesime. Le sezioni prodotte nelle due piramidi da piani paralleli ai piani delle basi e ad eguale distanza da essi sono così scomposte in parti rispettivamente eguali (§ 143 Teor.), e quindi sono equivalenti.

# CAPITOLO III

## Equivalenza di poligoni sferici e piramidi sferiche.

**279. Teorema.** — *Due poligoni sferici opposti, non intrecciati, sono equivalenti.*

1°. Sieno ABC, A′B′C′ (fig. 246) due triangoli sferici opposti, sia P il centro del circolo inscritto al triangolo ABC, e D, E, F i punti di contatto di questo circolo coi tre lati. I punti P′, D′, E′, F′, rispettivamente opposti a P, D, E, F, saranno rispettivamente il centro del circolo inscritto al triangolo A′B′C′ e i punti di contatto di questo coi lati del triangolo. Gli archi di circolo massimo PD, PE, PF sono eguali, come raggi sferici di un circolo minore, e le coppie di archi AE, AF; BF, BD; CD, CE sono eguali, come archi tangenti condotti da un punto ad un circolo; perciò i sei triangoli PDF, PDE, PEF, AEF, BFD, CDE sono isosceli, e quindi eguali ai loro opposti. Ne segue che i due triangoli ABC, A′B′C′, essendo scomposti in parti rispettivamente eguali sono equivalenti.

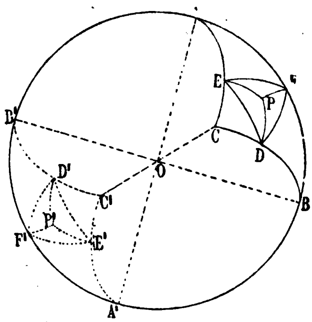


Fig. 246.

2°. Ogni poligono sferico si può scomporre in triangoli sferici. Infatti, se il poligono sferico è convesso, esso resta scomposto in triangoli sferici dagli archi di circoli massimi, che hanno per estremi un punto interno ad esso ed i suoi vertici rispettivamente. Se il poligono è concavo, i prolungamenti dei suoi lati lo scompongono in poligoni convessi che possono suddividersi in triangoli.

Ora, dati due poligoni sferici opposti, e scomposto l'uno in triangoli, è facile vedere che si può scomporre l'altro nei triangoli rispettivamente opposti ai precedenti, che sono equivalenti ai medesimi. Ne segue che i due poligoni, somme di grandezze equivalenti, sono equivalenti.

**Corollario.** — *Due poligoni sferici, non intrecciati, ciascuno dei quali sia eguale all'opposto al vertice dell'altro, sono equivalenti.*

**280. Teoremi.** — *1°. Se due poligoni sferici sono equivalenti, i loro eccessi sferici sono eguali.*

Due poligoni sferici equivalenti si possono scomporre in parti rispettivamente eguali; e perciò i loro eccessi sferici sono eguali, perchè ambedue non sono altro che la somma degli eccessi sferici delle medesime parti; (§ 221 Teor. 2°) e questa somma è sempre lo stesso angolo sferico, qualunque sia l'ordine col quale sono riuniti gli eccessi sferici

delle singole parti, perchè gli angoli sferici appartenenti ad una data superficie sferica costituiscono una classe di grandezze di prima specie.

2°. *Se due poligoni sferici P, P′ sono scomposti in parti, in modo che P contenga parti eguali a tutte quelle di P′ insieme ad altre, l'eccesso sferico di P è maggiore di quello di P′.*

3°. *Se due poligoni sferici si possono scomporre in parti rispettivamente eguali, non è possibile trovare un'altra scomposizione, per la quale uno di essi contenga tutte le parti dell'altro, insieme ad altre parti; e viceversa.*

Sieno P, P′ due poligoni sferici, e supponiamo che esista una scomposizione, per la quale P sia equivalente a P′, ed un'altra scomposizione, per la quale P contenga tutte le parti di P′ insieme ad altre. Allora l'eccesso sferico di P dovrebbe essere contemporaneamente eguale e maggiore di quello di P′; e ciò è assurdo.

**281. Teorema.** — *Dato un triangolo sferico ABC, ed il suo opposto A′B′C′* (fig. 247), *e condotti i circoli minori* $c_1$, $c_2$, *che passano l'uno per i punti A, B, C′, l'altro per i punti A′, B′, C, ed il circolo massimo* c *situato in un piano parallelo a quelli dei circoli* $c_1$, $c_2$, *ed equidistante da essi, l'eccesso sferico del triangolo ABC è eguale all'angolo sferico, che ha per vertici A, A′, per un lato il semicircolo massimo ABA′, e che stacca sul circolo* c *un arco doppio di quello MN staccato sullo stesso circolo dall'angolo sferico ACB.*

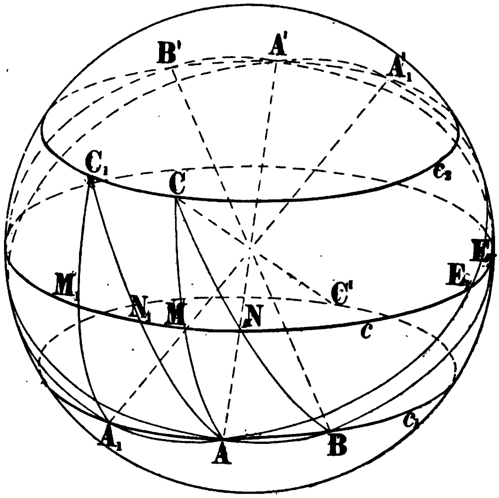



Fig. 247.

Se facciamo rotare la sfera attorno al diametro perpendicolare ai piani dei circoli $c_1, c_2, c$, finchè il punto B, scorrendo sul circolo $c_1$, prenda la posizione A, il punto A prende una posizione $A_1$ sul circolo $c_1$, e C e A′ prendono delle posizioni $C_1$ e $A'_1$ sul circolo $c_2$, in modo che gli archi BA, $AA_1$, $CC_1$, $A'A'_1$, appartenenti ai circoli $c_1$ o $c_2$, sono eguali; il semicircolo massimo ABA′ prende la posizione $A_1AA'_1$ in modo che l'arco $EE_1$ del circolo massimo $c$ compreso fra questi due semicircoli massimi (cioè l'arco percorso dal punto E) sia eguale all'arco $NN_1$ dello stesso circolo $c$, compreso fra gli archi di circolo massimo BC, $AC_1$ (cioè all'arco percorso dal punto N.

Conducendo anche l'arco di circolo massimo $CC_1$, si vede facilmente che il triangolo ABC si può sovrapporre al triangolo $CC_1A$, e per conseguenza l'arco MN si può sovrapporre all'arco $MN_1$. Ne segue che $EE_1$ eguale ad $NN_1$ è il doppio dell'arco MN. Inoltre si ha

$$B\widehat{C}A \equiv C\widehat{A}C_1, \quad A\widehat{B}C \equiv A_1\widehat{A}C_1,$$

e perciò l'angolo sferico, che ha per lati i semicircoli massimi $AEA'$, $AE_1A'$, è eguale alla somma degli angoli sferici del triangolo $ABC$, diminuita di un angolo sferico piatto, cioè è eguale all'eccesso sferico di questo triangolo.

**282. Teorema.** — *Se* $c_1$, $c_2$ *sono due circoli minori eguali di una sfera, situati in piani paralleli ed equidistanti da quello di un circolo massimo* $c$, *tutti i triangoli sferici, che hanno due vertici comuni sul circolo* $c_1$ *ed il terzo vertice in un punto qualunque del circolo* $c_2$, *sono equivalenti.*

Siano $ABC$, $ABC_1$ due triangoli sferici, che abbiano due vertici $A$, $B$ comuni sul circolo $c_1$ e i vertici $C$, $C_1$ rimanenti sul circolo $c_2$. Possono darsi tre casi, secondo che l'arco del circolo $c_2$ limitato dai due punti $C$, $C_1$ è minore, eguale o maggiore dell'arco del circolo $c_1$ limitato dai punti $A$, $B$.

1°. Sia (fig. 248) l'arco $CC_1 < AB$, e siano $M$, $N$, $M_1$, $N_1$ i punti di incontro del circolo $c$ coi lati $AC$, $BC$, $AC_1$, $BC_1$, dei due triangoli, ossia i punti di mezzo di questi archi. Facciamo rotare la sfera attorno al diametro perpendicolare al piano del circolo $c$, finchè il punto $C$ prenda la posizione $C_1$; allora l'arco $CM$ prende la posizione $C_1P$ interna all'angolo $ACB$. Facciamo poi rotare la sfera attorno allo stesso diametro, finchè il punto $C_1$ prenda la posizione $C$; allora l'arco $C_1N_1$ prende la posizione $CQ$ interna all'angolo $ACB$. Coll'uno o coll'altro di questi movimenti, i due triangoli $CMQ$, $C_1PN_1$ si portano a coincidere, e perciò sono eguali.

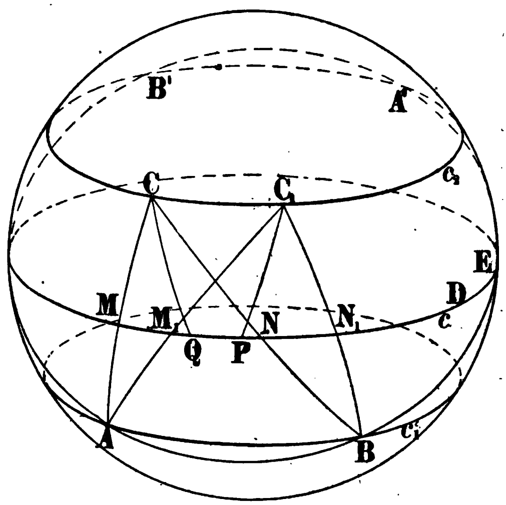



Fig. 248.

È facile allora vedere che si ha

$$C_1P \equiv CM \equiv MA,\quad C_1M_1 \equiv M_1A,\quad M_1P \equiv MM_1,$$
$$CQ \equiv C_1N_1 \equiv N_1B,\quad CN \equiv NB,\quad QN \equiv NN_1,$$

e per conseguenza

$$MN \equiv M_1N_1.$$

Ne segue

$$CQN \equiv BN_1N$$
$$AMM_1 \equiv C_1PM_1.$$

Inoltre si ha

$$CMQ \equiv C_1PN_1$$
$$AM_1NB \equiv AM_1NB.$$

Sommando queste quattro eguaglianze, si trova

$$ABC = ABC_1.$$

2°. Se l'arco $CC_1 \equiv AB$, è facile vedere che i due lati $BC, AC_1$ si tagliano per metà in un punto N del circolo $\epsilon$, e che i due triangoli $ANC, C_1NB$ sono eguali. Ne segue che i due triangoli $ABC, ABC_1$, che si ottengono sommando il triangolo ANB con quei due triangoli rispettivamente, sono equivalenti.

3°. Se l'arco $CC_1 > BA$, si riporti sull'arco $CC_1$ l'arco AB tante volte quante è possibile. Se $D_1, D_2, \ldots D_n$ sono gli estremi di questi archi, in modo che sia

$$AB \equiv CD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}D_n \overset{\equiv}{>} D_n C_1,$$

per i due casi precedenti si ha

$$ABC = ABD_1 = ABD_2 = \ldots = ABD_n = ABC_1,$$

e quindi

$$ABC = ABC_1.$$

Si osservi che gli archi $MN, M_1N_1$ del cicolo $c$ interni agli angoli $ACB, AC_1B$ sono eguali in tutti i tre casi; viceversa è facile vedere che, se sul circolo $c$ si prende un arco $M_1N_1 \equiv MN$ (supponendo dato il triangolo ABC), i due archi $AM_1, BN_1$ s'incontrano in un punto $C_1$ del circolo $c_2$, e il triangolo $ABC_1$ è equivalente al triangolo ABC.

Supponendo che il triangolo ABC resti fisso, e che il vertice $C_1$ dell'altro triangolo $ABC_1$ prenda la posizione del punto $A'$ opposto ad A, questo triangolo si riduce all'angolo sferico che ha per vertici i punti $A, A'$, che ha per lato il semicircolo $ABA'$, e che stacca sul circolo $c$ un arco eguale ad MN, ossia esso si riduce alla metà dello eccesso sferico del triangolo ABC (§ 281 Teor.). Dunque il triangolo ABC è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.

**Corollari.** — *1°. Ogni triangolo sferico è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.*

*2°. Ogni poligono sferico è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.*

**283. Teorema.** — *Dati due poligoni sferici P e P', è sempre possibile scomporli in un numero* finito *di parti; in modo che le parti di P sieno rispettivamente eguali a quelle di P', oppure in modo che P contenga le parti di P' insieme ad altre, oppure in modo che P' contenga le parti di P insieme ad altre. Quando si verifica uno di questi casi, non è possibile che esista un'altra scomposizione per la quale si verifichi uno degli altri due.*

Costruiti gli eccessi sferici $\varepsilon, \varepsilon'$ dei due poligoni $P, P'$, si dovrà dare uno ed uno solo dei seguenti casi: $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, $\varepsilon > \varepsilon'$, $\varepsilon < \varepsilon'$, poichè la classe di grandezza formata dagli angoli sferici è di prima specie.

Se $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, eseguendo contemporaneamente la scomposizione, per la quale l'angolo sferico $\varepsilon$ si divide in un numero *finito* di parti rispettivamente eguali a quelle del poligono P, e quella per la quale la stessa $\varepsilon$ si divide in un numero *finito* di parti eguali a quelle del poligono P', otterremo una terza scomposizione di $\varepsilon$ in parti, che sono le parti provenienti da ciascuna delle due scomposizioni suddette, suddivise mediante l'altra scomposizione. Riportando queste suddivisioni sulle parti del poligono P e su quelle del poligono P', questi restano scomposti in parti rispettivamente eguali, e perciò sono equivalenti.

Collo stesso ragionamento si dimostra che, se è $\varepsilon > \varepsilon'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti (in numero *finito*), in modo che in P si trovino tutte le parti di P' insieme ad altre; e se è $\varepsilon < \varepsilon'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti (in numero *finito*) in modo che in P' si trovino tutte le parti di P insieme ad altre.

La seconda parte del teorema è conseguenza immediata dei teoremi 1° e 2° del § 280.

**284. Teorema.** — *Tutti i poligoni sferici, non intrecciati, appartenenti ad una stessa superficie sferica, o a superficie sferiche eguali, costituiscono una classe di grandezze di 2ª specie.*

Dati infatti due o più poligoni sferici non intrecciati, appartenenti ad una stessa superficie sferica o a superficie sferiche eguali, possiamo per mezzo dei teoremi precedenti costruire altrettanti angoli sferici rispettivamente equivalenti ai poligoni sferici dati. Tutti gli angoli sferici, così ottenuti, appartengono ad una classe di grandezze di prima specie, e perciò di due fra i poligoni considerati l'uno è sempre maggiore, o equivalente, o minore dell'altro, e di due o più di essi esiste sempre la somma.

Si noti che, eseguendo tutte le costruzioni, si potrebbero sempre scomporre due poligoni sferici, appartenenti ad una stessa superficie sferica, o a superficie sferiche eguali, in parti rispettivamente eguali, se essi sono equivalenti, oppure si potrebbero scomporre ambedue in parti, in modo che l'uno contenga tutte le parti dell'altro insieme ad altre, se essi non sono equivalenti.

**Corollario.** — *Si può sempre dividere un poligono sferico non intrecciato in 2, 4, 8, 16.... parti equivalenti.*

Infatti si può sempre trasformare un poligono sferico non intrecciato in un angolo sferico equivalente, e poi dividere questo in 2, 4, 8, 16.... parti eguali.

**285.** Se estendiamo alle piramidi sferiche tutte le definizioni date nel Cap. III del Libro III per i poligoni sferici, è facile vedere che valgono per esse teoremi analoghi ai precedenti, e che si dimostrano nello stesso modo. Perciò noi ci limiteremo qui ad enunciare i principali, ricordando prima di tutto che per *eccesso sferico di una piramide sferica convessa* si deve intendere la differenza tra la somma dei suoi $n$ spicchi sferici e $(n-2)$ semisfere.

**Teoremi.** — *1°. Due piramidi sferiche, non intrecciate, opposte sono equivalenti.*

*2°. Ogni piramide sferica convessa è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.*

*3°. Tutte le piramidi sferiche non intrecciate, appartenenti ad una stessa sfera o a sfere eguali, costituiscono una classe di grandezze di 2ª specie.*

*4°. È possibile dividere una piramide sferica, non intrecciata, in 2, 4, 8, 16.... parti equivalenti.*

# CAPITOLO IV

## Equivalenza dei prismi.

**286. Definizioni.** — 1ª. Chiameremo *parallelepide di tre segmenti* AB, CD, EF il parallelepipedo rettangolo, che ha i suoi spigoli eguali ai detti segmenti, e l'indicheremo colla scrittura $\overline{AB \,.\, CD \,.\, EF}$.

2ª. Chiameremo *cubo di un segmento* AB, il cubo che ha tutti i suoi spigoli eguali ad AB, e l'indicheremo colla scrittura $\overline{AB}^3$.

**Teorema.** — *Due prismi retti, che hanno le basi equivalenti e le altezze eguali, sono equivalenti.*

Sieno P, P′ (fig. 249) due prismi, aventi la medesima altezza $h$ e le basi equivalenti. Queste basi, essendo equivalenti, si potranno scomporre in un egual numero di poligoni rispettivamente eguali. È facile vedere

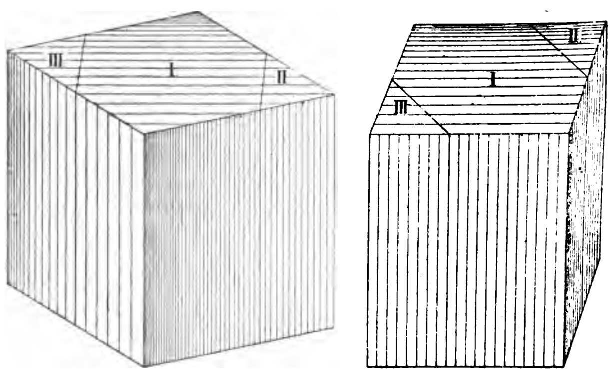



Fig. 249.

allora che tanto il prisma P quanto il prisma P′ si possono scomporre nei prismi retti, che hanno l'altezza $h$ e per basi i poligoni, nei quali sono state scomposte le basi, e perciò essi sono equivalenti.

**287. Teorema.** — *Due prismi, che hanno le sezioni normali e gli spigoli laterali eguali, sono equivalenti.*

1°. Sieno ABC A′B′C′, $A_1B_1C_1\ A'_1B'_1C'_1$ due prismi triangolari, aventi le sezioni normali e gli spigoli laterali eguali. Essendo eguali le sezioni normali dei due prismi, potremo portare a coincidere i prismi indefiniti, ai quali appartengono le superficie laterali dei due prismi dati. Facendo scorrere poi uno di essi lungo gli spigoli del prisma indefinito, potremo fare in modo che uno spigolo $A_1A'_1$ venga a coincidere con il suo corri-

spondente. Supponiamo che, quando ciò sia avvenuto, anche lo spigolo $B_1B_1'$ sia venuto a coincidere con lo spigolo corrispondente $BB'$.

Possono allora presentarsi quattro casi, cioè anche lo spigolo $C_1C'_1$ può coincidere con $CC'$; oppure uno degli estremi, per es. $C_1$ di $C_1C'_1$ può essere interno al segmento $CC'$ (fig. 250); oppure il punto $C_1$ può coincidere con $C'$; oppure i due segmenti $CC'$, $C_1C'_1$ possono non avere alcun punto in comune (fig. 251).

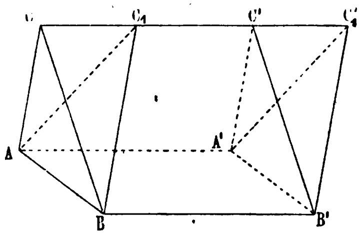


Fig. 250.

Nel primo caso i due prismi sono eguali, e perciò anche equivalenti. Nel secondo e nel terzo caso i due tetraedri $ABCC_1$, $A'B'C'C'_1$ sono eguali, perchè, se si fa scorrere il secondo, in modo che il piano $BB'CC'$ scorra su se stesso lungo la retta $CC'$, finchè $C'$ venga in $C$, esso viene a coincidere col primo. Ne segue che i due prismi, somme del tronco di prisma $ABC_1$ $A'B'C'$ coi due tetraedri suddetti rispettivamente, sono equivalenti.

Nel quarto caso finalmente (fig. 251) i due piani $ABC_1$, $A'B'C'$ si tagliano secondo una retta $D'_1E'_1$ parallela alle rette $AB$, $A'B'$, e il punto $D'_1$, intersezione delle rette $AC_1$, $A'C'$, è interno ai due segmenti $AC_1$, $A'C'$. Allora il segmento $AC_1$ sarà eguale ad un multiplo di $AD'_1$, oppure ad un suo multiplo aumentato di un segmento minore di $AD'_1$. Supponiamo per

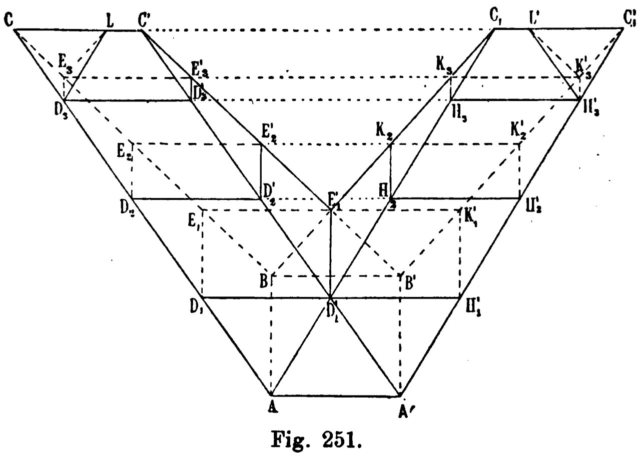


Fig. 251.

esempio che $AC_1$ sia eguale al triplo di $AD'_1$ aumentata di un segmento minore di $AD'_1$, e sia $AD'_1 \equiv D'_1H_2 \equiv H_2H_3$ e $H_3C_1 < AD'_1$.

Per i punti $H_2$, $H_3$ si conducano dei piani paralleli al piano $ABB'A'$. Il prisma $ABCA'B'C'$ resta allora scomposto nei prismi $ABE_1D_1$ $A'B'E'_1D'_1$, $D_1E_1E_2D_2$ $D'_1E'_1E'_2D'_2$, $D_2E_2E_3D_3$ $D'_2E'_3E'_3D'_3$ $D_3E_3C$ $D'_3E'_3C'$, e il prisma $ABC_1$ $A'B'C'_1$ resta scomposto nei prismi $ABE'_1$ $D'_1A'B'K'_1H'_1$, $D'_1E'_1K_2$ $H_2H'_1K'_1K'_2H'_2$, $H_2K_2K_3H_3H'_2K'_2K'_3H'_3$, $H_2K_3C_1$ $H'_3K'_3C'$, e le parti del primo sono equivalenti a quelle del secondo. Infatti i due poliedri

$$AD_1D'_1BE_1E'_1.\quad A'D'_1H'_1B'E'_1K'_1$$

sono eguali, perchè si possono portare a coincidere, facendo scorrere l'uno di essi, in modo che il piano $D'_1H'_1K'_1E'_1$ scorra su se stesso lungo la retta $D'_1H'_1$. Perciò i due prismi $ABE_1D_1A'B'E'_1D'_1$, $ABE'_1D'_1A'B'K'_1H'_1$ che sono somme dei due poliedri suddetti col poliedro $AA'D'_1BB'E'_1$, sono equivalenti. In simil guisa si dimostra l'equivalenza delle altre parti corrispondenti dei due prismi dati, e perciò essi sono equivalenti.

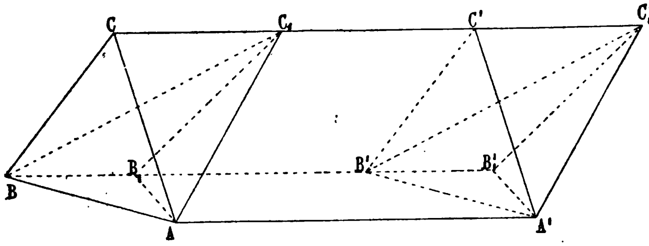



Fig. 252.

Supponiamo ora (fig. 252) che quando $A_1A'_1$ coincide con $AA'$ il segmento $B_1B'_1$ non coincida con $BB'$. Consideriamo allora insieme ai due prismi dati anche quello, che ha per basi $ABC_1$, $A'B'C'_1$.

Per le dimostrazioni precedenti si ha

$$ABCA'B'C' = ABC_1A'B'C'_1$$
$$ABC_1A'B'C'_1 = AB_1C_1A'B'_1C'_1,$$

e quindi

$$ABCA'B'C' = AB_1C_1A'B'_1C'_1.$$

2°. Passando ora a considerare due prismi poligonali, aventi le sezioni normali eguali e gli spigoli laterali eguali, è chiaro che si possono scomporre in un egual numero di prismi triangolari equivalenti, che hanno gli spigoli laterali eguali e le sezioni normali (che sono i triangoli nei quali si possono scomporre le sezioni normali dei due prismi dati) pure eguali; perciò i due prismi sono equivalenti.

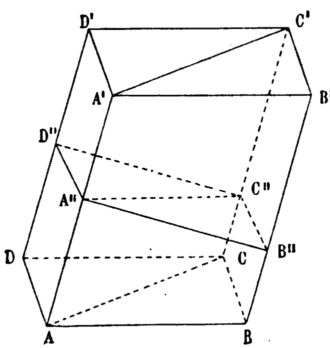



Fig. 253.

**Corollari.** — *1°. Ogni prisma obliquo è equivalente ad un prisma retto, che ha per base la sezione normale e per altezza uno degli spigoli laterali.*

*2°. Due prismi, che hanno eguali od equivalenti le sezioni normali, ed eguali gli spigoli laterali, sono equivalenti.*

Infatti essi sono rispettivamente equivalenti a due prismi retti, che hanno altezze eguali e basi eguali od equivalenti, e che perciò sono eguali od equivalenti (§ 286 Teor.)

*3°. Un parallelepipedo è diviso da un piano, che passa per due spigoli opposti, in due prismi triangolari equivalenti.*

Sia (fig. 253) $A''B''C''D''$ una sezione normale del parallelepipedo $ABCD\ A'B'C'D'$. Un piano condotto per i due spigoli opposti $AA'$, $CC'$ divide il parallelepipedo in due prismi triangolari $ABCA'B'C'$, $CADC'A'D'$ rispettivamente equivalenti a due prismi eguali, che hanno per altezza $AA'$ e per basi i due triangoli eguali $A''B''C''$, $C''D''A''$; perciò essi sono equivalenti.

**288. Teorema.** — *Due parallelepipedi sono equivalenti, se hanno una faccia e l'altezza corrispondente rispettivamente eguali.*

Sieno (fig. 254) $ABCD\ A'B'C'D$, $A_1B_1C_1D_1A'_1B'_1C'_1D'_1$ due parallelepipedi che hanno le basi $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ eguali, ed eguali le altezze corrispondenti. Considerando i due parallelepipedi come prismi che hanno

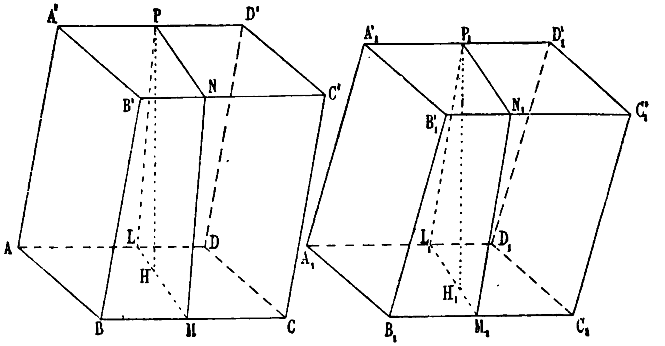



Fig. 254.

per basi $ABB'A'$, $A_1B_1B'_1A'_1$, si vede che i loro spigoli $BC$, $B_1C_1$ sono eguali, e che le loro sezioni normali $LMNP$ . $L_1M_1N_1P_1$ sono equivalenti, perchè sono parallelogrammi, che hanno le basi $LM$, $L_1M_1$ eguali, come altezze dei parallelogrammi eguali $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, e le altezze corrispondenti $PH$, $P_1H_1$ pure eguali, perchè sono le altezze dei due parallelepipedi. Perciò i due parallelepedi sono equivalenti (§ 286 Cor. 2°).

**Corollari.** — *1°. Ogni parallelepipedo è equivalente ad un parallelepipedo retto, avente la base e l'altezza rispettivamente eguali a quelle del parallelepipedo dato.*

*2°. Ogni parallelepipedo è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, che ha la sua base equivalente alla base di quello dato e l'altezza eguale all'altezza del medesimo.*

Infatti il parallelepipedo dato è equivalente ad un parallelepipedo retto, che ha la base e l'altezza eguali a quelle del parallelepipedo dato. Questo parallelepipedo retto è poi equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, che ha la medesima altezza, ed ha per base un rettangolo equivalente alla sua base (§ 286 Teor.)

**289. Teorema.** — *Ogni prisma triangolare è equivalente ad un parallelepipedo, che ha la stessa altezza del prisma e la base equivalente alla sua base.*

1°. Sia ABCA′B′C′ un prisma triangolare (fig. 255). Per il punto di mezzo H di un lato AB della base ABC conduciamo un piano parallelo a quello della faccia ACC′A′ e per lo spigolo AA′ un piano parallelo a quello della faccia BB′C′C. I due prismi BHEB′H′E′ ADHA′D′H′ sono equivalenti, perchè hanno gli spigoli laterali eguali e le sezioni normali eguali, come è facile dimostrare. Ne segue che il prisma dato e il parallelepipedo ADEC A′D′E′C′, l'uno somma dei prismi AHEC A′H′E′C′, HEB H′E′B′, l'altro somma dei prismi AHECA′H′E′C′, AHD A′H′D′, sono equivalenti.

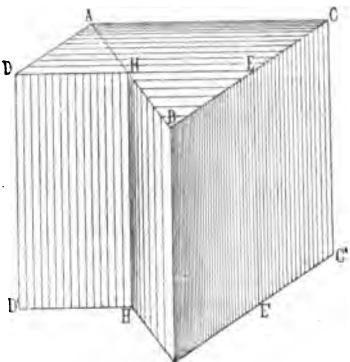


Fig. 255.

È poi evidente che il parallelepipedo ACEDA′C′E′D′, equivalente al prisma dato, ha la stessa altezza di questo, ed ha la sua base ACED equivalente al triangolo ABC, base del prisma dato.

**Corollari.** — *1°. Tutti i prismi triangolari, aventi basi equivalenti ed altezze eguali, sono equivalenti.*

Infatti essi sono rispettivamente equivalenti a parallelepipedi equivalenti.

*2°. Tutti i prismi, aventi basi equivalenti ed altezze eguali, sono equivalenti.*

Infatti essi si possono riguardare come somme di prismi triangolari rispettivamente equivalenti.

*3°. Ogni prisma è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, avente l'altezza eguale all'altezza del prisma e la base equivalente alla sua base.*

**290. Definizione.** — Chiameremo *parallelepipedo di un poligono* p *e di un segmento* $h$ un parallelepipedo rettangolo, che ha la sua base equivalente al poligono $p$ e l'altezza eguale ad $h$.

**Problema** *1°. — Costruire un parallelepipedo rettangolo, che sia equivalente ad un parallelepipedo rettangolo dato, e che abbia due spigoli concorrenti in un vertice eguali a due segmenti dati.*

Sia ABCDA′B′C′D′ il dato parallelepipedo (fig. 256) $P_1R_1P_2R_2$ i due segmenti dati. Si costruisca un rettangolo AEFH (§ 255 Prob. 1°) che sia equivalente alla faccia ABB′A′, e che abbia un lato AH eguale a $P_1R_1$. Il parallelepipedo AEFHD′E′F′H′ che ha per base questo rettangolo AEFH e per altezza AD, è equivalente al dato parallelepipedo (§ 286 Teor.) Si costruisca poi un rettangolo AKLM, che sia equi-

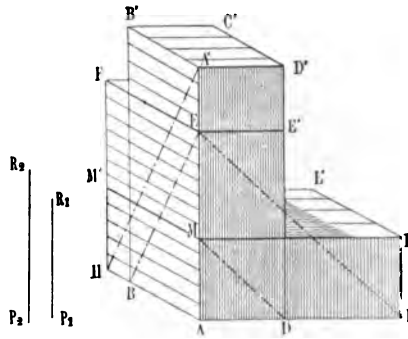


Fig. 256.

valente al rettangolo ADE'E, e che abbia un lato AK eguale a $P_2R_2$. Il parallelepipedo rettangolo AKLM HK'L'M', che ha per base questo rettangolo AKLM e per altezza AH, è equivalente al parallelepipedo ADE'E HH'F'F, e quindi anche a quello dato.

Così si è costruito un parallelepipedo rettangolo AMM'HKLL'K', equivalente a quello dato, e che ha due lati AH, AK concorrenti nel vertice A eguali ai due segmenti dati.

**Problema** 2°. — *Costruire un parallelepipedo rettangolo equivalente ad un dato prisma, e che abbia per base un dato rettangolo.*

Costruito un rettangolo equivalente alla base del dato prisma, è noto che il parallelepipedo rettangolo, che ha per base il detto rettangolo ed ha la stessa altezza del prisma (§ 289 Cor. 3°), è equivalente al prisma dato.

Per risolvere il problema proposto, non resta allora altro a fare che costruire un parallelepipedo rettangolo equivalente a quello ottenuto, e che abbia due spigoli eguali ai lati del detto rettangolo.

**291. Teorema.** — *Tutti i prismi costituiscono una classe di grandezze di seconda specie.*

Tutti i prismi si possono infatti trasformare, in seguito a quanto abbiamo esposto fin qui, in parallelepipedi di una data serie ad essi rispettivamente equivalenti.

Ne segue che, dati due prismi, è sempre possibile scomporli in parti, in modo che tutte le parti dell'uno sieno eguali a quelle dell'altro, oppure in modo che l'uno contenga tutte le parti dell'altro insieme ad altre, secondo che essi sono, o no, equivalenti.

**Corollario.** — *È sempre possibile scomporre un prisma in* n *parti equivalenti,* n *essendo un numero qualunque.*

# CAPITOLO V

## Grandezze limiti.

**292.** Data una serie di grandezze omogenee, per es. la serie di rettangoli, aventi una coppia di lati opposti eguali ad un segmento dato, se si dispongono in un certo ordine, indi si considerano tutte quelle grandezze, non come enti distinti l'uno dall'altro, ma come modi di essere di un unico ente, di una sola grandezza, la quale va modificandosi, secondo una data legge, in guisa da trasformarsi successivamente prima in una, poi in un'altra delle grandezze date, e così di seguito, diremo che tutte quelle grandezze della serie sono stati di quell'unica grandezza, che prendiamo a considerare.

**Definizioni.** — 1ª. Se in una data questione una grandezza acquista differenti stati non tutti equivalenti fra loro, cioè passa successivamente da uno stato ad un

altro, seguendo una determinata legge, si dice che essa è *variabile secondo quella legge*. Se poi nella stessa questione una grandezza acquista stati successivi tutti eguali, o equivalenti fra loro, si dice *costante*.

2ª. Una variabile si dice *sempre crescente*, se ogni suo stato è maggiore dei precedenti, e si dice *sempre decrescente*, se ogni suo stato è minore di tutti i precedenti.

3ª. Una variabile è *indefinitamente crescente*, se, scelta ad arbitrio una grandezza ad essa omogenea, la variabile può diventare e conservarsi maggiore di essa. Una variabile invece è *indefinitamente decrescente*, se, scelta ad arbitrio una grandezza ad essa omogenea, la variabile può diventare e conservarsi minore di essa.

Allo scopo di chiarire con un esempio i concetti suesposti diamo la seguente applicazione geometrica.

Supponiamo (fig. 257) che un triangolo ABC abbia due vertici AB fissi, e che il terzo vertice C percorra la semiretta CC′, parallela alla base e uscente dal vertice C, senza passare due volte per una stessa posizione. Il triangolo ABC, nelle successive posizioni del vertice mobile assume i vari stati AC′B, AC″B,... che sono (§ 250 Teor.) equivalenti fra loro, e quindi esso è costante. Invece l'angolo $A\widehat{B}C$, diventando $A\widehat{B}C'$, $A\widehat{B}C''$,... è evidentemente una variabile sempre crescente ma non indefinitamente, perchè si mantiene sempre minore di un angolo piatto.

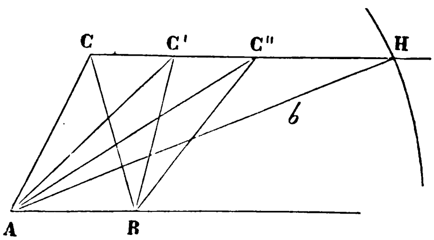


Fig. 257.

Un esempio di variabile indefinitamente crescente è dato dal lato AC, poichè, se con un raggio $b$ arbitrario maggiore di AC, e col centro in A si descrive un circolo, che tagli in un punto H la semiretta CC′, quando il punto C prenderà una posizione esterna al cerchio descritto, il lato variabile AC diventerà maggiore anche di $b$, e si manterrà tale per tutte le successive posizioni di C.

Infine è chiaro che l'angolo $B\widehat{A}C$ decresce continuamente, in modo da diventare e mantenersi, a partire da una certa posizione di C, minore di qualsivoglia angolo dato; dunque esso è una variabile indefinitamente decrescente.

**293. Teoremi.** — *1°. I multipli successivi di una grandezza sono stati di una variabile indefinitamente crescente.*

Infatti esistono infiniti multipli successivi di una data grandezza A, ciascuno dei quali è maggiore del precedente e quindi di tutti i precedenti; inoltre per ogni grandezza B arbitrariamente grande ed omogenea ad A è sempre possibile (P. IX) trovare un multiplo $m$A di A, tale che sia $mA > B$; dunque la variabile A cresce indefinitamente.

*2°. Se una grandezza varia, in modo che ogni suo stato sia equivalente o maggiore del doppio del precedente, essa cresce indefinitamente.*

Infatti data una grandezza A qualunque, per ogni grandezza B arbitrariamente grande si trovi un multiplo $m$A di A tale che sia $mA>B$,

indi si determini un numero intero $n$, in modo da avere $2^n > m$; allora sarà pure $2^n.A > B$. Dunque la variabile che si considera può, a partire da un certo stato in poi, diventare maggiore di ogni grandezza data, e perciò cresce indefinitamente.

*3°. Se una grandezza varia, in modo che ogni suo stato sia equivalente o minore della metà del precedente, essa decresce indefinitamente.*

Infatti, data una grandezza qualunque A, sappiamo dal teorema precedente che esiste sempre, per ogni grandezza arbitraria B minore di A, un multiplo di B, secondo un certo numero $2^n$, tale che si ha

$$2^n.B > A,$$

e quindi

$$\frac{1}{2^n} A < B.$$

Dunque la variabile che si considera può, a partire da un certo stato in poi, diventare minore di ogni grandezza data arbitrariamente, e perciò decresce indefinitamente.

**294.** I teoremi che seguono serviranno di applicazione di quanto abbiamo esposto nei due §§ precedenti.

**Teoremi.** — *1°. Se si raddoppia continuamente e indefinitamente il numero dei lati di una spezzata regolare inscritta in un arco, il lato della spezzata e la differenza fra il raggio e l'apotema sono due variabili indefinitamente decrescenti, ed il perimetro è sempre crescente, ma non indefinitamente.*

Infatti (fig. 258) al raddoppiarsi del numero dei lati della spezzata regolare inscritta ABC, l'arco AB che sottende il lato AB decresce indefinitamente (§ 292 Teor. 3°), e perciò decresce anche il lato medesimo (§ 180), il quale si potrà far diventar minore di qualsiasi segmento, facendo diminuire l'arco, finchè diventi minore di quello che sottende una corda eguale al segmento dato. Siccome poi la differenza fra il raggio OD e l'apotema OH è minore della metà del lato DB, (§ 81 Cor.), il quale decresce indefinitamente, così anche la differenza OD — OH decresce indefinitamente.

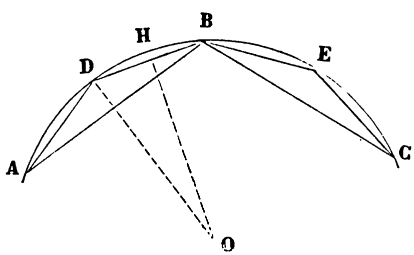


Fig. 258.

Il perimetro della spezzata inscritta è evidentemente una variabile sempre crescente (§ 82 Teor.), però si mantiene sempre minore del perimetro di una qualunque spezzata regolare circoscritta all'arco medesimo.

*2°. Se si raddoppia continuamente e indefinitamente il numero dei lati di una spezzata regolare circoscritta ad un arco, il lato della spezzata*

*e la differenza fra il suo raggio e l'apotema sono due variabili indefinitamente decrescenti, ed il perimetro è sempre decrescente, ma non indefinitamente.*

Si imiti la dimostrazione del teorema che precede.

*3°. Se in un parallelogrammo una coppia di lati opposti è costante, mentre gli altri due lati crescono (o decrescono) indefinitamente, anche il parallelogrammo cresce (o decresce) indefinitamente; e viceversa.*

Sia ABB'A' (fig. 259) il parallelegrammo dato, e AA', BB' la coppia di lati costanti. È chiaro (§ 109 Teor. 1°) che al crescere (o decrescere) del lato variabile AB anche il parallelogrammo cresce (o decresce); inoltre, dato un poligono piano P non intrecciato, se si costruisce (§ 255 Prob. 2°) il parallelogrammo ACC'A' equivalente ad esso, ed avente una coppia di lati opposti eguali al lato AA', quando il lato variabile AB sia diventato maggiore (o minore) del lato AC' anche il parallelogrammo ABB'A' sarà maggiore (o minore) di ACC'A', e quindi maggiore (o minore) anche di P.

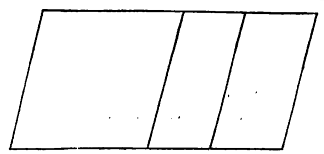



Fig. 259.

Il teorema inverso si dimostra nello stesso modo.

**Corollari.** — *1°. Se due lati consecutivi di un rettangolo crescono (o decrescono) indefinitamente, anche il rettangolo cresce (o decresce) indefinitamente.*

*2°. Se un segmento cresce (o decresce) indefinitamente, anche il suo quadrato cresce (o decresce) indefinitamente; e viceversa.*

**Teorema 4°.** — *Se in un prisma di base costante l'altezza cresce (o decresce) indefinitamente, anche il prisma cresce (o decresce) indefinitamente; e viceversa.*

Si imiti la dimostrazione del teorema che precede.

**Corollari.** — *3°. Se gli spigoli concorrenti di un parallelepipedo crescono (o decrescono) indefinitamente, anche il parallelepipedo cresce (o decresce) indefinitamente.*

*4°. Se un segmento cresce (o decresce) indefinitamente, anche il suo cubo cresce (o decresce) indefinitamente; e viceversa.*

**295. Definizioni.** — 1ª. Due variabili si dicono in *corrispondenza univoca* quando le serie degli stati relativi sono in corrispondenza univoca.

2ª. Se due variabili sono in corrispondenza univoca, si dice che la prima è *equivalente, maggiore* o *minore* dell'altra, se ogni stato della prima è equivalente, maggiore o minore del corrispondente stato della seconda.

In ciò che segue, parlando di due o più variabili considerate insieme, supporremo sempre che sieno in corrispondenza univoca.

3ª. Se due o più variabili omogenee della 1ª o della 2ª specie sono in corrispondenza univoca, le somme degli stati corrispondenti costituiscono gli stati di una nuova variabile, che si dice *somma* delle variabili date.

Applicando alle somme degli stati corrispondenti di due o più variabili omogenee in corrispondenza univoca le proprietà, che si sono dimostrate per le grandezze della 1ª e 2ª specie, è facile dimostrare che le stesse proprietà si possono estendere anche alle somme di grandezze variabili. Così è facile vedere che anche i concetti di multiplo, summultiplo e di differenza sono applicabili alle grandezze variabili, come alle grandezze costanti, mediante le seguenti definizioni:

4ª. Se gli stati di una variabile sono multipli, o summultipli, secondo lo stesso numero $m$ dei corrispondenti stati di un'altra variabile, la prima dicesi *multipla*, o *summultipla*, dell'altra secondo il numero $m$.

5ª. Se di due variabili l'una è maggiore dell'altra, la variabile che ha per stati le differenze degli stati corrispondenti delle variabili date, dicesi la loro *differenza*.

**Teorema.** — *Una variabile somma di due o più grandezze variabili indefinitamente crescenti (o decrescenti), è pure indefinitamente crescente (o decrescente).*

Sieno $V_1, V_2, V_3, \dots V_n$ più variabili indefinitamente decrescenti, e indichiamo con W la loro somma. Se per ogni sistema di stati corrispondenti delle variabili date si prende a considerare uno stato non minore dei rimanenti, e con gli stati così ottenuti si forma una nuova variabile V′, è chiaro che V′ è pure indefinitamente decrescente, e tale che

$$W \leqq nV' ;$$

d'onde si vede che, al decrescere di V′, anche W decresce, e che assegnata una grandezza qualunque B, omogenea alle date, basta dividere B in $n$ parti qualunque, e prendere V′ minore di tutte, per avere $nV' < B$, e perciò anche $W < B$; dunque W decresce indefinitamente.

**Corollario.** — *Una variabile multipla, o summultipla, di una variabile indefinitamente crescente (o decrescente), è pure indefinitamente crescente, (o decrescente).*

Infatti è evidente che, se una grandezza variabile è multipla secondo un numero $n$ di una grandezza variabile indefinitamente crescente (o decrescente), essa è pure indefinitamente crescente (o decrescente), perchè è la somma di $n$ grandezze variabili indefinitamente crescenti (o decrescenti).

Se poi la variabile data V è summultipla secondo il numero $n$ di una grandezza variabile, indefinitamente crescente, è facile vedere come si possa, per ogni grandezza omogenea B, determinare uno stato di W maggiore di $n$B, e quindi $V > B$; dunque V cresce indefinitamente. Analoga dimostrazione può farsi per il caso in cui W decresce indefinitamente.

**296.** Prendiamo ora a considerare una grandezza A qualunque ed una serie indefinitamente decrescente di grandezze

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_n \dots .$$

omogenee ad A e tali, che si abbia $V_1 < A$.

Se con queste grandezze si formano le due variabili in corrispondenza univoca

$$A + V_1, A + V_2, A + V_3, \ldots, A + V_n, \ldots$$
$$A - V_1, A - V_2, A - V_3, \ldots, A - V_n, \ldots$$

è chiaro che la prima di esse è sempre decrescente, la seconda è sempre crescente, e la loro differenza, che è equivalente a

$$2V_1, 2V_2, 2V_3, \ldots, 2V_n, \ldots,$$

decresce indefinitamente. Questo esempio ci permette di dare le seguenti

**Definizioni.** — 1ª. Due variabili omogenee in corrispondenza univoca, tali che la prima sia sempre decrescente, la seconda sia sempre crescente, e la prima sia maggiore della seconda, si dicono *convergenti*, se la loro differenza decresce indefinitamente.

2ª. Due coppie di variabili convergenti si dicono *equivalenti*, se la variabile crescente e quella decrescente di ciascuna di esse sono rispettivamente equivalenti alla variabile crescente e a quella decrescente dell'altra.

**Teorema.** — *Date due coppie di variabili convergenti omogenee, la variabile decrescente di almeno una coppia è maggiore della variabile crescente dell'altra.*

Sieno $(U, V)$, $(U', V')$ le coppie di variabili convergenti date, nelle quali è $U > V$, $U' > V'$, si vuol dimostrare che si ha $U > V'$, o si ha $U' > V$, o tutti e due questi casi insieme. Infatti supponiamo di avere. a partire da un certo stato in poi, $U < V'$ $U' < V$; allora a partire da questo stato, essendo per ipotesi $V' > U > V$, $V > U' > V'$, si dovrebbe avere contemporaneamente $V' > V$ e $V > V'$, ciò che è assurdo; dunque $U' > V$, oppure $U > V'$, oppure l'uno e l'altro caso insieme.

**297. Teorema.** — *Date due o più coppie di variabili convergenti omogenee, la somma di tutte le variabili decrescenti e la somma delle variabili crescenti formano due nuove variabili convergenti.*

Infatti, se sono date le coppie di variabili convergenti $(U_1, V_1)$ $(U_2, V_2), \ldots (U_n, V_n)$, ed è

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n,$$
$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n,$$

è chiaro che, essendo $U_1 > V_1$; $U_2 > U_2$; $\ldots U_n > V_n$, si avrà pure $U > V$.

Inoltre si ha $U - V = U_1 - V_1 + U_2 - V_2 + \ldots + U_n - V_n$; e siccome per ipotesi le differenze $U_1 - V_1$, $U_2 - V_2, \ldots, U_n - V_n$ sono variabili indefinitamente decrescenti, la loro somma $U - V$ è pure una variabile indefinitamente decrescente (§ 295 Teor.)

**Definizione.** — Date due o più coppie di variabili convergenti omogenee, la coppia di variabili convergenti formata dalla somma delle variabili decrescenti e dalla somma delle variabili crescenti delle coppie date, si dice la loro *somma*.

È superfluo osservare che anche per le somme di coppie di variabili convergenti valgono le considerazioni esposte nel § 295 per le

somme di grandezze variabili, e quindi possiamo estendere senz'altro anche ad esse le proprietà che si sono dimostrate per le somme di grandezze della prima e della seconda specie.

**298.** Abbiamo indicata nel § 296 la esistenza di una classe estesissima di variabili convergenti i cui stati successivi sono determinati dalla seguente legge di formazione:

$$A + V_1, A + V_2, A + V_3, \ldots, A + V_n, \ldots,$$
$$A - V_1, A - V_2, A - V_3, \ldots, A - V_n, \ldots,$$

dove V è una variabile indefinitamente decrescente.

Si può osservare che la grandezza A è minore di tutti gli stati $A + V_n$ della grandezza decrescente ed è maggiore di tutti gli stati $A - V_n$ della grandezza crescente.

**Definizione 1ª.** — Dicesi *limite* di due variabili convergenti ogni grandezza maggiore di tutti gli stati della variabile crescente e minore di tutti quelli della variabile decrescente. Si dice anche che le due variabili *convergono verso quella grandezza limite.*

Mediante le considerazioni che precedono, abbiamo mostrata l'esistenza di un limite per una classe di variabili convergenti. Si possono scoprire altre classi, che godono della stessa proprietà; però è facile convincersi, che esistono infinite coppie di variabili convergenti, per le quali non è possibile dimostrare l'esistenza di un limite. Siccome non è contradittorio il pensare che due variabili convergenti ammettano un limite, allo scopo di stabilire in modo generale diverse importanti nozioni nel campo della geometria, estenderemo, come si fa in Algebra per la teoria dei numeri irrazionali, il concetto di limite a tutte le coppie di variabili convergenti mediante il seguente

## Postulato XII.

*Due variabili convergenti ammettono sempre un limite.*

Quando una grandezza L è limite di due variabili convergenti U,V, per tutti gli stati corrispondenti delle due variabili si ha $U > L > V$, e si indica ciò colla scrittura $L = lim. (U,V)$, che si legge: L *è equivalente al limite di* (U, V).

**Definizione 2ª.** — La grandezza L definita per mezzo del postulato precedente, come limite di due variabili convergenti U, V, si dice che è *minore* di tutti gli stati della variabile decrescente U, e *maggiore* di tutti gli stati della variabile crescente V.

**Teorema.** — *Se di due grandezze di 1ª o 2ª specie equivalenti una è limite di due variabili convergenti, anche l'altra è limite delle stesse variabili.*

Sia $L = lim. (U, V)$ ed $L = L'$. Essendo per ogni stato delle due variabili convergenti $U > L > V$, avremo ancora $U > L' > V$; dunque $L' = lim. (U, V)$.

**299. Teorema.** — *Due grandezze di $1^a$ o di $2^a$ specie sono equivalenti, se sono limiti delle stesse variabili convergenti, o di due coppie di variabili convergenti equivalenti fra loro.*

Sia $L = lim. (U, V)$, $L' = lim. (U'V')$, $(U, V) = (U', V')$: dico che sarà $L = L'$. Infatti, se L non è equivalente ad $L'$, sarà maggiore o minore di essa; sia per es. $L > L'$.

Allora, essendo $U-V' > U-L' > L-L'$, si avrebbe $U-V' > L-L'$, e quindi, poichè $U = U'$ per ipotesi, sarebbe $U' - V' > L - L'$, il che è assurdo, perchè le due variabili $U'$ $V'$ sono convergenti, e quindi la differenza $U'-V'$ decresce indefinitamente e può diventare minore anche di $L - L'$.

I due teoremi precedenti valgono soltanto per le grandezze della $1^a$ o $2^a$ specie; ma allo scopo di generalizzare i risultati delle dimostrazioni che seguono a tutte le grandezze, che cadono nel dominio della geometria, estenderemo il concetto di equivalenza anche alle grandezze di $3^a$ specie, facendo uso della seguente definizione generale:

**Definizione.** — Due grandezze qualunque si dicono *equivalenti*, se sono limiti delle stesse variabili convergenti, o di coppie di variabili convergenti equivalenti fra loro.

**300. Teorema.** — *Date due coppie di variabili convergenti, se la variabile decrescente di ciascuna coppia è maggiore della variabile crescente dell'altra, i loro limiti sono equivalenti; e viceversa.*

1°. Sieno $(U, V)$, $(U', V')$ le due coppie di variabili convergenti date, nelle quali $U > V'$, $U' > V$, e sia $L = lim. (U, V)$, $L' = lim. (U', V')$; si vuol dimostrare che $L = L'$.

Infatti fissato ad arbitrio uno stato $U'_0$ di $U'$, si determini uno stato della variabile U, a partire dal quale si abbia costantemente $U'_0 > U$. Ciò è sempre possibile, poichè, se per ogni stato di U si avesse sempre $U'_0 < U$, essendo per ipotesi $U' > V$, si avrebbe pure $U'_0 - U' < U - V$, che è assurdo perchè la differenza $U - V$ decresce indefinitamente, e può quindi diventare minore anche di $U'_0 - U'$.

Ciò fatto, siccome per ipotesi $L < U$, e a partire da un certo stato in poi si ha $U' > U$, così sarà pure $L < U'$.

Analogamente si dimostra che $L > V'$, e quindi si conclude che $L = lim. (U', V')$; ma si ha pure $L' = lim. (U'. V')$, dunque $L = L'$.

2°. Supponiamo ora che sia $L = lim. (U, V)$, $L' = lim. (U', V')$ e $L = L'$. Essendo $U > L$, si ha pure $U > L'$, e siccome $L' > V'$, ne segue $U > V'$. Analogamente, essendo $U' > L'$, si ha pure $U' > L$, e quindi $U' > V$.

**Corollari.** — *1°. Se due grandezze qualunque sono equivalenti, ciascuna di esse è limite di ogni coppia di variabili convergenti, di cui è limite l'altra.*

Sia $L = L' = lim. (U, V)$, e sia inoltre $L = lim. (U', V')$; dico che anche $L' = lim. (U', V')$. Dalle limitazioni

$$U > L > V$$
$$U' > L > V',$$

si ricava che $U > V'$ ed $U' > V$, quindi, essendo per ipotesi,

$$L' = lim. (U, V),$$

si avrà pure, per ciò che abbiamo dimostrato nel teorema precedente, $L' = lim. (U', V')$.

2°. *Due grandezze qualunque equivalenti ad una terza, sono equivalenti fra loro.*

Infatti, se $L = L'$ ed $L' = L''$, L ed L″ sono limiti delle stesse variabili convergenti, di cui è limite L′; dunque L ed L″ sono equivalenti fra loro.

**301. Teorema.** — *Date due serie di grandezze di 1ª o 2ª specie in corrispondenza univoca, tali che alla somma di due o più stati dell'una corrisponda la somma degli stati corrispondenti dell'altra, e che a stati indefinitamente crescenti (o decrescenti) della prima corrispondano stati indefinitamente crescenti (o decrescenti) dell'altra, se con stati della prima serie si formano due variabili convergenti, le variabili formate con stati della seconda serie, corrispondenti ai primi, sono pure convergenti, ed al limite delle prime due variabili corrisponde il limite delle seconde.*

Infatti, sieno (U, V), (U′, V′) le due coppie di variabili formate con stati delle due serie date. Se si suppone che sia costantemente $U > V$, sarà pure $U' > V'$, perchè per le ipotesi stabilite a stati crescenti di una serie corrispondono stati crescenti dell'altra; inoltre, siccome la differenza $U - V$ decresce indefinitamente, perchè le due prime variabili si sono supposte convergenti, anche la differenza $U' - V'$ decrescerà indefinitamente per l'ipotesi stabilita, e quindi le due variabili (U′, V′) sono convergenti insieme alle variabili (U, V).

Ora se $L = lim. (U, V)$ ed L′ è la grandezza della seconda serie corrispondente ad L nella prima, avendosi costantemente $U > L > V$, sarà pure $U' > L' > V'$; dunque $L' = lim. (U', V')$.

**Corollari.** — 1°. *Se in una serie di parallelogrammi (o di prismi) della stessa base se ne considerano due, i cui lati (o spigoli) variabili convergono verso un dato segmento, i due parallelogrammi (o i due prismi) convergono verso il parallelogrammo (o prisma) della serie corrispondente al dato segmento; e viceversa.*

2°. *Due rettangoli, che hanno i loro lati rispettivamente convergenti verso due dati segmenti, convergono verso il rettangolo di questi segmenti. Viceversa, se due rettangoli e una coppia di lati corrispondenti sono variabili convergenti, anche l'altra coppia di lati forma due variabili convergenti.*

3°. *Se due segmenti convergono verso un dato segmento, i loro quadrati convergeranno verso il quadrato del segmento limite; e viceversa.*

4°. *Se le basi e le altezze di due prismi sono due coppie di variabili convergenti, i due prismi convergono verso un prisma, che ha la base e l'altezza equivalenti ai limiti di quelle coppie di variabili. Viceversa, se due prismi e le basi relative sono due coppie di variabili convergenti, anche le altezze corrispondenti sono variabili convergenti; e se due prismi e le altezze relative sono due coppie di variabili convergenti, anche le basi sono variabili convergenti.*

5°. *Due parallelepipedi rettangoli, i cui lati convergono verso tre segmenti dati, convergono verso il parallelepipedo di quei tre segmenti.*

6°. *Se due segmenti convergono verso un dato segmento, i loro cubi convergono verso il cubo del segmento limite.*

**302. Teorema.** — *Una grandezza somma di più grandezze della 1ª o della 2ª specie, limiti di altrettante coppie di variabili convergenti, è limite della somma delle coppie date.*

Sia $L_1 = lim. (U_1, V_1), L_2 = lim. (U_2, V_2) \ldots, L_n = lim. (U_n, V_n), \ldots$ e sia $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$, $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$, $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$; dico che è anche $L = lim. (U, V)$. Infatti essendo

$$U_1 > L_1 > V_1$$
$$U_2 > L_2 > V_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$U_n > L_n > V_n,$$

si ha pure

$$U_1 + U_2 = \ldots + U_n > L_1 + L_2 + \ldots + L_n > V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

ossia

$$U > L > U,$$

e, siccome (U, V) sono variabili convergenti (§ 297 Teor.), si ha

$$L = lim. (U, V).$$

Possiamo, in seguito al teorema precedente, estendere il concetto di somma anche alle grandezze della 3ª specie, purchè sieno limiti di coppie di variabili convergenti, generalizzando come segue il concetto di somma.

**Definizione.** — Dicesi *somma* di due o più altre grandezze omogenee, limiti di variabili convergenti, ogni grandezza che è limite della somma di tutte quelle coppie di variabili.

**303. Teorema.** — *La somma di più grandezze limiti, di altrettante coppie di variabili convergenti, gode della proprietà commutativa.*

Infatti abbiamo visto (§ 297) che la somma di più coppie di variabili convergenti gode della proprietà commutativa; dunque (§ 301) godrà di questa proprietà anche la somma dei loro limiti.

Analogamente si dimostrano tutte le altre proprietà relative alla somma di grandezze limiti, e si possono estendere ad esse le definizioni di multiplo, summultiplo ecc. e le conseguenze che ne derivano.

**304. Teorema** *1º*. — *Se due grandezze della 1ª o della 2ª specie sono limiti di due coppie di variabili convergenti, e la prima è maggiore della seconda, soltanto la variabile decrescente della prima coppia è maggiore della variabile crescente dell'altra; e viceversa.*

1º. Infatti, se $L = lim. (U, V)$, $L' = lim. (U', V')$ ed $L > L'$, sarà $U > L > L' > V'$: dunque $U > V'$. Non può essere nello stesso tempo $U' > V$, perchè, se ciò accadesse, sarebbe (§ 300 Teor.) $L = L'$, ciò che è contro l'ipotesi.

2º. Sia $U > V'$, ma non $U' > V$. Allora non potrà essere $L = L'$, perchè, se ciò accadesse si avrebbe pure $U' > V$ contro l'ipotesi. Nè potrà essere $L < L'$, perchè si avrebbe $U' > V$ per il caso precedente: dunque $L > L'$.

La definizione di maggiore o minore, che fino a qui comprendeva soltanto quelle grandezze che si possono scomporre in parti, in modo

chè nella maggiore si trovino parti eguali a tutte quelle che si trovano nella minore insieme ad altre, si può ora estendere, in seguito al teorema precedente, a tutte le grandezze della stessa specie, limiti di coppie di variabili convergenti, colla seguente

**Definizione.** — Se due grandezze della stessa specie sono limiti di due coppie di variabili convergenti, si dice che la prima è *maggiore* della seconda, e questa *minore* della prima, quando soltanto la variabile decrescente della prima coppia è maggiore della variabile crescente dell'altra.

Deriva da ciò che precede che, date due grandezze della stessa specie A, B, limiti di due coppie di variabili di 1ª e 2ª specie convergenti, si ha $A = B$, oppure $A > B$, oppure infine $A < B$; e questi tre casi si escludono a vicenda.

**Teorema 2°.** — *Esiste sempre la differenza di due grandezze non equivalenti limiti di due coppie di variabili convergenti.*

Infatti sia $L = lim. (U, V)$, $L' = lim. (U' V')$ ed $L \not\sim L'$. Essendo $L > L'$, per il teorema precedente si dovrà avere $U > V'$, nè potrà essere insieme $U' > V$, perchè altrimenti (§ 300 Teor.) si avrebbe $L = L'$ contro l'ipotesi; dunque a partire da un certo stato in poi si avrà pure $U' < V$.

Ora la differenza $U - V'$ è sempre decrescente, e la differenza $V - U'$ e sempre crescente, inoltre, essendo $U > V$, $U' > V'$, si ha pure $U - V' > V - U'$, e la differenza

$$(U - V') - (V - U') = (U - V) - (U' - V')$$

è una variabile indefinitamente decrescente; dunque le variabili $(U - V')$ $(V - U')$ sono convergenti, e perciò ammettono un limite. Chiamando $L_1$ questo limite, possiamo scrivere

$$L_1 = lim. [(U - V'), (V - U')],$$

e per il concetto di somma di più coppie di variabili convergenti si ha

$$L_1 + L' = lim. [(U + U' - V'), (V + V' - U')],$$

ossia

$$L_1 + L' = lim. \{[U + (U' - V')], [V - (U' - V')]\}.$$

Ma, siccome $U > L > V$ per ipotesi, a più forte ragione si ha

$$U + (U' - V') > L > V - (U' - V'),$$

e, poichè la differenza fra $U + (U' - V')$ e $V - (U' - V')$ decresce indefinitamente, si ha

$$L = lim. \{[U + (U' - V')], [V - (U' - V')]\}.$$

Ne segue

$$L_1 + L' = L,$$

e quindi

$$L_1 = L - L'.$$

Avendo esteso alle grandezze limiti il concetto di differenza, si vede subito come si possano anche estendere ad esse tutte le proprietà di-

mostrate per la differenza di grandezze della 1ª e 2ª specie, intesa nel senso primitivo. Ci limitiamo in proposito a ricordare il seguente corollario, del quale avremo bisogno in qualcuna delle dimostrazioni seguenti.

**Corollario.** — *La differenza tra ciascuna di due variabili convergenti ed il loro limite decresce indefinitamente.*

Infatti, se è $L = lim. (U, V)$, si ha $U - L < U - V$ ed $L - V < U - V$. Ma sappiamo che la differenza $U - V$ decresce indefinitamente, dunque anche le differenze $U - L$, $L - V$ decrescono indefinitamente.

**305. Teorema.** — *Di ogni data grandezza esistono summultipli secondo qualsivoglia numero.*

Sia A la data grandezza ed $n$ un numero qualunque. Presa una grandezza arbitraria $a$ omogenea ad A e minore di essa, possiamo in virtù del postulato IX (d'Archimede), che per i §§ 256, 284, 291 si può estendere anche alle grandezze di 2ª specie studiate fin qui, determinare due multipli successivi $m\,(n\,a)$ ed $(m+1)\,(n\,a)$ di $(n\,a)$, che comprendano A; potremo quindi evidentemente scrivere

$$n\,.\,(m\,a) < A < n\,.\,(m+1)\,a.$$

Se ora indichiamo con $b$ una nuova grandezza eguale o minore di $\frac{1}{2}a$, e con $m'(n\,b)$, $(m'+1)\,(n\,b)$ due suoi multipli successivi comprendenti A, avremo pure

$$n\,.\,(m'\,b) < A < n\,.\,(m'+1)\,b,$$

e così di seguito.

Considerando ora le due serie di grandezze

$$\begin{array}{l} m\,.\,a,\quad m'\,.\,b,\;\ldots\ldots\ldots \\ (m+1)\,.\,a,\quad (m'+1)\,b,\;\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

le quali possono riguardarsi come stati di due variabili in corrispondenza univoca, tali che la differenza degli stati corrispondenti è una variabile (§ 293 Teor. 3°) indefinitamente decrescente, si vede che sono convergenti; dunque ammettono un limite, che chiamiamo B.

Se ora prendiamo i multipli delle due variabili suindicate, secondo il numero $n$, avremo che il limite delle due nuove variabili così ottenute sarà $n$B. Ma anche la grandezza A è evidentemente limite delle stesse due variabili, e quindi $n\,.\,B = A$, ossia $B = \frac{A}{n}$.

# CAPITOLO VI

## Equivalenza dei poliedri.

**306. Teorema.** — *Due piramidi, che hanno le basi equivalenti e le altezze eguali, sono equivalenti.*

1°. Sieno $SABC$, $S'A'B'C'$ due piramidi triangolari (fig. 260), aventi le basi $ABC$, $A'B'C'$ equivalenti e le altezze corrispondenti eguali.

Dividiamo l'altezza della prima di esse in un numero qualunque di parti eguali, per es. in 5, e per i punti di divisione conduciamo i piani paralleli alla base. Sieno $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ .... le sezioni prodotte da questi

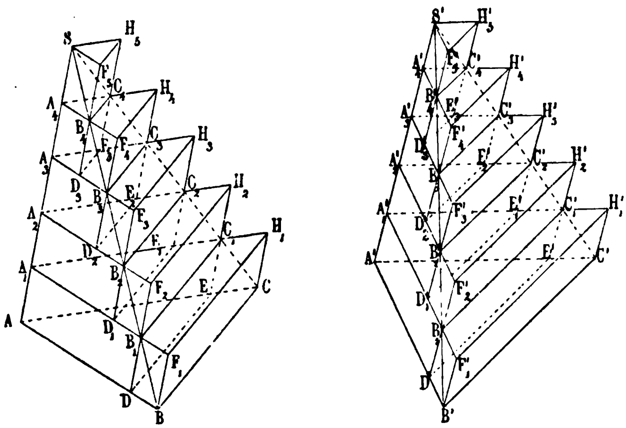



Fig. 260.

piani. La somma dei prismi $A_1B_1C_1ADE$, $A_2B_2C_2A_1D_1E_1$ .... che hanno per basi le dette sezioni e per spigoli laterali i segmenti $A_1A$, $A_2A_1$, .... rispettivamente, è una grandezza che chiamerò $V$, la quale è sempre minore della piramide, e varia continuamente crescendo, quando si raddoppia successivamente il numero di parti in cui è divisa l'altezza della piramide. Analogamente la somma dei prismi $ABCA_1F_1H_1$, $A_1B_1C_1A_2F_2H_2$, $A_2B_2C_2A_3F_3H_3$, ...., che hanno per basi le medesime sezioni e per spigoli laterali i segmenti $AA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, .... rispettivamente, è una grandezza che indicherò con $U$, la quale è sempre maggiore della piramide, e varia continuamente decrescendo, quando si raddoppia successivamente il numero delle parti eguali, nelle quali è divisa l'altezza della piramide.

È evidente che

$$A_1B_1C_1ADE \equiv A_1B_1C_1A_2F_2H_2$$
$$A_2B_2C_2A_1D_1E_1 \equiv A_2B_2C_2A_3F_3H_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

e che perciò la differenza delle grandezze U, V è equivalente al prisma $ABCA_1F_1H_1$.

Ora ogni volta che si raddoppia il numero di parti, in cui è divisa l'altezza della piramide, l'altezza di questo prisma si riduce alla metà, e quindi anche il prisma stesso, equivalente alla differenza U — V, si riduce alla metà; per conseguenza questa differenza U — V decresce indefinitamente (§ 293 Teor. 3°). Le U, V sono dunque due variabili convergenti, ed essendo la piramide SABC sempre compresa fra di esse, si ha

$$SABC = lim. (U, V).$$

Ripetendo le identiche costruzioni per la piramide S'A'B'C' e chiamando U' la somma dei prismi $A'B'C'A'_1F'_1H'_1$, $A'_1B'_1C'_1A'_2F'_2H'_2$, .... e V' la somma dei prismi $A'_1B'_1C'_1A'D'E'$, $A'_2B'_2C'_2A'_1D'_1E'_1$, ...., si dimostra analogamente che U', V' sono variabili convergenti ed è

$$S'A'B'C' = lim. (U', V').$$

Siccome le basi A'B'C', ABC delle due piramidi sono triangoli equivalenti, anche le sezioni $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$; $A_2B_2C_2$, $A'_2B'_2C'_2$; ...., parallele alle basi e ad eguali distanze dalle medesime, sono pure triangoli rispettivamente equivalenti (§ 278 Teor.) Ne segue che i prismi corrispondenti costruiti nelle due piramidi, avendo basi equivalenti ed altezze eguali, sono pure equivalenti, dunque è U = U', V = V', e per conseguenza (§ 299 Def.) SABC = S'A'B'C'.

2°. Passiamo ora a dimostrare che due piramidi qualunque, aventi basi equivalenti ed altezze eguali, sono equivalenti. Le basi delle due piramidi essendo equivalenti, esse si possono scomporre in un egual numero di poligoni rispettivamente eguali, e questi alla loro volta in triangoli rispettivamente eguali. Le due piramidi si possono allora scomporre in un egual numero di piramidi triangolari rispettivamente equivalenti, perchè hanno per basi i detti triangoli eguali, e per vertici i vertici delle due piramidi, e perciò sono pure equivalenti.

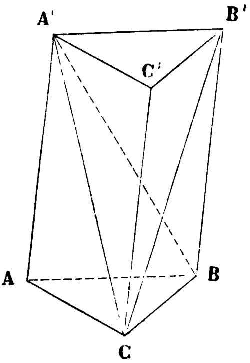


Fig. 261.

**307. Teorema.** — *Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma, avente la base e l'altezza rispettivamente eguali a quelle della piramide.*

1°. Data una piramide triangolare A'ABC (figura 261), si costruisca il prisma ABCA'B'C', che ha ABC per base e AA' per uno spigolo laterale. Il piano A'BC scompone questo prisma nella piramide triangolare data A'ABC e in una quadrangolare, che ha per base il parallelogrammo BCC'B' e per vertice il punto A'. Questa resta poi scomposta dal piano A'B'C in due tetraedri equivalenti, perchè hanno le basi BCB', C'B'C eguali, ed hanno eguali le altezze corrispondenti. Nel tetraedro A'C'B'C considerando come base il triangolo A'B'C' e come vertice C, si vede che esso è equivalente alla piramide triangolare data A'ABC.

Il prisma ABCA'B'C' è dunque il triplo della piramide data A'ABC, ossia questa piramide è la terza parte del prisma suddetto.

Siccome tutti i prismi, aventi basi equivalenti ed altezze eguali,

sono equivalenti, il tetraedro A'ABC è equivalente anche alla terza parte di ogni prisma, che abbia la sua base equivalente alla base ABC del tetraedro e l'altezza eguale all'altezza corrispondente.

2°. Data una piramide poligonale qualunque, e costruito un prisma, avente la base e l'altezza eguali rispettivamente a quelle della piramide, si possono scomporre la base della piramide e quella del prisma in un egual numero di triangoli rispettivamente eguali, e quindi scomporre la piramide in tetraedri e il prisma in altrettanti prismi triangolari, che hanno le stesse basi e le stesse altezze, e son perciò tripli rispettivamente dei tetraedri medesimi. Ne segue che tutto il prisma è triplo della piramide data.

**Corollari.** — *1°. Una piramide è equivalente al parallelepipedo della sua base e di un terzo della sua altezza.*

*2°. Se la base (o l'altezza) di una piramide è costante, e l'altezza (o la base) cresce o decresce indefinitamente, anche la piramide cresce o decresce indefinitamente.*

*3°. Se le basi e le altezze di due piramidi sono due coppie di variabili convergenti, le piramidi sono pure variabili convergenti, ed hanno per limite una piramide, che ha la base e l'altezza equivalenti ai limiti di quelle coppie di variabili.*

**308. Teorema.** — *Un tronco di prisma triangolare è equivalente alla somma di tre piramidi triangolari, che hanno per basi una delle basi del tronco, ed hanno rispettivamente per vertici i tre vertici dell'altra base.*

Sia ABCA'B'C' il tronco di prisma triangolare dato (fig. 262). Il piano A'CB lo scompone nel tetraedro A'ABC e in una piramide quadrangolare, che ha per vertice il punto A' e per base il quadrangolo BCC'B'. Questa piramide è equivalente all'altra ABCC'B', che ha la stessa base ed il vertice A, poichè, essendo la retta AA' parallela al piano BCC'B', i due punti A, A' hanno eguale distanza da esso.

Il piano AB'C scompone la piramide ABB'C'C in due tetraedri AB'BC, AB'C'C. Quest'ultimo, essendo la retta BB' parallela al piano AA'C'C, e quindi essendo i punti B, B' egualmente distanti da questo piano, è equivalente all'altro ABC'C. Dunque:

$$ABCA'B'C' = A'ABC + B'ABC + C'ABC.$$

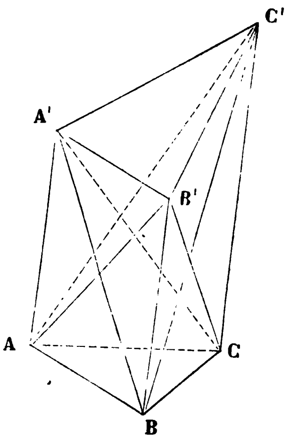


Fig. 262.

**309. Teorema.** — *Un tronco di piramide triangolare a basi parallele è equivalente alla somma di tre piramidi triangolari, che hanno tutte per altezza l'altezza del tronco, e che hanno ordinatamente per basi le due basi del tronco ed un triangolo, avente la base eguale ad un lato di una base del tronco e l'altezza eguale all'altezza corrispondente nell'altra base.*

Sia ABCA'B'C' un tronco di piramide triangolare (fig. 263) a basi parallele. Il piano A'BC lo scompone nel tetraedro A'ABC e nella pi-

ramide quadrangolare, che ha A′ per vertice e CBB′C′ per base. Questa poi è scomposta dal piano A′B′C nei due tetraedri A′B′C′C ed A′B′BC.

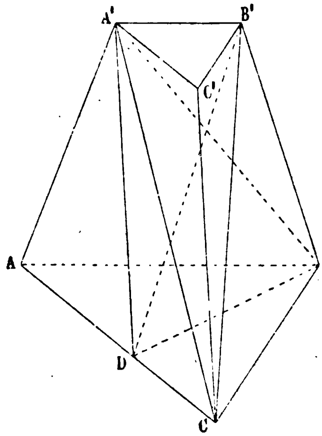


Fig. 263.

Ora la retta condotta per il punto A′ parallela alla retta C′C giace nel piano A′C′CA, e incontra in D la retta AC, di maniera che il tetraedro A′B′BC è equivalente all'altro DB′BC, che ha la stessa base B′BC ed eguale l'altezza corrispondente, perchè la retta A′D è parallela al piano BB′C′C. Si ha dunque:

$$ABCA'B'C' = A'ABC + CA'B'C' + B'BCD.$$

I tetraedri A′ABC, CA′B′C′ sono piramidi triangolari, che hanno per altezza l'altezza del tronco e per basi le basi ABC, A′B′C′ rispettivamente del medesimo. Il tetraedro B′BCD, riguardando B′ come vertice, ha l'altezza del tronco e per base il triangolo BCD, che ha per base DC, eguale al lato A′C′ della base A′B′C′ del tronco, ed ha per altezza corrispondente la stessa altezza dell'altra base ABC.

**Corollario.** — *Un tronco di piramide, o di settore piramidale regolare a basi parallele, è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per altezza l'altezza del tronco, ed hanno ordinatamente per basi le due basi del tronco ed un triangolo, avente la base eguale al perimetro di una delle basi del tronco e l'altezza eguale all'apotema dell'altra base.*

**310. Teorema.** — *Esiste un parallelepipedo rettangolo, equivalente ad un dato poliedro, non intrecciato, avente per base un dato rettangolo.*

Dato un poliedro qualunque, non intrecciato, è possibile scomporlo in piramidi. Infatti se il poliedro è convesso, si può scomporre nelle piramidi, che hanno per vertice un punto interno ad esso ed hanno per basi rispettivamente le facce del medesimo; se il poliedro è concavo, esso viene diviso in tanti poliedri convessi da quei piani delle facce, rispetto ai quali il poliedro non giace tutto da una medesima parte, e quindi, scomponendo ciascuna di queste parti in piramidi, anche il poliedro dato resta scomposto in piramidi. Ora i parallelepipedi delle basi di tutte queste piramidi e dei terzi delle loro altezze sono rispettivamente equivalenti ad esse, e quindi sono pure equivalenti ad esse tutti i parallelepipedi rettangoli, che si possono costruire rispettivamente equivalenti ai primi e aventi per basi il dato rettangolo (§ 290 Pr. 1°). La somma di questi è un parallelepipedo rettangolo equivalente al poliedro dato e avente per base il dato rettangolo.

In tal modo tutti i poliedri non intrecciati si possono ridurre ad una serie di parallelepipedi rispettivamente equivalenti, onde si possono estendere ad essi tutte le proprietà dimostrate per le grandezze di 1ª e 2ª specie.

**311. Teorema.** — *Un poliedro convesso, circoscritto ad una sfera, è equivalente al parallelepipedo della sua superficie e di un terzo del raggio della sfera inscritta.*

Infatti, se si congiunge il centro della sfera con tutti i vertici del poliedro, esso resta scomposto in piramidi, ciascuna delle quali ha per base una delle facce del poliedro e per altezza il raggio della sfera. Siccome poi sappiamo (§ 307 Cor. 1°) che ciascuna piramide è equivalente al parallelepipedo della base e di un terzo della sua altezza, così la somma di tutte quelle piramidi, ossia il poliedro dato, è equivalente al parallelepipedo della somma delle sue facce e di un terzo del raggio della sfera inscritta.

**Corollario.** — *Un poliedro regolare è equivalente al parallelepipedo della sua superficie e di un terzo dell'apotema.*

# CAPITOLO VII

## Equivalenza del circolo e dei corpi rotondi.

### 1. — EQUIVALENZA DEL CIRCOLO.

**312. Teorema.** — *Un settore circolare è il limite verso il quale convergono i settori poligonali regolari di egual numero di lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto, che variano, raddoppiando successivamente e indefinitamente questo numero.*

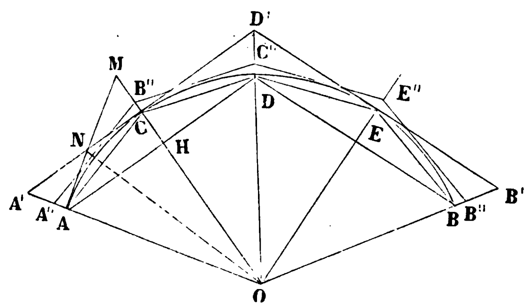



Fig. 264.

Dividiamo il settore circolare dato AOB (figura 264) in $n$ parti eguali; inscriviamo e circoscriviamo ad esso i settori poligonali regolari dello stesso numero $n$ di lati ed indichiamo con $S_n$, $S'_n$ le superficie di questi settori poligonali. Se il settore OAD è una delle $n$ parti eguali in cui è stato diviso il settore dato, AD la corda del suo arco, A'D' la tangente parallela, si ha evidentemente

$$S'_n - S_n = n \,.\, AA'D'D.$$

Il raggio OC, che termina al punto di contatto C della tangente A'D', dividendo per metà la corda AD e il segmento A'D', il quadrilatero AA'D'D è il doppio del quadrilatero AA'CH, e perciò è

$$S'_n - S_n = 2n \,.\, AA'CH.$$

Se conduciamo la tangente in A all'arco AC, ed M è il punto d'incontro di essa col prolungamento di OC, si vede facilmente che i due

triangoli CAA', ACM sono eguali, e perciò è AA'CH = HAM, di guisa che si ha

$$S'_n - S_n = 2n \,.\, AHM.$$

Prendendo ora a considerare i settori poligonali regolari di $2n$ lati, l'uno inscritto e l'altro circoscritto al settore circolare dato, si dimostra nello stesso modo che sia

$$S'_{2n} - S_{2n} = 2n \,.\, CNA.$$

Nel triangolo rettangolo NCM si ha NM>NC. Essendo NC=NA (§ 193 Cor. 1°) risulta MA>2.NA, e quindi (§ 250) CMA > 2.CNA ed a più forte ragione HMA > 2.CNA, ovvero $CNA < \frac{1}{2} AHM$.

A causa della equivalenza precedente si ha dunque

$$S'_{2n} - S_{2n} < \frac{1}{2}(2n.\, AHM),$$

e quindi

$$S'_{2n} - S_{2n} < \frac{1}{2}(S'_n - S_n).$$

Ripetendo successivamente la stessa dimostrazione, si giunge così a provare che

$$S'_{4n} - S_{4n} < \frac{1}{2}(S'_{2n} - S_{2n})$$

$$S'_{8n} - S_{8n} < \frac{1}{2}(S'_{4n} - S_{4n})$$

. . . . . . . . . . . . . . . . ,

d'onde si conclude, che la differenza fra gli stati corrispondenti delle due variabili S' ed S è indefinitivamente decrescente (§ 293 Teor. 3°). Allora le due variabili considerate sono convergenti ed ammettono un limite, che è il settore circolare dato, il quale è sempre maggiore di $S_n$ e minore di $S'_n$.

**Corollario.** — *Un cerchio è il limite, verso il quale convergono i poligoni regolari, l'uno inscritto e l'altro circoscritto, di egual numero di lati, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero dei loro lati.*

Infatti il cerchio si può riguardare come un settore, i cui lati coincidono, formando un angolo eguale ad un giro.

**313. Teorema.** — *Due linee poligonali regolari di egual numero di lati, l'una circoscritta l'altra inscritta ad un dato arco, che variano in modo che si raddoppi continuamente e indefinitamente il numero dei loro lati, sono due variabili convergenti.*

Costruiamo un rettangolo ABDC (fig. 265), che abbia un lato AB eguale al perimetro di una linea poligonale regolare circoscritta all'arco dato, e che abbia per altezza la metà del raggio del circolo. Esso è equivalente al settore poligonale circoscritto.

Parimenti si costruisca un rettangolo AB′D′C′, che abbia un lato AB′ eguale al perimetro della linea poligonale regolare di egual numero di lati inscritta, e che abbia l'altezza AC′ eguale alla metà del suo apotema. Esso è equivalente al settore poligonale inscritto. Unito C con B′, dal punto C′ si tiri la parallela a CB′, la quale taglierà il lato opposto AB in un punto B″, situato da parte opposta del punto B rispetto a B′. Il rettangolo ACD″B″ è equivalente (§ 255 Pr. 1°) al rettangolo AC′D′B′.

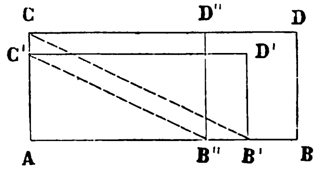



Fig. 265.

Se ora raddoppiamo successivamente il numero dei lati delle spezzate regolari, circoscritta ed inscritta all'arco AB, i settori corrispondenti, e quindi anche i rettangoli ABDC, AB″D″C equivalenti ad essi formano due variabili convergenti, e perciò le basi rispettive AB, AB″ sono pure due variabili convergenti, (§ 301 Cor. 1°), che avranno un limite AL.

Siccome poi è AB $>$ AB′, AB′ $>$ AB″, è chiaro che

$$AB - AB' < AB - AB'',$$

e poichè la differenza AB — AB″ è indefinitamente decrescente, lo è pure, a più forte ragione, la differenza AB — AB′, e quindi AB, AB′, perimetri delle due linee poligonali regolari di egual numero di lati, l'una inscritta e l'altra circoscritta sono variabili convergenti.

**Corollario.** — *I perimetri dei poligoni regolari di egual numero di lati, l'uno inscritto e l'altro circoscritto ad un circolo, che variano in modo che si raddoppi continuamente e indefinitamente il numero dei loro lati, sono due variabili convergenti.*

**314.** Raddoppiando successivamente il numero dei lati di una spezzata regolare inscritta o circoscritta ad un arco, cresce senza fine il numero dei punti, che la spezzata ha in comune coll'arco, mentre diminuisce indefinitamente la distanza fra due consecutivi di tali punti, cosicchè la spezzata tende a confondersi rapidamente coll'arco. Queste considerazioni e il teorema precedente ci inducono ad ammettere la seguente

**Definizione.** — Il segmento, limite dei perimetri di due linee poligonali regolari di egual numero di lati, una circoscritta l'altra inscritta ad un arco, e che variano in modo che si raddoppi continuamente e indefinitamente il numero dei loro lati, si dice *arco rettificato*.

In particolare diremo che il limite dei perimetri dei poligoni regolari di egual numero di lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad esso, che variano in modo che si raddoppi continuamente e indefinitamente il numero dei lati, è il *circolo rettificato*.

**Corollari.** — 1°. *Un settore è equivalente al rettangolo dell'arco rettificato, che lo limita, e della metà del raggio.*

2°. *Un cerchio è equivalente al rettangolo del circolo rettificato, che lo racchiude, e della metà del raggio.*

**315. Teoremi.** — 1°. *Se tre triangoli sono equiangoli fra loro, ed un lato del primo è eguale alla somma dei due lati corrispondenti degli altri*

*due, anche un altro lato del primo è eguale alla somma dei due lati corrispondenti degli altri due.*

Essendo OAC, OA′C′, A′AD tre triangoli equiangoli fra loro, tali che sia OA$\equiv$OA′ + A′A; disponiamoli in modo che gli ultimi due si dispongano sul primo nel modo indicato dalla figura 266. Risulta A′C′ parallelo ad AC e A′D parallelo ad OC, di guisa che la figura C′A′DC è un parallelogrammo, nel quale è A′D$\equiv$C′C e C′A′$\equiv$CD. Ne segue che è OC$\equiv$OC′ + A′D e CA$\equiv$C′A′ + DA.

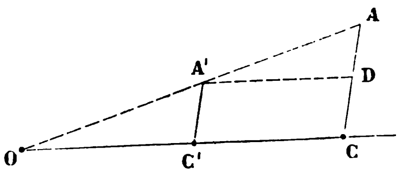


Fig. 266.

2°. *Se tre archi di circolo sono compresi in angoli al centro eguali, e il raggio del primo è eguale alla somma dei raggi degli altri due, il perimetro di una spezzata regolare inscritta, o circoscritta, nel primo è la somma dei perimetri delle spezzate regolari di egual numero di lati inscritte, o circoscritte, negli altri due.*

Indichiamo con R, R′, R″ i raggi dei tre archi, compresi in angoli al centro eguali, con $l_n$, $l'_n$, $l''_n$, i lati delle spezzate regolari di $n$ lati in essi inscritte, con $p_n$, $p'_n$, $p''_n$ i loro perimetri.

Se consideriamo i tre triangoli formati da un lato di queste spezzate e dai raggi che terminano ai suoi estremi, si ha che, essendo per ipotesi R$\equiv$R′ + R″, deve pure essere $l_n \equiv l'_n + l''_n$, e quindi

$$n.\, l_n \equiv n.\, l'_n + n.\, l'',$$

ossia

$$p_n \equiv p'_n + p''_n.$$

In modo simile si dimostra che, se $P_n$, $P'_n$, $P''_n$ sono i perimetri delle spezzate regolari di $n$ lati circoscritte ai tre archi, deve essere

$$P_n \equiv P'_n + P''_n.$$

3°. *Se tre archi di circolo sono compresi in angoli al centro eguali, e il raggio del primo è la somma dei raggi degli altri due, il primo arco è equivalente alla somma degli altri due archi.*

Sieno $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ tre archi, i cui raggi R, R′, R″ verificano la condizione

$$R \equiv R' + R''.$$

Indichiamo con $P_n$, $p_n$; $P'_n$, $p'_n$; $P''$, $p''_n$ i perimetri delle spezzate regolari di $n$ lati circoscritte e inscritte ad $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$ rispettivamente. Siccome

$$P_n \equiv P'_n + P''_h$$
$$p \equiv p'_n + p''_n,$$

e

$$\alpha = lim. (P_n, p_n), \; \alpha' = lim. (P'_n, p'_n), \; \alpha'' = lim. (P''_n, p''_n),$$

si ha pure

$$\alpha = \alpha' + \alpha''$$

**Corollari.** — 1°. *Se due archi sono compresi in angoli al centro eguali, il primo è maggiore, equivalente o minore del secondo, secondo che il raggio del primo è maggiore, equivalente o minore del secondo.*

2°. *Se* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *sono* n + 1 *archi, compresi in angoli al centro eguali, e il raggio* R *del primo è la somma dei raggi* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *degli altri, anche il primo arco* $\alpha$ *è la somma degli archi* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

3°. *Se due archi sono compresi in angoli al centro eguali, e il raggio del primo è multiplo, secondo il numero* n, *del raggio del secondo, anche il primo arco è equivalente ad un multiplo, secondo il numero* n, *del secondo.*

4°. *Se* n + 1 *archi* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *sono compresi in angoli al centro eguali, e i loro raggi* $R, R_1, R_2 \ldots R_n$ *verificano la condizione*

$$n \,.\, R \equiv R_1 + R_2 + \ldots + R_n \,,$$

*si ha pure*

$$n \,.\, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \,.$$

5°. *Un circolo è maggiore, equivalente o minore di un altro, secondo che il suo raggio è maggiore, eguale o minore del raggio dell'altro.*

6°. *Se il raggio di un circolo è somma dei raggi di altri* n *circoli, anche il primo circolo è equivalente alla somma degli* n *altri circoli.*

7°. *Se il raggio di un circolo è multiplo secondo* n *del raggio di un altro circolo, anche il primo circolo è equivalente ad un multiplo secondo* n *del secondo circolo.*

8°. *Se* $C, C_1, C_2, \ldots C_n$ *sono* n + 1 *circoli, tali che i loro raggi* $R, R_1, R_2 \ldots R_n$ *verifichino la condizione*

$$n \,.\, R \equiv R_1 + R_2 + \ldots + R_n \,,$$

*si ha pure*

$$n \,.\, C = C + C_2 + \ldots + C_n \,.$$

**316. Definizione.** — Dicesi *settore anulare* la parte di corona circolare compresa in un angolo al centro; e dicesi *altezza di un settore anulare* la differenza dei raggi dei due archi, che lo limitano.

**Teorema.** — *Un settore anulare è equivalente al rettangolo della semisomma dei due archi rettificati, che lo limitano, e dell'altezza.*

Dividiamo (fig. 267) l'angolo al centro $\widehat{AOE}$, che comprende il settore anulare dato S, in 2, 4, 8,.... parti eguali finchè costruendo mediante queste divisioni le spezzate regolari inscritte e circoscritte agli archi AE, FN, si trovi che la differenza fra gli apotemi delle spezzate regolari circoscritta e inscritta all'arco di raggio maggiore AE sia più piccola della differenza dei raggi dei due circoli, che limitano la corona circolare. È allora evidente che il settore anulare considerato, che chiameremo S, è maggiore del poligono ABCDE N'M'H'P'F', ed è minore del poligono A'B'C'D'E' NMHPF. Ma ciascuno di questi due poligoni è una somma di trapezi eguali; perciò indicando rispettiva-

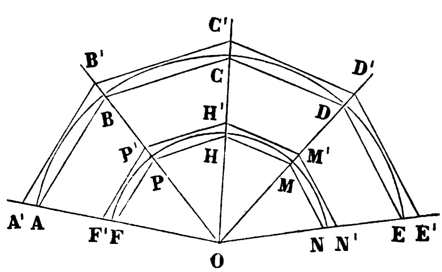



Fig. 267.

mente con $P_n$, $p_n$ i perimetri delle spezzate regolari di $n$ lati l'una circoscritta e l'altra inscritta all'arco di raggio maggiore R, con $P'_n$, $p'_n$ i perimetri delle spezzate regolari di $n$ lati l'una circoscritta e l'altra inscritta all'arco di raggio minore R', finalmente con $a_n$, $a'_n$ gli apotemi delle spezzate inscritte suddette, si ha che il primo dei poligoni sunnominati è equivalente al rettangolo di $\frac{1}{2}(P'_n + p_n)$ e di $(a_n - R')$, ed il secondo è equivalente al rettangolo di $\frac{1}{2}(P_n + p'_n)$ e di $(R - a'_n)$.

Possiamo dunque scrivere

$$\overline{\frac{1}{2}(P_n + p'_n).\,(R - a'_n)} > S > \overline{\frac{1}{2}(P'_n + p_n).\,(a_n - R')}.$$

Ora raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero $n$, tanto la differenza (§ 313 Teor.)

$$\frac{1}{2}(P_n + p'_n) - \frac{1}{2}(P'_n + p_n) \equiv \frac{1}{2}\left\{(P_n - p_n) - (P'_n - p'_n)\right\}$$

quanto la differenza (§ 294 Teor. 1°)

$$(R - a'_n) - (a_n - R') \equiv (R - a_n) + (R' - a'_n)$$

decrescono indefinitamente, e perciò (§ 294 Cor. 1°) decresce pure indefinitamente la differenza dei due rettangoli, fra i quali è compreso S; dunque S è un loro limite. Ma i due rettangoli suddetti se si indicano con $\alpha$ ed $\alpha'$ gli archi rettificati, che comprendono il settore anulare considerato, hanno anche per limite il rettangolo di $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ e di $R - R'$; dunque

$$S = \overline{\frac{1}{2}(\alpha + \alpha'),\,(R - R')}.$$

**Corollario.** — *Una corona circolare è equivalente al rettangolo della semisomma dei due circoli rettificati, che la limitano, e della differenza dei loro raggi.*

**317. Teorema.** — *Se la differenza dei raggi di due settori circolari, compresi in angoli al centro eguali, decresce indefinitamente, decresce pure indefinitamente la differenza dei due settori e quella dei loro archi; e viceversa.*

1°. La differenza fra due settori circolari, compresi in angoli al centro eguali, è un settore anulare, il quale è equivalente al rettangolo della semisomma dei due archi, che lo limitano, e della differenza dei loro raggi. Dunque se questa differenza decresce indefinitamente, anche il settore anulare, ossia la differenza dei due settori circolari dati, decresce (§ 294 Teor. 3°) indefinitamente. Inoltre siccome i due settori circolari dati sono rispettivamente equivalenti a due rettangoli, ciascuno dei quali ha per lati il suo arco rettificato e la metà del suo raggio: così se la differenza dei raggi decresce indefinitamente, decresce pure indefinitamente, per quello che abbiamo detto, la differenza dei due rettangoli, ed allora (§ 294 Cor. 2°) anche la differenza degli altri due lati dei rettangoli, cioè dei due archi rettificati, decresce indefinitamente.

2°. Viceversa, se la differenza di due archi, compresi in angoli al centro eguali, e la differenza dei settori corrispondenti decrescono indefinitamente, decresce pure indefinitamente la differenza dei rettangoli equivalenti a quei settori, ed allora anche la differenza degli altri due lati dei rettangoli, ossia la differenza dei due raggi, decresce indefinitamente.

**Corollario.** — *Se la differenza dei raggi di due circoli decresce indefinitamente, decrescono pure indefinitamente la differenza dei due cerchi e quella dei circoli; e viceversa.*

**318. Teorema.** — *Se i raggi di due settori, compresi in angoli al centro eguali, sono variabili convergenti, anche i due settori e gli archi corrispondenti sono coppie di variabili convergenti, ed hanno per limite rispettivamente il settore e l'arco compresi nello stesso angolo al centro, e aventi per raggio il limite dei raggi dei due settori dati.*

Infatti sappiamo che, dati due settori (o due archi) compresi in angoli al centro eguali, il primo è maggiore o minore dell'altro, secondo che il raggio del primo è maggiore o minore del raggio dell'altro; inoltre sappiamo pure che, quando la differenza fra i raggi dei due settori decresce indefinitamente, anche la differenza fra i due settori (o quella dei due archi) decresce indefinitamente, perciò il teorema resta dimostrato.

**Corollario.** — *Se i raggi di due circoli sono variabili convergenti, anche i due cerchi e i circoli corrispondenti sono variabili convergenti, ed hanno per limiti rispettivamente il cerchio ed il circolo, aventi per raggio il limite dei raggi dei due circoli dati.*

## 2. — EQUIVALENZA DEL SOLIDO E DELLA SUPERFICIE DEL CILINDRO.

**319. Teorema.** — *Un settore cilindrico è il limite dei settori prismatici regolari di egual numero di facce laterali l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad esso, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle loro facce laterali.*

Infatti, è evidente che il settore cilindrico è maggiore di ogni settore prismatico inscritto e minore di ogni settore prismatico circoscritto. Inoltre, presi a considerare un settore prismatico regolare inscritto ed uno circoscritto di egual numero di facce laterali, è chiaro che, se si fanno variare, raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle loro facce laterali, si ottengono due variabili convergenti, perchè hanno l'altezza eguale a quella del settore cilindrico e per basi due settori poligonali uno inscritto e l'altro circoscritto al settore circolare base, i quali sono variabili convergenti. Ne segue che il settore cilindrico dato, essendo compreso fra i due settori prismatici suddetti, è il loro limite.

**Corollari.** — 1°. *Un settore cilindrico è equivalente ad un parallelepipedo, che ha la stessa altezza del settore cilindrico ed ha base equivalente a quella del settore cilindrico.*

2°. *Un cilindro è il limite dei prismi regolari l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad esso di egual numero di facce laterali, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente questo numero, ed è equivalente ad un parallelepipedo, che ha la stessa altezza del cilindro e base equivalente a quella del cilindro.*

**320. Teorema.** — *Le superficie laterali dei settori prismatici regolari di egual numero di facce, l'uno inscritto e l'altro circoscritto ad un settore cilindrico, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle suddette facce, sono due variabili convergenti.*

Infatti, le superficie laterali di due settori prismatici, l'uno circoscritto e l'altro inscritto al settore cilindrico dato, sono rispettivamente equivalenti ai rettangoli dell'altezza comune e dei perimetri della spezzata regolare di una base. Siccome poi questi rettangoli hanno un lato comune e costante, che è l'altezza del settore cilindrico dato, ed hanno gli altri due lati che sono variabili convergenti, aventi per limite l'arco rettificato di una delle basi del settore cilindrico, anche i due rettangoli (§ 313) sono variabili convergenti, ed hanno per limite il rettangolo dell'altezza e dell'arco rettificato di una base del settore cilindrico dato.

**Corollario 1°.** — *Le superficie laterali dei prismi regolari di egual numero di facce, l'uno inscritto e l'altro circoscritto ad un cilindro, che variano raddoppiando successivamente e indefinitivamente il numero delle suddette facce, sono due variabili convergenti.*

**Definizione.** — La superficie limite delle superficie laterali dei settori prismatici (o prismi) regolari di egual numero di facce, l'una inscritta e l'altra circoscritta, ad un settore cilindrico (o cilindro), che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle facce suddette, si dice *superficie sviluppata* della striscia cilindrica (o del cilindro).

**Corollario 2°.** — *La superficie sviluppata di una striscia cilindrica (o di un cilindro) è equivalente al rettangolo dell'arco (o circolo) di una base rettificato e dell'altezza.*

**321. Teorema.** — *Il solido di un settore cilindrico è equivalente ad un parallelepipedo, che ha la base equivalente alla superficie sviluppata della corrispondente striscia e l'altezza eguale alla metà del suo raggio.*

Infatti, sappiamo che un settore cilindrico è equivalente ad un parallelepipedo, che ha la stessa altezza del settore cilindrico e che ha la base equivalente alla sua base. Questa è un settore circolare, equivalente al rettangolo del suo arco rettificato e della metà del raggio; perciò il settore cilindrico è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, che ha per lati l'altezza del settore, un segmento equivalente all'arco di una sua base, e metà del raggio. Riguardando in questo come altezza la metà del raggio, la sua base è il rettangolo dell'arco rettificato e dell'altezza del settore cilindrico, che è equivalente alla superficie della striscia appartenente al settore stesso.

**Corollario.** — *Il solido di un cilindro è equivalente al parallelepipedo della sua superficie sviluppata e della metà del suo raggio.*

**322. Teoremi.** — *1°. Se due settori cilindrici, compresi in diedri all'asse eguali, (o due cilindri) hanno eguale altezza, e la differenza dei loro raggi decresce indefinitamente, decrescono pure indefinitamente la differenza dei loro solidi e quella delle loro superficie laterali.*

Poichè infatti un settore cilindrico è equivalente al parallelepipedo del settore circolare base e dell'altezza, è chiaro che due settori cilindrici, che si trovino nelle condizioni dell'enunciato del teorema, sono rispettivamente equivalenti a due parallelepipedi di eguale altezza, tali che la differenza delle loro basi decresce indefinitamente. Ne segue che anche la differenza dei due parallelepipedi, la quale è equivalente a quella dei due settori cilindrici, decresce indefinitamente.

Analogamente, essendo la superficie laterale sviluppata di un settore cilindrico equivalente al rettangolo dell'arco base e dell'altezza, le superficie laterali di due settori, che si trovino nelle condizioni date dall'enunciato del teorema, sono equivalenti rispettivamente a due rettangoli di eguale altezza, tali che le differenze delle due basi decresce indefinitamente. Perciò la differenza dei due rettangoli, che è equivalente a quella delle superficie laterali dei due settori, decresce indefinitamente.

*2°. Se due settori cilindrici, compresi in diedri all'asse eguali, (o due cilindri) hanno raggi eguali, e la differenza delle loro altezze decresce indefinitamente, decrescono pure indefinitamente la differenza dei loro solidi e quella delle loro superficie laterali.*

*3°. Se tanto la differenza delle altezze, quanto quella dei raggi di due settori cilindrici, compresi in due diedri all'asse eguali, (o di due cilindri) decrescono indefinitamente, anche la differenza dei loro solidi e quella delle loro superficie laterali decrescono indefinitamente.*

Questi ultimi due teoremi si dimostrano come il primo.

**323. Teorema.** — *Se le sezioni principali di due cilindri sono equivalenti, sono pure equivalenti le porzioni delle loro superficie laterali, comprese in diedri all'asse eguali.*

Sieno dati due cilindri, aventi le sezioni principali equivalenti, ed in essi si considerino due settori cilindrici compresi in due diedri all'asse eguali. In questi settori s'inscrivano due settori prismatici, e se ne circoscrivano altri due di egual numero di facce laterali. Le superficie laterali dei due settori prismatici inscritti sono equivalenti, e quelle dei due settori prismatici circoscritti sono pure equivalenti (§ 277 Cor. 1°). Se ora facciamo variare i settori prismatici inscritti e circoscritti suddetti, raddoppiando continuamente il numero delle loro facce laterali, le superficie dei settori prismatici, l'uno inscritto e l'altro circoscritto all'uno dei settori cilindrici dati, e le superficie laterali dei settori prismatici, l'uno inscritto e l'altro circoscritto all'altro settore cilindrico dato, sono due coppie di variabili convergenti equivalenti fra loro, e perciò i loro limiti, cioè le superficie laterali dei due settori cilindrici dati, sono equivalenti.

**Corollari.** — *1°. Se le sezioni principali di due cilindri sono equivalenti, anche le superficie laterali dei medesimi sono equivalenti.*

*2°. Se* R, R′ *sono due segmenti, tali che il quadrato di* R *sia equivalente ad* n *volte il quadrato di* R′, *anche il cerchio di raggio* R *è equivalente ad* n *volte il cerchio di raggio* R′.

Infatti, essendo per ipotesi

$$\overline{R.R} = \overline{nR'.R'},$$

e quindi anche

$$\frac{1}{2}\overline{R.R} = \frac{1}{2}\overline{nR.R'},$$

la superficie laterale del cilindro, che ha R per raggio e $\frac{1}{2}$ R per altezza, è equivalente a quella del cilindro che ha R′ per raggio e $\frac{1}{2}n$R′ per altezza, ovvero è equivalente ad $n$ volte la superficie laterale del cilindro che ha R′ per raggio e $\frac{1}{2}$ R′ per altezza. Ma è facile vedere che la superficie laterale di un cilindro, che ha R per raggio e $\frac{1}{2}$ R per altezza, è equivalente al cerchio di raggio R, e quella del cilindro, che ha R′ per raggio e $\frac{1}{2}$ R′ per altezza, è equivalente al cerchio di raggio R′; dunque il cerchio di raggio R è equivalente ad $n$ volte il cerchio di raggio R′.

### 3. — EQUIVALENZA DELLA SUPERFICIE E DEL SOLIDO DEL CONO ROTONDO.

**324. Teorema.** — *Un settore conico è il limite dei settori piramidali regolari di egual numero di facce laterali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad esso, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle facce laterali.*

Dimostrazione analoga a quella del § 319.

**Corollari.** — *1°. Un settore conico è equivalente ad un parallelepipedo. che ha la base equivalente a quella del settore conico e l'altezza eguale ad un terzo di quella del settore stesso.*

*2°. Un cono rotondo è il limite delle piramidi regolari di egual numero di facce laterali, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad esso, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle facce, ed è equivalente ad un parallelepipedo, che ha la base equivalente a quella del cono e l'altezza eguale ad un terzo di quella del cono medesimo.*

*3°. Un cono rotondo è equivalente ad un cilindro rotondo, che ha la stessa base del cono ed ha per altezza un terzo dell'altezza del cono.*

**325. Teorema.** — *Le superficie laterali dei settori piramidali regolari di egual numero di facce laterali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad un settore conico, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero dello suddette facce, sono due variabili convergenti.*

Infatti le superficie laterali di due settori piramidali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto al settore conico dato, sono rispettivamente equivalenti ai rettangoli del perimetro della spezzata regolare della base e della metà dell'apotema corrispondente. Siccome poi questi rettangoli hanno una coppia di lati variabili, che convergono verso l'arco rettificato della base del settore conico, e una coppia di lati variabili, che convergono verso la metà dell'apotema del settore conico, anche i due rettangoli (§ 301 Cor. 2°) sono variabili convergenti, ed hanno per limite il rettangolo dell'arco rettificato della base del settore conico e della metà del suo apotema.

**Corollario 1°.** — *Le superficie laterali delle piramidi regolari di egual numero di facce laterali, l'una circoscritta e l'altra inscritta ad un cono rotondo, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle suddette facce, sono due variabili convergenti.*

**Definizione.** — Il limite delle superficie laterali delle piramidi (o settori piramidali) regolari di egual numero di facce, l'una circoscritta e l'altra inscritta ad un cono (o settore conico) rotondo, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle suddette facce, si dice *superficie laterale conica (o del settore conico) sviluppata.*

**Corollari.** — 2°. *La superficie laterale sviluppata del cono rotondo (o del settore conico) è equivalente al rettangolo del circolo (o dell'arco) rettificato della base e della metà dell'apotema.*

3°. *La superficie laterale sviluppata del cono rotondo (o del settore conico) è equivalente al rettangolo della sezione media rettificata e dell'apotema.*

**326. Teorema.** — *Un settore tronco-conico rotondo è il limite dei settori tronco-piramidali regolari di egual numero di facce laterali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad esso, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle suddette facce.*

Sia C un settore conico rotondo, e sieno P, P′ due settori piramidali regolari di egual numero di facce laterali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad esso. Un piano parallelo alla base del settore conico, e che ne taglia la superficie laterale, scompone il medesimo in un settore conico rotondo C′ e in un settore tronco-conico rotondo K, e divide ciascuno dei settori piramidali P, P′ in un altro settore piramidale $P_1$, $P'_1$ e in un settore tronco-piramidale T, T′. Ne segue che il settore tronco-conico K è la differenza fra i settori conici C e C′, e i settori tronco-piramidali T, T′ sono le differenze dei settori piramidali dati P, P′; $P_1$, $P'_1$ rispettivamente. Ora siccome i settori conici C, C′ sono i limiti, verso i quali convergono le coppie di settori piramidali P, P′; $P_1$, $P'_1$ al raddoppiarsi successivo del numero delle loro facce laterali, così il settore tronco-conico K, è il limite verso il quale convergono i settori tronco-piramidali T, T′, quando si facciano variare, raddoppiando successivamente il numero delle loro facce laterali.

**Corollari.** — 1°. *Un tronco di cono rotondo è il limite dei tronchi di piramidi regolari di egual numero di facce laterali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad esso, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle suddette facce.*

*2°. Un tronco di cono rotondo (o un settore tronco-conico) è equivalente ad un tronco di piramide (o settore tronco piramidale), che ha la stessa altezza del tronco di cono (o del settore tronco-conico) e le basi rispettivamente equivalenti alle due basi del medesimo.*

**327. Teorema.** — *Le superfici laterali dei settori tronco-piramidali regolari di egual numero di facce laterali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad un settore tronco-conico rotondo, e che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle suddette facce, sono due variabili convergenti.*

Si imiti la dimostrazione del teorema precedente.

**Corollario** *1°. — Le superficie laterali dei tronchi di piramidi regolari di egual numero di facce laterali, l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad un tronco di cono rotondo, e che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle suddette facce, sono due variabili convergenti.*

**Definizione.** — Il limite delle superficie laterali dei tronchi di piramidi regolari (o settori tronco-piramidali), l'uno circoscritto e l'altro inscritto ad un tronco di cono rotondo (o settore tronco-conico), che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero delle facce laterali, si dice *superficie laterale sviluppata del tronco di cono (o del settore tronco-conico).*

**Corollari.** — *2°. La superficie laterale sviluppata di un tronco di cono rotondo è equivalente ad un trapezio, che ha per altezza l'apotema del tronco, ed ha le basi equivalenti alle basi del medesimo.*

*3°. La superficie laterale di un tronco di cono rotondo è equivalente al rettangolo della sua sezione media e dell'altezza.*

**328. Teorema.** — *Il solido di un settore tronco-conico a basi parallele è equivalente alla somma di due settori conici, che hanno per altezza l'altezza del tronco e per basi i due settori circolari basi del tronco rispettivamente, e della sesta parte di un parallelepipedo rettangolo, che ha per lati concorrenti in un vertice l'altezza del tronco, il raggio di una base e l'arco rettificato dell'altra base.*

Infatti il solido di un settore tronco-conico è equivalente al limite dei settori tronco piramidali regolari, l'uno inscritto ad esso e l'altro circoscritto, che variano raddoppiando continuamente e indefinitamente il numero delle loro facce laterali. Uno qualunque di questi settori è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno per altezza l'altezza del tronco e per basi rispettivamente le due basi del tronco e il rettangolo del semiperimetro di una base e dell'apotema dell'altra; e queste tre piramidi hanno appunto per limiti rispettivamente i settori conici, aventi per altezza l'altezza del settore tronco-conico e per basi i settori circolari basi del medesimo, ed un sesto di un parallelepipedo, che ha la stessa altezza del tronco ed ha base equivalente al rettangolo del raggio di una base e dell'arco rettificato dell'altra base; perciò la somma di questi tre solidi è equivalente al settore tronco-conico dato.

**Corollari.** — *1°. Indicando con* a, b *i raggi delle basi di un tronco di cono, con* $\alpha$ *e* $\beta$ *gli archi corrispondenti, con* h *l'altezza e con* S *il suo solido si ha*

$$S = \frac{1}{6} h . \overline{(\overline{a . \alpha} + \overline{b . \beta} + \overline{a . \beta})},$$

$$S = \frac{1}{6} h . \overline{(\overline{a . \alpha} + \overline{b . \beta} + \overline{\alpha . b})}.$$

*2°. Il solido di un tronco di cono è equivalente alla somma di due coni, che hanno la stessa altezza del tronco e le basi rispettivamente eguali alle sue basi, e della sesta parte di un parallelepipedo rettangolo, che ha per spigoli concorrenti in un vertice l'altezza del tronco, il raggio di una base e il circolo rettificato dall'altra base.*

**329. Teorema.** — *Se due coni sono tali, che il rettangolo del raggio della base dell'uno e del suo apotema sia equivalente al rettangolo del raggio della base e dell'apotema dell'altro, sono pure equivalenti le parti delle loro superficie laterali, comprese in due diedri all'asse eguali.*

Infatti, se si costruiscono due cilindri, aventi le basi eguali a quelle dei due coni e le altezze rispettivamente eguali alle metà degli apotemi di questi, le parti di superficie coniche laterali, comprese in un dato diedro all'asse, sono rispettivamente equivalenti alle strisce cilindriche appartenenti ai cilindri suddetti, compresi nello stesso diedro all'asse, le quali sono equivalenti fra loro (§ 323 Teor.)

**Corollario.** — *Se due coni sono tali, che il rettangolo del raggio della base e dell'apotema dell'uno sia equivalente al rettangolo del raggio della base e dell'apotema dell'altro, le loro superficie laterali sono equivalenti.*

**330. Teorema.** — *Se un piano rota di un angolo* $\alpha$ *attorno ad una sua retta* a, *un segmento, situato in esso piano, e non tagliato dalla retta* a, *genera una superficie equivalente al rettangolo del segmento stesso e dell'arco generato dal suo punto medio.*

La superficie generata dal segmento considerato, rotando di un angolo $\alpha$ attorno ad $a$ è un settore conico, se un suo estremo giace in $a$, o è un settore tronco-conico o cilindrico, se il segmento non ha nessuno dei suoi estremi sulla retta $a$. In tutti questi casi abbiamo già visto che tale superficie è equivalente al rettangolo dell'arco rettificato della sezione media e del segmento considerato.

**Corollario.** — *Se un piano rota di un angolo* $\alpha$ *attorno ad una sua retta* a, *due o più segmenti eguali, situati in esso piano ed aventi lo stesso punto medio, generano superficie equivalenti.*

## 4. — EQUIVALENZA DELLA SUPERFICIE E DEL SOLIDO DELLA SFERA.

**331. Teorema.** — *Se* AB *è un segmento tangente ad un semicircolo, che ha per punto di mezzo il punto di contatto, e che non è tagliato dalla retta del diametro, e* A′B′ *è la proiezione di* AB *sulla tangente al semicircolo parallela al diametro di questo, la superficie generata da* AB *e da*

*A'B', mentre il semipiano della figura rota di un angolo α attorno al diametro, sono equivalenti.*

Per il punto di mezzo M del segmento AB (fig. 268), che è anche il punto di contatto di AB colla data semiconferenza, si conduca una retta parallela al diametro di questa, e su di essa si prendano due segmenti $MA_1$, $MB_1$ eguali a MA e a MB. Poichè i due segmenti AB, $A_1B_1$ sono eguali, ed hanno lo stesso punto di mezzo, le superficie generate da essi, mentre il semipiano della figura rota di un angolo α attorno al diametro del semicircolo (§ 330 Cor.), sono equivalenti.

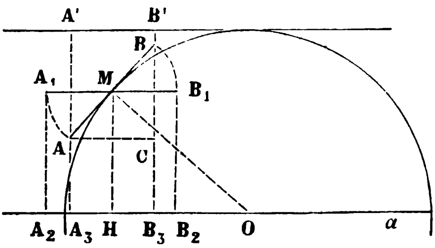


Fig. 268.

Congiungiamo ora il punto M col centro O del semicircolo, e conduciamo la MH perpendicolare alla retta $a$, e la AC parallela ad $a$. I due triangoli MOH, ABC hanno gli angoli $M\widehat{H}O$, $A\widehat{C}B$ retti, e gli angoli $B\widehat{A}C$, $O\widehat{M}H$ eguali, perchè hanno i lati rispettivamente perpendicolari, e sono ambedue acuti; perciò (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{AB \,.\, MH} = \overline{AC \,.\, MO},$$

ossia, essendo $A_3B_3$, $A_2B_2$ le proiezioni di AB e $A_1B_1$ su $a$, i due rettangoli $A_1B_1B_2A_2$, $A'B'B_3A_3$ sono equivalenti. Le superficie generate dai segmenti $A_1B_1$, A'B', mentre il semipiano della figura rota di un angolo α, sono dunque equivalenti (§ 323 Teor.), e perciò sono pure equivalenti le superficie generate nella rotazione suddetta dai segmenti AB, A'B'. (§ 330 Cor.)

**Corollario.** — *Se una spezzata regolare è circoscritta ad un arco, appartenente ad un semicircolo, la superficie da essa generata, facendo rotare di un angolo α il semipiano della figura attorno al diametro del semicircolo, è equivalente alla superficie generata nella rotazione suddetta dalla proiezione della spezzata sulla tangente parallela al diametro.*

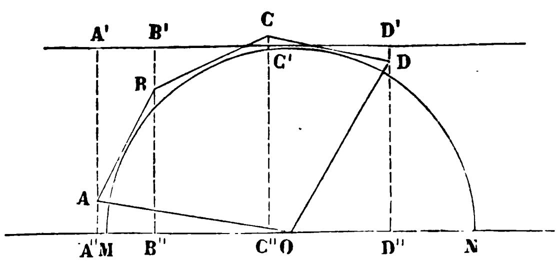


Fig. 269.

Se infatti ABCD (fig. 269) è la spezzata regolare circoscritta ad un arco appartenente al semicircolo MC'N e A',B',C',D' sono le proiezioni dei suoi vertici sulla tangente parallela al diametro MN, le superficie generate dai segmenti AB,BC,CD, mentre il semipiano della figura rota di un

angolo $\alpha$ attorno alla retta MN, sono rispettivamente equivalenti alle superficie generate dai segmenti A′B′, B′C′, C′D′ nella rotazione suddetta, e perciò le superficie generate dalla spezzata ABCD e dal segmento A′D′ nella rotazione suddetta sono equivalenti.

**332. Teorema.** — *Le superficie generate dalle spezzate regolari dello stesso numero di lati, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad un arco, appartenente ad un semicircolo, che rotano intorno al diametro di questo, e che variano, raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero dei loro lati, sono due grandezze variabili convergenti.*

Infatti, essendo ABCDE, $A'B_1C_1D_1E'$ (fig. 270) due spezzate regolari, l'una circoscritta l'altra inscritta ad un arco A′E′, e $A_1E_1$, $A'_1E'_1$ le loro proiezioni sulle tangenti ai semicircoli in esse inscritti parallele al diametro, le superficie da esse generate, mentre il piano rota di un angolo $\alpha$

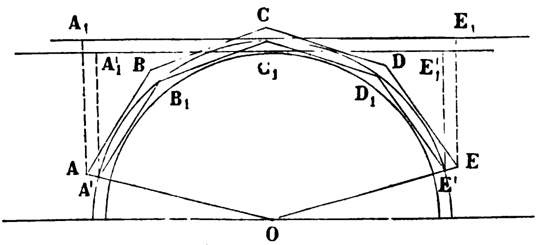



Fig. 270.

attorno al diametro, sono rispettivamente equivalenti alle striscie cilindriche generate nella rotazione suddetta da $A_1E_1$ e $A'_1E'_1$.

La differenza fra $A_1E_1$ e $A'_1E'_1$, e quella fra i raggi dei due semicircoli, decresce indefinitamente al raddoppiarsi del numero dei lati delle spezzate, perciò (§ 322 Teor. 3°) anche le strisce cilindriche suddette sono variabili convergenti.

**Definizione.** — La superficie limite delle superficie generate da due spezzate regolari di egual numero di lati, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad un arco appartenente ad una semicirconferenza, che variano raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero dei loro lati, mentre il piano della figura rota di un angolo $\alpha$ attorno al diametro, si dice che è la *superficie sviluppata* generata dall'arco medesimo nella rotazione suddetta.

**Corollario.** — *La superficie generata da un arco appartenente ad un semicircolo, mentre il piano della figura rota di un angolo $\alpha$ attorno al diametro di questo, è equivalente alla superficie generata nella rotazione suddetta dalla sua proiezione sulla tangente parallela al diametro.*

**333. Teorema.** — *Se ad una sfera si circoscrive un cilindro, le porzioni di superficie sferica e di superficie cilindrica, comprese in un diedro all'asse del cilindro e fra due piani perpendicolari all'asse medesimo, condotti per due suoi punti qualunque, sono equivalenti.*

Questo teorema discende immediatamente dal corollario precedente.

**Corollari.** — *1°. La superficie di una sfera è equivalente alla superficie laterale di un cilindro ad essa circoscritto, ovvero al rettangolo di un circolo massimo e del diametro, ovvero a quattro cerchi massimi.*

*2°. La superficie di una zona, o di una calotta, è equivalente al rettangolo di un circolo massimo e dell'altezza.*

*3°. La superficie di un fuso sferico è equivalente al rettangolo del suo arco equatoriale e del diametro.*

Se indichiamo con $\theta$ il diedro all'asse considerato nel teorema precedente, con $\alpha, \beta$ i due piani perpendicolari al medesimo, i tre corollari enunciati discendono immediatamente dal teorema precedente, supponendo per il 1° che $\theta$ sia eguale ad un diedro piatto e $\alpha, \beta$ siano condotti per gli estremi dell'asse; per il 2° che $\theta$ sia un diedro piatto e i piani $\alpha, \beta$ sieno condotti per due punti qualunque dell'asse; per il 3° che $\theta$ sia un diedro qualunque e $\alpha, \beta$ sieno condotti per gli estremi dell'asse.

*4°. Se $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ sono gli archi equatoriali corrispondenti agli* n *angoli di un poligono sferico convesso di* n *lati, il poligono è equivalente al rettangolo del raggio e della somma $\alpha + \beta + \gamma + \ldots.$ diminuita di* $n - 2$ *semicircoli massimi.*

**334. Teorema.** — *Se il piano di un triangolo rota di un angolo a attorno ad una retta, che passa per un vertice del triangolo e non ha nessun punto interno ad esso, il solido generato dal triangolo in questa rotazione è equivalente ad un terzo di un parallelepipedo, che ha la base equivalente alla superficie generata dal lato opposto al vertice fisso e l'altezza eguale all'altezza del triangolo, corrispondente a questo lato.*

Sia *a* la retta fissa, ABC il triangolo, che ha un vertice C su di essa, CH la distanza del vertice C dal lato AB. Si vuol dimostrare che

$$\overline{\text{Sol.}(ABC) = \text{Sup.}(AB) \cdot \frac{1}{3}\,CH.}$$

Il triangolo ABC può avere tre posizioni diverse rispetto all'asse *a*.

1°. Uno dei lati, per es. AC, coincide coll'asse (fig. 271). Allora, se BA risulta perpendicolare ad *a*, l'altezza CH coincide con CA ed il

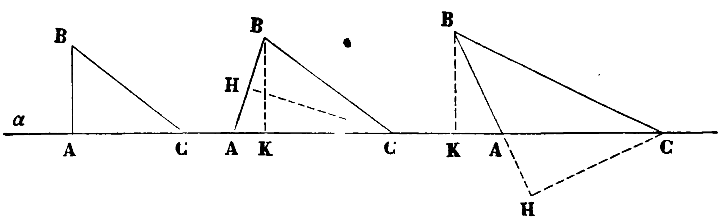



Fig. 271.

solido generato da ABC è un settore conico, la base del quale ha per raggio AB e l'altezza è CH. Perciò (§ 324 Cor. 1°)

$$\overline{\text{Sol.}(ABC) = \text{Sup.}(AB) \cdot \frac{1}{3}\,CH.}$$

Se BA non è perpendicolare ad $a$, potremo per B condurre un altro segmento BK perpendicolare ad $a$. Esso potrà essere interno od esterno al triangolo ABC. Nel primo caso il solido generato da ABC sarà la somma, nel secondo la differenza dei due settori conici generati dai triangoli BKC, BKA, e quindi:

$$\text{Sol.}(ABC) = \frac{1}{3}.\overline{\text{Sup.}(BK).AC},$$

ovvero, essendo

$$\text{Sup.}(BK) = \overline{\frac{1}{2}\text{arco}(BK).BK},$$

sarà

$$\text{Sol.}(ABC) = \frac{1}{3}.\overline{\frac{1}{2}\text{arco}(BK).BK.AC}.$$

Ma i rettangoli $\overline{BK.AC}$, $\overline{AB.CH}$ sono equivalenti, perchè ambedue sono il doppio del triangolo ABC, perciò

$$\text{Sol.}(ABC) = \frac{1}{3}.\overline{\frac{1}{2}\text{arco}(BK).AB.CH}.$$

Siccome poi $\overline{\frac{1}{2}\text{arco}(BK).AB}$ è equivalente alla superficie laterale del settore conico generato dal triangolo ABK, avremo infine

$$\text{Sol.}(ABC) = \overline{\text{Sup.}(AB).\frac{1}{3}CH}.$$

2°. Nessuno dei lati AC, BC coincide colla retta $a$, ed AB non è parallelo ad esso (fig. 272). Sia D il punto d'incontro della retta AB con $a$; il solido generato dal triangolo ABC è la differenza dei solidi generati dai triangoli ADC, BDC, e la superficie generata dal segmento AB è la differenza delle superficie generate dai segmenti AD, BD. Essendo

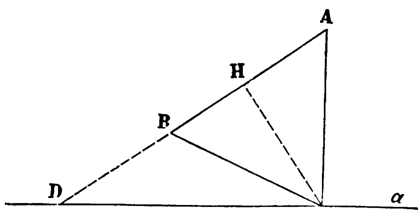


Fig. 272.

$$\text{Sol.}(ACD) = \overline{\text{Sup.}(AD).\frac{1}{3}CH},$$

$$\text{Sol.}(BCD) = \overline{\text{Sup.}(BD).\frac{1}{3}CH},$$

si ha pure

$$\text{Sol.}(ABC) = \overline{\text{Sup.}(AB).\frac{1}{3}CH}.$$

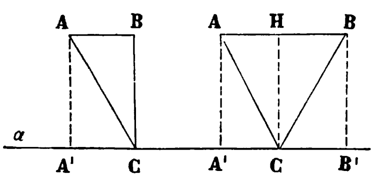


Fig. 273.

3°. Il lato AB è parallelo alla retta $a$ (fig. 273). Allora se l'altezza CH coincide con CB, essendo A'C la proiezione di AB sulla retta $a$, il solido generato dal triangolo ABC è la differenza fra il solido generato dal rettangolo ABCA' e quello

generato dal triangolo A'AC; ma quest'ultimo è un terzo del primo, quindi il solido generato dal triangolo ABC è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del settore cilindrico generato dal rettangolo ABCA', cioè (§ 321 Teor.)

$$\text{Sol.}\,(ABC) = \frac{2}{3}\,\overline{\text{Sup.}\,(AB)\,.\,\frac{1}{2}\,BC} = \overline{\text{Sup.}\,(AB)\,.\,\frac{1}{3}\,BC}.$$

Se CH non coincide con uno dei lati del triangolo ABC, può cadere internamente, o esternamente, ad esso, ed allora il solido generato da ABC è la somma, o la differenza, dei solidi generati dai triangoli ACH, BCH. In ambedue i casi il solido generato dal triangolo ABC è i $\frac{2}{3}$ del settore cilindrico generato dal rettangolo AA'B'B, dunque si ha

$$\text{Sol.}\,(ABC) = \text{Sup.}\,(AB)\,.\,\frac{1}{3}\,CH.$$

**Corollario.** — *Il solido generato da un settore poligonale regolare circoscritto ad un settore circolare, appartenente ad un semicerchio, mentre il suo piano rota di un angolo $\alpha$ attorno al diametro del semicerchio, è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del solido generato nella rotazione medesima dal rettangolo, che ha per lati opposti le proiezioni della spezzata regolare, che limita il settore suddetto, sul diametro del semicerchio e sulla tangente ad esso parallela.*

Sia OABCD (fig. 269) un settore poligonale circoscritto al settore circolare OAD, e siano A', B', C', D', e A'', B'', C'', D'' le proiezioni dei vertici A, B, C, D sulla tangente parallela al diametro MN e sul diametro stesso. Per il teorema precedente il solido generato dal triangolo OAB, quando il piano della figura rota di un angolo $\alpha$ attorno ad MN, è equivalente ad $\frac{1}{3}$ del parallelepipedo, che ha per altezza il raggio OH del circolo, e che ha la base equivalente alla superficie generata da AB, cioè

$$\text{Sol.}\,(OAB) = \frac{1}{3}\,.\,\overline{\text{Sup.}\,(AB)\,.\,OH.}$$

È noto pure che il solido generato nella rotazione suddetta del rettangolo A'B'B''A'' è la metà del parallelepipedo, che ha per altezza il raggio OH, e che ha la base equivalente alla superficie generata da A'B', cioè

$$\text{Sol.}\,(A'B'B''A'') = \frac{1}{2}\,\overline{\text{Sup.}\,(A'B')\,.\,OH.}$$

Ora siccome le superficie generate da AB e A'B' (§ 331 Teor.), sono equivalenti, il solido generato da OAB è $\frac{2}{3}$ del solido generato da A'B'B''A'', cioè

$$\text{Sol.}\,(OAB) = \frac{2}{3}\,\text{Sol.}\,(A'B'B''A'').$$

In simil guisa si trova

$$\text{Sol.}(OBC) = \frac{2}{3}\text{Sol.}(B'C'B''C''),$$

$$\text{Sol.}(OCD) = \frac{2}{3}\text{Sol.}(C'D'D''C''),$$

e perciò

$$\text{Sol.}(OABCD) = \frac{2}{3}\text{Sol.}(A'D'D''A'').$$

**335. Teorema.** — *Il solido generato da un settore circolare, appartenente ad un semicerchio, mentre il suo piano rota di un angolo $\alpha$ attorno al diametro del semicerchio, è il limite dei solidi generati nella rotazione medesima dai settori poligonali regolari di ugual numero di lati ad esso inscritti e circoscritti, che si ottengono raddoppiando successivamente e indefinitamente il numero dei lati.*

Se ad un settore circolare, appartenente ad un semicerchio, inscriviamo un settore poligonale regolare e ne circoscriviamo un altro (fig. 270) e poi facciamo rotare tutta la figura attorno al diametro del semicerchio di un angolo $\alpha$, è evidente che il solido generato dal settore circolare è maggiore di quello generato dal settore poligonale regolare inscritto e minore del solido generato dal settore poligonale regolare circoscritto.

I solidi generati dai due settori poligonali sono poi equivalenti rispettivamente ai due terzi di due settori cilindrici, compresi in uno stesso diedro all'asse, i quali, al raddoppiare del numero dei lati dei settori poligonali sono variabili convergenti, poichè decresce indefinitamente la differenza delle altezze e dei raggi delle basi, perciò il solido generato dal settore circolare è il limite dei solidi generati dai settori poligonali suddetti.

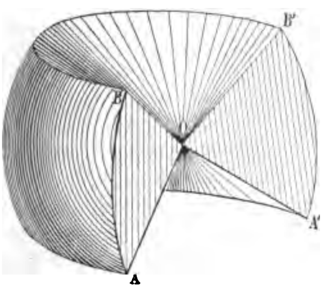


Fig. 274



Fig. 275.

**Corollari.** — *1°. Il solido generato da un settore circolare appartenente ad un semicerchio, mentre il suo piano rota di un angolo $\alpha$ attorno al diametro del semicerchio, è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del settore cilindrico generato, nella rotazione medesima, dal rettangolo, che ha per lati opposti le proiezioni dell'arco, che limita il settore, sul diametro del semicerchio e sulla tangente ad esso parallela.*

Le fig. 274, 275 danno un'idea del solido in quistione.

*2°. Il solido di una sfera è equivalente ai* $\frac{2}{3}$ *del cilindro ad essa circoscritto.*

Questo corollario è una conseguenza immediata del corollario 1°, supponendo che il settore circolare dato sia un semicircolo, e che roti di un intero giro attorno al suo diametro.

**Definizione.** — *Il solido* generato da un settore circolare appartenente ad un semicerchio, mentre il suo piano rota di un giro attorno al diametro del semicerchio, dicesi *settore sferico.*

**Corollari.** — *3°. Un settore sferico è equivalente ai* $\frac{2}{3}$ *del cilindro, che ha per base un cerchio massimo e per altezza l'altezza della zona, o calotta, che lo limita.*

Questo corollario è un caso particolare del Corollario 1°, ove si supponga che il settore circolare generatore compia un intero giro.

*4°. Un'unghia sferica è i* $\frac{2}{3}$ *del settore cilindrico ad essa circoscritto.*

Questo corollario discende pure dal Corollario 1°, supponendo che il settore circolare sia un semicircolo.

*5°. Una sfera, un settore sferico, un'unghia sferica sono equivalenti ad* $\frac{1}{3}$ *dei parallelepipedi, che hanno l'altezza eguale al raggio della sfera e le basi rispettivamente equivalenti alle superficie della sfera, della zona, o del fuso corrispondente.*

Considerando il solido di una sfera, di un settore sferico o di un'unghia sferica, come il solido generato da un settore circolare appartenente ad un semicerchio, che rota di un angolo $\alpha$ attorno al suo diametro, sappiamo che esso è equivalente a $\frac{2}{3}$ del solido generato, nella rotazione medesima, dal rettangolo, che ha per lati opposti le proiezioni dell'arco del settore sul diametro fisso e sulla tangente del semicircolo ad esso parallela. Questo solido (§ 321 Teor.) è equivalente alla metà del parallelepipedo, che ha la base equivalente alla sua superficie laterale sviluppata, e che ha l'altezza eguale al raggio. Siccome poi la superficie sviluppata suddetta è anche equivalente (§ 333 Teor.) alla superficie della sfera, o della zona, o del fuso corrispondente, così il solido della sfera, del settore sferico o dell'unghia sferica sono equivalenti rispettivamente ad $\frac{1}{3}$ dei parallelepipedi, che hanno l'altezza eguale al raggio della sfera e le basi rispettivamente equivalenti alle superficie della sfera, della zona o del fuso corrispondente.

*6°. Una piramide sferica è equivalente ad* $\frac{1}{3}$ *del parallelepipedo, che ha per altezza il raggio della sfera, e che ha le basi equivalenti al poligono sferico base.*

Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, i solidi delle unghie sferiche appartenenti ad una data piramide sferica, con $\pi$ una semisfera e con $A_1$, $A_2, \ldots, A_n$, P i corrispondenti fusi ed una mezza superficie sferica, con V, S il solido della piramide sferica data e la superficie del poligono sferico corrispondente, con R il raggio della sfera, si ha

$$V = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (n-2)\pi)$$

$$S = \frac{1}{2}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)P)$$

$$\alpha_1 = \overline{\frac{1}{3}A_1 . R}, \quad \alpha_2 = \overline{\frac{1}{3}A_2 . R}, \ldots \alpha_n = \overline{\frac{1}{3}A_n . R}, \quad \pi = \overline{\frac{1}{3}P . R};$$

perciò

$$V = \overline{\frac{1}{3}R . \frac{1}{2}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)P)},$$

ovvero

$$V = \frac{1}{3}\overline{R . S}.$$

**336. Teorema** (d'Archimede). — *Se ad una superficie sferica è circoscritto un cilindro e un cono equilatero,*

*1° le superficie totali della sfera, del cilindro e del cono sono equivalenti rispettivamente a quattro volte, sei volte, nove volte un cerchio massimo della sfera,*

*2° i solidi della sfera, del cilindro e del cono sono equivalenti rispettivamente a quattro volte, sei volte, nove volte un cono, che ha per base un cerchio massimo e per altezza il raggio della sfera.*

1°. Si sa che la superficie della sfera equivale a quattro volte un suo cerchio massimo, e che la superficie laterale del cilindro è equivalente a quella della sfera; perciò la superficie totale di quest'ultima, che si compone della superficie laterale e delle due basi, ciascuna delle quali è eguale a un cerchio massimo della sfera, è equivalente a sei volte un cerchio massimo.

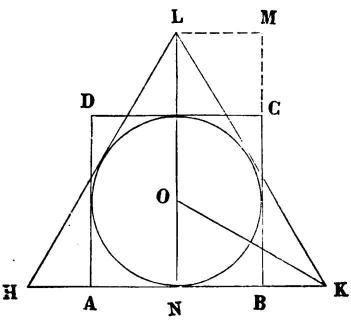


Fig. 276.

Finalmente la superficie laterale del cono equivale alla superficie laterale del cilindro generato dalla proiezione BM di LK su BC (§ 331 Teor.) Essendo O il punto d'incontro delle mediane del triangolo LHK, si ha BM $\equiv$ LN $\equiv$ 3R, e perciò la superficie suddetta equivale al rettangolo del circolo di raggio R e di 3R, ossia a sei volte un cerchio massimo. Inoltre dal triangolo rettangolo NOK si ricava

$$\overline{NK}^2 = \overline{OK}^2 - \overline{ON}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

e perciò (§ 323 Cor. 2°) si ha

$$\text{cerchio}\,(NK) = 3\,\text{cerchio}\,(R),$$

e quindi la superficie totale del cono è nove volte un cerchio massimo.

2°. Il solido della sfera è equivalente al parallelepipedo che ha la base equivalente al cerchio di raggio R e l'altezza eguale a $\frac{4}{3}$ R, perciò è quadruplo del cono, avente per base il cerchio di raggio R e per altezza R.

Il cilindro circoscritto alla sfera ha la stessa base del cono suddetto e l'altezza doppia, perciò è sei volte il cono stesso.

Il cono equilatero circoscritto ha l'altezza tripla dell'altezza e la base tripla della base del cono suddetto, perciò equivale a nove volte il cono stesso.

# ESERCIZI

## TEOREMI.

**606.** Due triangoli sono equivalenti, se hanno due lati rispettivamente eguali e gli angoli compresi supplementari.

**607.** Le mediane di un triangolo dividono il triangolo stesso in sei parti equivalenti.

**608.** I tre segmenti, che hanno un estremo nel baricentro di un triangolo, e l'altro estremo in un vertice del medesimo, scompongono il triangolo in tre triangoli equivalenti.

**609.** Di tutti i triangoli, aventi due lati rispettivamente eguali, è maggiore quello, nel quale l'angolo compreso fra i due lati considerati è retto.

**610.** Se per i vertici di un quadrangolo si conducono le parallele alle diagonali, si ottiene un parallelogrammo, che è doppio del quadrangolo dato.

**611.** Se le diagonali di due quadrangoli sono rispettivamente eguali, e formano tra loro angoli rispettivamente eguali, i due quadrangoli sono equivalenti.

**612.** Dei quattro triangoli, in cui un trapezio resta diviso dalle sue diagonali, quei due, che hanno per lati i lati non paralleli del trapezio, sono equivalenti.

**613.** Congiungendo gli estremi di uno dei lati non paralleli di un trapezio col punto medio del lato opposto, si ottiene un triangolo, che è equivalente alla metà del trapezio.

**614.** Ogni retta, che divide per metà la congiungente i punti medi delle basi di un trapezio e incontra le basi stesse, divide il trapezio in due parti equivalenti.

**615.** Un trapezio è equivalente al rettangolo di uno dei lati non paralleli e della distanza da esso del punto di mezzo del lato opposto.

**616.** Due triangoli, che hanno per basi i lati non paralleli di un trapezio, e che hanno per vertice comune un punto qualunque della retta, che congiunge i punti di mezzo dei lati paralleli, sono equivalenti.

**617.** Per il punto medio E della diagonale BD di un quadrangolo ABCD, si conduca la FH parallela ad AC. Dimostrare che FC divide il quadrangolo in due parti equivalenti.

**618.** La somma dei due triangoli, che hanno per basi due lati opposti di un parallelogrammo, ed hanno per vertice comune un punto interno al parallelogrammo, è equivalente alla somma dei due triangoli, che hanno per basi gli altri due lati opposti del parallelogrammo, ed hanno lo stesso vertice dei primi due triangoli. Come deve essere modificato il teorema, se il vertice dei triangoli è esterno al parallelogrammo?

**619.** La somma dei due triangoli, che hanno per basi le due diagonali di un parallelogrammo e per vertice comune un punto qualunque del contorno, è costante.

**620.** Il triangolo, che ha per base una diagonale di un parallelogrammo e per vertice un punto qualunque O, è equivalente alla somma o alla differenza dei triangoli, che hanno lo stesso vertice O, ed hanno per basi i due lati consecutivi del suddetto parallelogrammo, concorrenti in un estremo della diagonale considerata.

**621.** Due poligoni di $2n$ lati sono equivalenti, se i loro lati hanno i medesimi punti di mezzo.

**622.** Se sopra i lati di un triangolo rettangolo si costruiscono i quadrati esternamente ad esso, e si uniscono gli estremi dei lati di questi quadrati uscenti da uno stesso vertice del triangolo dato, si ottengono tre triangoli equivalenti al triangolo dato.

**623.** Se sopra i lati di un triangolo rettangolo si costruiscono i quadrati esternamente ad esso, e si congiungono gli estremi dei lati di questi quadrati, uscenti da uno stesso vertice del triangolo, si ottiene un esagono equivalente al doppio rettangolo della ipotenusa e della somma dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa corrispondente.

**624.** Se C è il punto medio di un segmento AB, è D un punto qualunque della retta AB,

1° la differenza dei quadrati di CD e CB è equivalente al rettangolo di AD e DB,

2° esiste la relazione

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2\,\overline{AC}^2 + 2\,\overline{CD}^2 .$$

**625.** Se le diagonali di un quadrangolo sono perpendicolari, la somma dei quadrati di due lati opposti è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati.

**626.** Un angolo di un triangolo è ottuso, retto od acuto, secondo che il quadrato del lato opposto è maggiore, equivalente o minore della somma dei quadrati degli altri due lati.

**627.** Un triangolo è rettangolo, se il quadrato di un'altezza è equivalente al rettangolo dei segmenti del lato, su cui cade l'altezza.

**628.** Il quadrato dell'altezza di un triangolo equilatero è triplo del quadrato della metà del terzo lato.

**629.** Ogni rettangolo è equivalente alla metà del rettangolo delle diagonali dei quadrati dei suoi lati.

**630.** Il quadrato del lato di un triangolo equilatero è triplo del quadrato del raggio del circolo circoscritto.

**631.** In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma del quadrato della mediana relativa ad uno dei cateti e del triplo quadrato della metà del cateto stesso.

**632.** Se si unisce il vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo coi vertici opposti del quadrato costruito sull'ipotenusa, la differenza dei quadrati di questi due segmenti è equivalente alla differenza dei quadrati dei due cateti.

**633.** In un rettangolo ABCD si conduca il segmento AE che termina in un punto E di CD. Si dimostri che, essendo BF la distanza di B dalla AE, il rettangolo dato è equivalente al rettangolo $\overline{AE\,.\,BF}$.

**634.** Se sopra due lati AB, AC di un triangolo qualunque si costruiscono due parallelogrammi qualunque, e poi si prolungano quei lati dei parallelogrammi, che sono rispettivamente opposti ad AB, AC, fino ad incontrarsi in D, la somma dei due parallelogrammi è equivalente ad un parallelogrammo di cui un lato è BC e l'altro lato è eguale e parallelo ad AD. (Teorema di Pappo).

**635.** Se più triangoli equivalenti hanno un angolo eguale, il rettangolo dei lati, che comprendono l'angolo eguale, è costante.

**636.** Sul lato AB di un quadrato ABCD, preso come diametro, si descriva un semicircolo esterno al quadrato, indi si unisca un punto E qualunque del semicircolo coi vertici C e D. I segmenti EC, ED tagliano AB in due punti F, H, in modo che $\overline{FH}^2 = \overline{AF\,.\,HB}$. (Teorema di Fermat).

**637.** Se una corda PAQ taglia un diametro di un circolo in un punto A e forma con questo un angolo semiretto, la somma dei quadrati dei segmenti PA, AQ è equivalente al doppio del quadrato del raggio.

**638.** Se due corde di un circolo sono perpendicolari, la somma dei quadrati dei segmenti, compresi fra il loro punto d'incontro ed i punti d'incontro col circolo, è equivalente al quadrato del diametro.

**639.** Se sopra un diametro di un circolo si prendono due punti egualmente distanti dal centro, la somma dei quadrati delle loro distanze da un punto qualunque del circolo è costante.

**640.** Se si congiunge un punto interno ad un rettangolo coi quattro vertici, la somma dei quadrati dei segmenti condotti a due vertici opposti, è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due.

**641.** L'altezza di un triangolo divide la base in due segmenti, il cui rettangolo è equivalente a quello dell'altezza medesima e della distanza dell'ortocentro della base.

Da questo teorema si deduca come corollario quello del § 261.

**642.** Un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo dei due segmenti, in cui l'ipotenusa del triangolo stesso è divisa dal punto di contatto col circolo inscritto nel triangolo.

**643.** Un triangolo è equivalente al rettangolo, che ha per lati il raggio del circolo ad esso circoscritto, ed il semiperimetro del triangolo, che ha per vertici i piedi delle altezze del triangolo dato.

**644.** L'esagono convesso, che ha per vertici i vertici di un triangolo e i punti ad esso opposti nel circolo circoscritto al triangolo stesso, è equivalente al doppio del triangolo dato.

**645.** Il parallelogrammo, che ha per vertici i punti di mezzo dei lati di un quadrilatero qualunque, è equivalente alla metà del quadrilatero stesso.

**646.** Se due segmenti AC, BD scorrono lungo due rette fisse in un piano, il quadrilatero convesso ABCD è costante.

**647.** Se AB, CD sono due segmenti che scorrono su due rette, e F, G, F′, G′ sono i punti medî di AC, BD, BC, AD, la differenza dei quadrati di FG e F′G′ è costante ed equivalente ad un parallelogrammo, che ha i lati eguali ad AB, CD e gli angoli eguali a quelli formati dalle due rette.

**648.** La somma dei quadrati di due segmenti è maggiore del doppio rettangolo dei medesimi.

**649.** La somma dei quadrati delle proiezioni di un segmento sopra tre rette perpendicolari fra loro a due a due è equivalente al quadrato del segmento stesso.

**650.** La somma dei quadrati delle proiezioni di un segmento sopra tre piani perpendicolari fra loro a due a due è equivalente al doppio del quadrato del segmento stesso.

**651.** La somma dei quadrati delle distanze di un punto del piano, o dello spazio, dai tre vertici di un triangolo è equivalente alla somma dei quadrati delle distanze del baricentro del triangolo dai tre vertici, aumentata del triplo quadrato della distanza del punto dal baricentro.

**652.** La somma dei quadrati delle distanze di un punto dai quattro vertici di un tetraedro è equivalente alla somma dei quadrati delle distanze del baricentro del tetraedro dai quattro vertici, aumentata di quattro volte il quadrato della distanza del punto dal baricentro.

**653.** La somma dei quadrati dei tre segmenti, condotti da un punto, tangenti a tre circoli (o a tre sfere), non aventi i centri in linea retta, è equivalente alla somma dei quadrati di tre segmenti, tangenti ai tre circoli (o sfere), condotti per il baricentro del triangolo formato dai tre centri, aumentata del triplo quadrato della distanza di questo baricentro dal punto.

**654.** La somma dei quadrati di quattro segmenti, condotti da un punto, tangenti a quattro sfere, non aventi i centri in un piano, è equivalente alla somma dei quadrati dei quattro segmenti, tangenti alle quattro sfere, condotti per il baricentro del tetraedro formato dai quattro centri, aumentata del quadruplo quadrato della distanza di questo baricentro dal punto.

**655.** Se un circolo ha il centro O situato sopra un altro circolo, e si conduce una tangente al primo, che incontri l'altro nei punti M, M′, il rettangolo $\overline{OM}.\overline{OM'}$ è costante.

**656.** Se dal punto medio di un cateto di un triangolo rettangolo si abbassa la perpendicolare sull'ipotenusa, la differenza dei quadrati dei segmenti dell'ipotenusa è equivalente al quadrato dell'altro cateto del triangolo.

**657.** Se un angolo retto $\widehat{AOB}$ è al centro di un circolo, e per un punto C dell'arco compreso AB si abbassa sopra uno dei lati dell'angolo la perpendicolare CD, la quale incontra la bisettrice dell'angolo medesimo in un punto E, si ha

$$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{OA}^2 .$$

**658.** In un quadrilatero la somma dei quadrati delle diagonali è il doppio della somma dei quadrati dei segmenti, che congiungono i punti medii dei lati opposti.

**659.** La somma dei quadrati delle diagonali di un trapezio è equivalente alla somma dei quadrati dei due lati non paralleli e del doppio rettangolo delle basi.

**660.** Se due corde di un circolo si tagliano, la differenza dei loro quadrati è equivalente alla differenza dei quadrati delle differenze dei loro segmenti.

**661.** Se un segmento è diviso in sezione aurea, la somma dei quadrati del segmento e della sua parte minore è tripla del quadrato della sua parte maggiore.

**662.** La parte minore di un segmento diviso in sezione aurea è uguale alla parte aurea del segmento maggiore.

**663.** Le diagonali di un pentagono regolare si dividono a vicenda in sezione aurea.

**664.** L'esagono regolare è doppio del triangolo regolare inscritto nello stesso circolo, ed è la metà del triangolo regolare circoscritto al circolo stesso.

**665.** Un ottagono regolare inscritto in un circolo è equivalente al rettangolo, i cui lati sono eguali rispettivamente ai lati dei quadrati inscritto e circoscritto allo stesso circolo.

**666.** Un quadrangolo viene diviso in quattro parti equivalenti dalle rette che uniscono i punti di mezzo dei lati col punto d'incontro delle parallele condotte a ciascuna diagonale dal punto medio dell'altra.

**667.** Un triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo dei segmenti, che il circolo exinscritto, compreso nell'angolo retto, determina sull'ipotenusa.

**668.** Se due circoli eguali sono tangenti esternamente, ed A è il loro punto di contatto, condotti dai centri O, O′ e dalla stessa parte di OO′ due raggi OB, O′B′ paralleli, sopra BB′ come diametro si descriva un mezzo circolo esterno ai cerchi dati; la superficie (detta *drepanoide*) compresa da questo mezzo circolo e dagli archi AB, AB′ è equivalente al parallelogrammo OO′B′B.

**669.** Un triangolo è diviso in due parti equivalenti da ciascuna delle rette che vanno dal centro del circolo circoscritto alle estremità di un'altezza.

**670.** Se ABCD è un parallelogrammo, e si descrive un circolo, che passi per il vertice A e incontri rispettivamente i lati AB, AD e la diagonale AC nei punti M, N, P, si ha $\overline{AC \,.\, AP} = \overline{AB \,.\, AM} + \overline{AD \,.\, AN}$.

**671.** Essendo O ed O′ i centri di due circoli tangenti nel punto C, se da un punto D qualunque esterno ai due cerchi, dal quale si vedono i due raggi OC, O′C sotto angoli eguali, si conducono i segmenti DE, DF tangenti ai due circoli, si ha

$$\overline{DE \,.\, DF} = \overline{DC}^2 \,.$$

**672.** Se BAC è un triangolo rettangolo, e s'indicano con E, G, H i punti d'incontro di una perpendicolare all'ipotenusa, condotta per un punto D di essa, coi due cateti e col semicircolo circoscritto al triangolo, si ha

$$\overline{DH}^2 = \overline{DE \,.\, DG}.$$

**673.** Se per un punto A di un circolo si tirano le corde AB, AC, AD ..., le quali sono incontrate da una parallela alla tangente in A al circolo nei punti M, N, P ..., si ha $\overline{AB \,.\, AM} = \overline{AC \,.\, AN} = \overline{AD \,.\, AP} = \ldots.$

**674.** Se per un punto A di una sfera si conducono le corde AB, AC, AD, ..., le quali sono incontrate da un piano parallelo al piano tangente in A nei punti M, N, P, ... si ha $\overline{AB \,.\, AM} = \overline{AC \,.\, AN} = \overline{AD \,.\, AP} = \ldots.$

**675.** Se una losanga ABCD è circoscritta ad un circolo, ogni tangente MT a questo circolo determina sui lati AB, AD della losanga due segmenti BM, DT, tali che il rettangolo $\overline{BM \,.\, DT}$ è costante.

**676.** Un punto qualunque C, preso sulla diagonale AB di una losanga ADBE, la divide in modo che il rettangolo $\overline{AC \,.\, CB}$ è equivalente alla differenza fra i quadrati costruiti sul lato della losanga e sulla distanza del punto C da uno degli estremi dell'altra diagonale.

**677.** Se due circoli sono tangenti esternamente, il quadrato del segmento di tangente esterna comune, che ha per estremi i punti di contatto è equivalente al rettangolo dei diametri dei due circoli dati.

**678.** Se A, B sono i punti di contatto di una tangente AB comune a due circoli, la quale incontra la retta dei centri in un punto C, e per questo punto si conduce una segante DEFHC, si ha

$$\overline{CA} \,.\, \overline{CB} = \overline{CD} \,.\, \overline{CH} = \overline{CE} \,.\, \overline{CF}.$$

**679.** La somma dei quadrati dei segmenti, che uniscono un punto, preso nell'interno di un quadrato, coi quattro vertici, è doppia della somma dei quadrati delle distanze del medesimo punto dai lati del quadrato.

**680.** La somma dei quadrati dei lati di un triangolo è tripla della somma dei quadrati dei segmenti, che congiungono i vertici col punto di concorso delle mediane.

**681.** Se si congiungono gli estremi di una corda di un circolo con un punto qualunque del diametro parallelo ad essa, la somma dei quadrati delle due congiungenti è equivalente alla somma dei quadrati dei segmenti del diametro.

**682.** La somma delle distanze di un punto interno ad un poligono equilatero dai lati del medesimo è costante.

**683.** Se P è un punto qualunque della diagonale BD di un parallelogrammo ABCD, o del prolungamento di essa, la differenza, o la somma, dei triangoli ABP, ADP è equivalente al triangolo ACP.

**684.** Se AB è un diametro di un circolo, e CD una corda ad esso perpendicolare, conducendo per un punto P di CD, la corda APQ il rettangolo $\overline{AP \,.\, AQ}$ è costante.

**685.** Se ABC è un triangolo qualunque, e si conduce la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$, la quale incontri il lato BC nel punto D e il circolo circoscritto al triangolo nel punto F, e si tira pure la bisettrice dell'angolo esterno conseguente ad $\widehat{A}$, la quale incontri la retta del lato opposto in D′ ed il circolo circoscritto in E′, si ha

$$\overline{BE}^2 = \overline{EA \,.\, ED}; \quad \overline{BE'}^2 = \overline{E A \,.\, E'D'}.$$

**686.** Se si conduce una tangente ad un circolo, il segmento di essa compreso fra due tangenti parallele resta diviso dal punto di contatto, in modo che il rettangolo delle due parti è equivalente al quadrato del raggio.

**687.** Se, costruiti i quadrati sui lati di un triangolo rettangolo, si uniscono i vertici dei quadrati, si ottiene un esagono tale che la somma dei quadrati dei suoi lati è equivalente ad otto volte il quadrato dell'ipotenusa.

**688.** Se ABCD è un rettangolo, E un punto di BC ed F un punto di DC, il rettangolo dato è equivalente alla somma del doppio del triangolo AEF e del rettangolo dei segmenti BE, DF.

**689.** Di tutti i poligoni di $n$ lati, inscritti in un circolo, quello regolare è il maggiore.

**690.** Di due poligoni regolari, inscritti in uno stesso circolo, il maggiore è quello che ha un maggior numero di lati.

**691.** Di tutti i triangoli, che hanno la base e l'angolo opposto eguali ad un segmento e ad un angolo dato, il maggiore è il triangolo isoscele.

**692.** Di tutti i triangoli, che hanno la base ed il perimetro eguali a due segmenti dati, il maggiore è il triangolo isoscele.

**693.** Di tutti i triangoli equivalenti ad un quadrato dato quello che ha minor perimetro è il triangolo equilatero.

**694.** La somma dei quadrati di sei spigoli di un tetraedro è equivalente alla somma dei quadrati dei tre segmenti, che hanno per estremi i punti di mezzo di due spigoli opposti.

**695.** La somma dei quadrati delle distanze di un punto qualunque dai vertici di un poligono regolare di $n$ lati è equivalente a $n$ volte la somma dei quadrati del raggio e della distanza del punto dato dal centro del poligono.

**696.** Dati due circoli concentrici la somma dei quadrati delle distanze di un punto di uno di essi dagli estremi di un diametro dell'altro è costante.

**697.** La somma dei quadrati delle distanze di un punto dai vertici di un parallelepipedo è equivalente a otto volte il quadrato della distanza di questo punto dal centro del parallelepipedo, più la somma di quadrati delle distanze del centro stesso dagli otto vertici.

**698.** Di tutti i triangoli, che hanno un dato perimetro, il massimo è quello equilatero.

**699.** Di tutti i rettangoli di dato perimetro il massimo è il quadrato.

**700.** Di tutti i rettangoli equivalenti fra loro, quello che ha minor perimetro è il quadrato.

**701.** Essendo AC la sezione aurea del segmento AB, sul prolungamento di AC si prenda $AD \equiv AC$, e sopra AC si prenda $AE = BC$; dimostrare che BD, BE restano divisi in sezione aurea dai punti A e C rispettivamente.

**702.** Se sopra una sfera son dati due circoli, situati in piani paralleli, è costante la somma dei quadrati delle tre distanze di ciascun punto di uno di essi da tre punti fissi dell'altro.

**703.** Due triangoli sferici sono equivalenti, se i triangoli polari hanno eguale perimetro; e viceversa.

**704.** Un segmento circolare è equivalente al rettangolo della metà del raggio e della differenza fra l'arco rettificato corrispondente e la metà della corda che sottende un arco doppio.

**705.** Il cubo della somma di due segmenti è equivalente alla somma dei cubi dei segmenti stessi più il triplo del parallelepipedo rettangolo, che ha per base il rettangolo dei due segmenti e per altezza la somma dei medesimi.

**706.** La superficie laterale di un tronco di prisma a base triangolare è equivalente al rettangolo del perimetro di una sezione normale e della distanza dei baricentri delle due basi del tronco.

**707.** Un tronco di prisma a base triangolare è equivalente ad un prisma, che ha per base una sezione normale, e che ha l'altezza eguale alla distanza dei baricentri delle basi.

**708.** In ogni tetraedro regolare il quadrato della distanza dei punti medii di due spigoli opposti è equivalente alla metà del quadrato di uno spigolo del tetraedro.

**709.** In ogni tetraedro la somma dei quadrati dei sei spigoli è quadrupla della somma dei quadrati dei segmenti, che uniscono i punti di mezzo degli spigoli opposti.

**710.** Il piano, che passa per uno spigolo di un tetraedro e per il punto medio dello spigolo opposto, divide il tetraedro dato in due tetraedri equivalenti.

**711.** Qualunque piano, condotto per i punti medii di due spigoli opposti di un tetraedro, divide il tetraedro in due parti equivalenti.

**712.** Un tronco di parallelepipedo è equivalente alla somma di quattro piramidi, che hanno per base una delle basi del tronco e per vertici i vertici dell'altra base.

**713.** Un tetraedro è equivalente alla sesta parte del parallelepipedo, le cui facce opposte passano per due spigoli opposti del tetraedro.

**714.** Un cubo è la sesta parte dell'ottaedro, che ha i vertici nei centri delle facce del cubo.

**715.** Se quattro tetraedri hanno uno spigolo comune, ed hanno rispettivamente per spigoli opposti i tre spigoli e la diagonale di un parallelepipedo, che partono da uno stesso vertice, il quarto tetraedro è equivalente alla somma degli altri tre.

**716.** Un prisma triangolare è equivalente al parallelepipedo di una faccia laterale e della metà della distanza da questa dello spigolo opposto.

**717.** Un prisma regolare è equivalente al parallelepipedo della superficie laterale e della metà dell'apotema della base.

**718.** Una piramide regolare è equivalente al parallelepipedo della superficie laterale e di un terzo della distanza del centro della base dal piano di una faccia laterale.

**719.** Un tetraedro è equivalente al parallelepipedo di un terzo di uno spigolo e della proiezione del tetraedro su di un piano perpendicolare allo spigolo stesso.

**720.** Se l'altezza di un prisma triangolare è il doppio del diametro del circolo circoscritto alla base, esso è equivalente al parallelepipedo rettangolo, che ha per lati i tre lati della base.

**721.** Se AB, CD sono due segmenti situati su due rette sghembe $a, b$, il solido del tetraedro che ha per vertici A, B, C, D è costante, qualunque sia la posizione dei segmenti AB, CD sulle rette $a, b$.

**722.** Un tronco di parallelepipedo è equivalente al parallelepipedo della sezione normale e della semisomma di due spigoli opposti.

723. Se un quadrilatero è inscritto in un circolo, il parallelepipedo rettangolo, che ha la base equivalente alla somma dei rettangoli delle coppie di lati, che concorrono in due vertici opposti, e per altezza la diagonale, che congiunge gli altri due vertici, è equivalente al parallelepipedo rettangolo che ha la base equivalente alla somma dei rettangoli delle coppie di lati concorrenti negli altri due vertici opposti e per altezza l'altra diagonale.

724. Se per i vertici di un tetraedro si conducono i piani rispettivamente paralleli alle facce opposte, si forma un nuovo tetraedro equivalente a 27 volte il tetraedro dato.

725. Si costruiscano tre prismi che abbiano per basi le facce laterali di una piramide triangolare VABC, e sia O il punto d'incontro delle altre tre basi. Il prisma che ha per base la base della piramide, e che ha gli spigoli laterali eguali e paralleli a VO, è equivalente alla somma dei tre prismi suddetti.

726. Un tronco di piramide triangolare è equivalente alla semisomma di tre piramidi, che hanno per altezza l'altezza del tronco e per basi l'una la base inferiore, l'altra la base superiore, e la terza il quadruplo della sezione media.

727. Se un tetraedro ha due spigoli opposti perpendicolari, esso è equivalente alla sesta parte del parallelepipedo rettangolo dei due spigoli suddetti e della loro distanza.

728. Se un tetraedro ha tre facce equivalenti, la somma delle distanze dai loro piani di un punto della quarta faccia è costante.

729. La somma delle distanze di un punto della base di una piramide regolare dai piani delle facce laterali è costante.

730. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, che hanno la somma dei tre spigoli, concorrenti in un vertice, eguale ad un segmento dato, il maggiore è il cubo.

731. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, equivalenti fra loro, il cubo è quello per il quale è minore la somma di tre spigoli concorrenti in un vertice.

732. Fra tutti i parallelepipedi rettangoli, che hanno per base un quadrato, e che hanno la somma dell'altezza e di un lato della base eguale ad un segmento dato, il maggiore è quello per il quale il lato della base è doppio dell'altezza.

733. Dato un tetraedro ABCD, avente un triedro trirettangolo A, tra tutti i parallelepipedi che si possono formare conducendo per un punto H della faccia opposta ad A tre piani paralleli alle facce del triedro A, il massimo è quello che si ottiene nel caso che il punto H sia il baricentro della faccia BCD. Il solido di questo parallelepipedo è i $^2/_9$ di quello del tetraedro dato.

734. Il solido di un prismoide è equivalente alla somma di due piramidi, che hanno per altezza l'altezza del prismoide e per basi una il doppio della sezione ottenuta con un piano equidistante dalle basi, e l'altra la media aritmetica delle basi.

735. Se un cilindro è circoscritto ad una sfera, il solido racchiuso fra le due superficie cilindrica e sferica e due piani perpendicolari all'asse è equivalente al doppio della differenza di due sfere, che hanno per diametri le distanze di quei piani dal centro.

736. Il quadrato del raggio della sfera circoscritta ad un cubo, o ad un ottaedro regolare, è equivalente al triplo del quadrato del raggio della sfera in esso inscritta.

737. Il quadrato di uno spigolo di un tetraedro regolare è equivalente a 24 volte il quadrato del raggio della sfera in esso inscritta.

738. Il quadrato di uno spigolo di un ottaedro è equivalente a sei volte il quadrato del raggio della sfera in esso inscritto.

739. Il triplo del quadrato di uno spigolo di un tetraedro regolare è equivalente a otto volte il quadrato del raggio della sfera circoscritta ad esso.

740. Il triplo del quadrato di uno spigolo di un cubo è equivalente al quadruplo del quadrato del raggio della sfera circoscritta ad esso.

741. Il quadrato di uno spigolo di un ottaedro regolare è equivalente al doppio del quadrato del raggio della sfera circoscritta ad esso.

## LUOGHI.

**742.** Il luogo dei punti tali, che la differenza dei quadrati delle distanze da due punti fissi sia equivalente ad un quadrato dato, è un piano.

**743.** Il luogo dei punti dello spazio tali, che la somma dei quadrati delle distanze da due, tre o quattro punti sia equivalente ad un quadrato dato, è una sfera.

**744.** Trovare il luogo dei punti, per i quali la somma dei quadrati delle loro distanze dai vertici di un poligono regolare è costante ed equivalente ad un quadrato dato.

**745.** Il luogo dei punti tali, che la somma dei quadrati delle distanze da $m$ punti sia equivalente alla somma dei quadrati delle distanze da altri $n$ punti, è un piano se $m = n$, una sfera se $m$ è diverso da $n$.

**746.** Trovare il luogo dei centri dei circoli di un piano, che tagliano due circoli dati nel piano stesso in coppie di punti opposti.

**747.** Trovare il luogo dei centri delle sfere, che tagliano due sfere date secondo circoli massimi.

**748.** Trovare il luogo dei centri delle sfere, che tagliano tre sfere date secondo circoli massimi.

**749.** Trovare il luogo dei centri dei circoli di un piano, che tagliano un circolo dato in due punti opposti ed un altro circolo normalmente.

**750.** Trovare il luogo dei centri delle sfere, che tagliano una sfera data secondo un circolo massimo ed un'altra sfera normalmente.

**751.** Trovare il luogo dei centri delle sfere, che tagliano due sfere date normalmente ed una terza secondo un circolo massimo.

**752.** Trovare il luogo dei centri delle sfere che tagliano due sfere date secondo circoli massimi ed una terza normalmente.

**753.** Trovare il luogo dei punti di un piano, tali che la differenza dei quadrati dei segmenti tangenti da essi condotti a due circoli del piano stesso sia, equivalente ad un quadrato dato.

**754.** Trovare il luogo dei punti tali, che la differenza dei quadrati dei segmenti tangenti, condotti da essi a due sfere date, sia equivalente ad un quadrato dato.

**755.** Dato un circolo (o una sfera) qualunque, e preso su di esso un punto A, si conduca una segante $r$ che incontri di nuovo il circolo (o la superficie sferica) in un punto B, indi si prenda sulla $r$ un punto C, tale che il rettangolo $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$ sia equivalente ad un quadrato dato. Facendo rotare la $r$ attorno ad A qual'è il luogo del punto C?

**756.** Per i due estremi di un segmento AB si conducano due rette parallele, e si conduca poi una segante $a$, che tagli queste due rette in due punti C, D, tali che il trapezio ABCD sia equivalente ad un rettangolo dato. Dal punto di mezzo E di AB si conduca la EF perpendicolare ad $a$. Facendo variare la $o$, qual'è il luogo di F?

**757.** Sopra una circonferenza fissa son date due coppie di punti A, B e C, D. Qual'è il luogo dei punti di contatto di due circoli (o di due sfere) tangenti fra loro e che passano uno per A e B, l'altro per C e D?

**758.** Trovare il luogo dei punti di contatto di due circoli variabili tangenti fra loro, e che sono rispettivamente tangenti a due circoli fissi dati.

**759.** Trovare il luogo dei punti di contatto di due sfere variabili tangenti fra loro, che sono rispettivamente tangenti a due sfere fisse.

**760.** Trovare il luogo di un punto tale, che il quadrato della sua distanza dalla base di un triangolo isoscele sia equivalente al rettangolo delle sue distanze dai due lati eguali.

**761.** Trovare il luogo dei punti di un piano, tali che la somma dei quadrati dei segmenti tangenti condotti a due o a tre circoli dello stesso piano sia equivalente ad un quadrato dato.

**762.** Trovare il luogo dei punti tali, che la somma dei quadrati dei segmenti tangenti da essi condotti a due, o tre, o quattro sfere date sia equivalente ad un quadrato dato.

## PROBLEMI.

**763.** Tagliare i lati di un angolo con una retta, in modo che il triangolo risultante sia equivalente ad un quadrato dato, e che il segmento compreso fra i lati dell'angolo sia eguale ad un segmento dato.

**764.** Per due punti, presi sopra un lato di un angolo, condurre due rette parallele, che coi lati dell'angolo formino un trapezio equivalente ad un dato rettangolo.

**765.** Per due punti dati condurre due rette tali, che sopra una retta data stacchino un segmento eguale ad un segmento dato.

**766.** Per un punto dato sul contorno di un triangolo condurre una retta, che divida il triangolo in due parti equivalenti.

**767.** Dividere un triangolo in due parti equivalenti per mezzo di due rette, che passino per due punti dati sul contorno.

**768.** Dividere un triangolo in tre parti equivalenti con semirette uscenti da un punto di un lato.

**769.** Dividere un triangolo in due parti equivalenti, mediante una retta parallela ad una retta data.

**770.** Dividere un triangolo qualunque in quattro parti equivalenti mediante due rette perpendicolari fra loro.

**771.** Dividere un triangolo in due parti equivalenti mediante una retta perpendicolare a uno dei lati.

**772.** Dividere un parallelogrammo in due parti equivalenti con una retta parallela ad una retta data.

**773.** Dividere un poligono non intrecciato in $n$ parti equivalenti per mezzo di segmenti, che partono da un punto interno ad esso, uno dei quali è dato ad arbitrio.

**774.** Per un punto dato condurre una retta, che divida un trapezio dato in due parti equivalenti.

**775.** Dividere un trapezio in tre parti equivalenti per mezzo di rette parallele ad un lato non parallelo all'opposto.

**776.** Per un punto interno ad un angolo condurre una retta, che coi lati dell'angolo formi un triangolo equivalente ad un quadrato dato.

**777.** Trovare un punto interno ad un triangolo tale, che i segmenti che lo congiungono coi tre vertici scompongano il triangolo in triangoli equivalenti.

**778.** Costruire un quadrato, che sia equivalente alla somma di due o più quadrati dati.

**779.** Costruire un quadrato, che sia la *n.esima* parte di un quadrato dato.

**780.** Dividere un segmento in due parti, in modo che il rettangolo di queste due parti sia massimo.

**781.** Dividere, se è possibile, un segmento in due parti, in modo che la somma dei quadrati di queste due parti sia equivalente ad un dato quadrato.

**782.** Dividere un segmento in tre parti, in modo che le due estreme sieno eguali, e la somma dei loro quadrati sia equivalente al quadrato dell'altra parte.

**783.** Costruire un segmento data la sua parte aurea, o la sua parte minore.

**784.** Dividere un segmento in due parti tali, che la somma dei quadrati del segmento e di una delle sue parti sia equivalente al doppio del quadrato dell'altra parte.

**785.** Dividere un segmento in due parti tali, che il quadrato della parte maggiore sia equivalente al doppio rettangolo dell'intiero segmento e della sua parte minore.

**786.** Costruire un triangolo equivalente ad uno dato, in modo che abbia un lato sopra una retta data ed un vertice in un vertice del primo triangolo.

**787.** Costruire un triangolo, che sia equivalente ad uno dato, e i cui vertici cadano rispettivamente su tre rette date.

**788.** Costruire un triangolo, dato un lato, l'altezza corrispondente e la somma dei quadrati degli altri due lati.

**789.** Costruire un triangolo, dato un angolo, il lato opposto e la differenza dei quadrati degli altri due lati.

**790.** Costruire un triangolo dato un lato, la corrispondente altezza e il rettangolo degli altri due lati.

**791.** Costruire un triangolo, dati due lati e la bisettrice dell'angolo compreso.

**792.** Costruire un triangolo, dati due lati e la bisettrice dell'angolo esterno conseguente all'angolo compreso fra i due lati.

**793.** Costruire un triangolo, dato un lato, l'angolo opposto e il rettangolo degli altri due lati.

**794.** Costruire un triangolo, dati due lati, la mediana relativa al terzo lato e la differenza degli angoli adiacenti a questo lato.

**795.** Costruire un triangolo, conoscendo un angolo, l'altezza relativa al lato opposto e la somma, o la differenza, dei due altri lati.

**796.** Costruire un triangolo rettangolo tale, che il quadrato di un cateto sia equivalente al rettangolo dell'altro cateto.

**797.** Costruire un quadrato, data la somma della diagonale e del lato.

**798.** Costruire un quadrato, data la differenza della diagonale e del lato.

**799.** Costruire un rettangolo, avente un dato perimetro, equivalente ad un rettangolo dato.

**800.** Costruire un quadrato, conoscendo la somma di un lato e della diagonale.

**801.** Costruire un quadrato, conoscendo la differenza della diagonale e di un lato.

**802.** In un triangolo inscrivere un rettangolo, che sia equivalente al triangolo formato dai due lati del triangolo e dal lato del rettangolo parallelo alla base del triangolo.

**803.** In un triangolo inscrivere un quadrato. Qual'è il più grande e quale il più piccolo dei tre quadrati, che si possono inscrivere?

**804.** In un circolo inscrivere un rettangolo equivalente ad un poligono dato.

**805.** In un dato semicircolo inscrivere un rettangolo equivalente ad un poligono dato.

**806.** In un circolo inscrivere un trapezio, del quale si conoscano la superficie e l'altezza.

**807.** In un circolo dato inscrivere un triangolo tale, che i suoi tre lati passino rispettivamente per tre punti arbitrari del piano.

**808.** In un circolo dato inscrivere un triangolo tale, che un lato sia parallelo a una retta data, e gli altri due lati passino rispettivamente per due punti dati sopra questa retta.

**809.** In un circolo dato inscrivere un triangolo tale, che un suo lato sia parallelo ad una retta data, e gli altri due lati passino rispettivamente per due punti arbitrari del piano.

**810.** In un triangolo dato inscrivere un rettangolo tale, che la somma dei quadrati dei suoi lati sia equivalente ad un quadrato dato.

**811.** Qual'è il più grande rettangolo inscritto in un dato triangolo?

**812.** Per due punti, presi sopra un circolo, condurre due corde parallele tali, che il trapezio, avente per basi queste corde, sia equivalente ad un rettangolo dato.

**813.** Descrivere un circolo, che abbia per centro un punto dato, e che su due rette parallele stacchi due corde tali, che il trapezio, avente per basi queste corde, sia equivalente ad un rettangolo dato.

**814.** Descrivere un circolo, che abbia per centro un punto dato sulla bisettrice di un angolo, e che sui lati dell'angolo stesso stacchi due corde, tali che il trapezio, avente queste corde per lati non paralleli sia equivalente ad un rettangolo dato.

**815.** Qual'è il minimo trapezio circoscritto ad un circolo?

**816.** Qual'è la losanga minima circoscritta ad un circolo?

**817.** Qual'è il più grande dei rettangoli, che hanno la somma di tre lati eguale ad un segmento dato.

**818.** In un piano sono dati un punto O ed un segmento AB in grandezza e posizione. Conducendo per O una retta (che non tagli il segmento AB) e da A, B le perpendicolari AD, BC alla medesima, si ottiene un trapezio ABCD. Trovare il più grande dei trapezi che si possono costruire in tal modo.

819. Dividere un segmento dato in due parti tali, che la somma dei loro quadrati sia la più piccola possibile.

820. Da un punto A esterno ad un cerchio condurre ad esso una segante, in modo che il quadrato della corda intercetta sia equivalente al rettangolo dei segmenti della segante contati a partire dal punto A.

821. Da un punto A esterno ad un cerchio condurre ad esso una segante, in modo che il rettangolo dei segmenti della segante, contati a partire dal punto A, sia equivalente ad un quadrato dato.

822. Dal vertice dell'angolo ottuso di un triangolo ottusangolo condurre una semiretta, che divida il lato opposto, in modo che il rettangolo delle sue parti sia equivalente al quadrato del segmento contato sulla semiretta a partire dal vertice del triangolo fino all'incontro del lato opposto.

823. Per un punto comune a due circoli, che si taglino, condurre una segante, in modo che il rettangolo delle corde intercettate su di essa sia equivalente a un quadrato dato.

824. In un quadrato inscrivere un rettangolo equivalente ad un quadrato dato.

825. Costruire un quadrato, le cui rette passino per quattro punti dati sopra una retta del piano.

826. Per un punto dato sopra uno dei lati eguali di un triangolo isoscele condurre una retta, che incontri il prolungamento dell'altro lato, in modo da formare un triangolo equivalente al dato.

827. Dato un triangolo ABC e un punto D del lato AB, costruire un triangolo equivalente ad ABC, che abbia un vertice in D e l'angolo $\widehat{A}$ in comune col triangolo.

828. Dati un circolo ed un triangolo, situati nello stesso piano, trovare sul circolo un punto tale, che la somma dei tre vertici del triangolo sia equivalente ad un quadrato dato.

829. Essendo C un punto di AB, trovare sopra CB e sul prolungamento due punti D e D′ tali, che il quadrato di CD sia equivalente al rettangolo di $\overline{AD . BD}$, e il quadrato di CD′ sia equivalente al rettangolo $\overline{AD' . BD}$.

830. Per il vertice A di un triangolo ABC condurre una retta, in modo che le perpendicolari BB′, CC′ ad essa condotte dagli estremi del lato opposto formino due triangoli rettangoli ABB′, ACC′ equivalenti.

831. Condurre per un punto dato un piano che divida un tetraedro dato in due parti equivalenti.

832. Condurre un piano, che sia parallelo ad una retta data, e che divida un tetraedro dato in due parti equivalenti.

833. Tagliare una piramide con un piano parallelo alla base, in modo che il prisma, avente per base la sezione e per altezza l'altezza del tronco, sia massimo.

834. Qual'è il parallelepipedo massimo inscritto in un ottaedro regolare?

835. Trovare un punto interno ad un tetraedro, tale che le quattro piramidi, aventi per vertice quel punto e per basi le facce del tetraedro dato, sieno equivalenti.

836. Per due punti, dati su due spigoli di un prisma triangolare, condurre un piano che scomponga il prisma in due parti equivalenti.

837. Trovare un circolo, che tagli tre circoli dati in un piano in coppie di punti opposti.

838. Trovare una sfera, che tagli quattro sfere date secondo circoli massimi.

839. Trovare un circolo, che tagli normalmente due circoli dati, e tagli un terzo circolo in due punti opposti.

840. Trovare una sfera, che tagli normalmente due sfere date, e tagli secondo circoli massimi altre due sfere date.

# LIBRO QUINTO

## CAPITOLO I

### Teoria delle proporzioni.

#### 1. — GRANDEZZE COMMENSURABILI E INCOMMENSURABILI, E GRANDEZZE PROPORZIONALI.

**337.** Fin qui ci siamo occupati di quelle proprietà delle grandezze. che discendono da uno studio puramente geometrico delle medesime, ed abbiamo escluso dalle dimostrazioni ogni sussidio aritmetico ed algebrico. In questo Capitolo e nei seguenti esporremo i principî, sui quali è basata la rappresentazione delle grandezze per mezzo di numeri, mostrando quanto si giovi della scienza del calcolo la teoria delle grandezze in generale e delle geometriche in particolare.

Intanto non è fuor di proposito ricordare ancora una volta che, occupandoci in seguito di grandezze, intenderemo sempre di riferirci a quelle classi di grandezze, per le quali è sempre possibile, date due qualunque di esse, appartenenti ad una stessa classe, stabilire se la prima è minore, equivalente o maggiore della seconda (i concetti di minore. equivalente o maggiore essendo estesi anche alle grandezze limiti), e per le quali è verificata la proprietà enunciata dalla proposizione di Archimede, da cui discende l'altra che, date due grandezze non equivalenti, appartenenti a una medesima classe, la maggiore o è equivalente a una multipla della minore, o è compresa fra due multiple successive della minore. In conseguenza, date due grandezze omogenee A e B ($A > B$), ammetteremo che la grandezza A sia multipla della B secondo un determinato numero $n$, oppure la A sia compresa fra due multipli successivi $n$B ed $(n + 1)$ B della B; in ambedue i casi diremo che A *contiene* n *volte* B, *e che la differenza* $A - nB$ *è il resto delle grandezze considerate,* e che di una grandezza si possa trovare una multipla o una summultipla secondo un numero qualunque.

Emerge chiaramente dalle considerazioni suesposte, che esistono infiniti gruppi di grandezze, le quali ammettono una multipla (o summultipla) comune; per es. due o più summultiple di una stessa grandezza

hanno questa per multipla comune, e due o più multiple di una stessa grandezza hanno questa per summultipla comune.

Inoltre, se due grandezze hanno una multipla comune ed una summultipla comune, ne hanno infinite, perchè anche ogni multipla della multipla comune ed ogni summultipla della summultipla comune sono rispettivamente multiple e summultiple delle grandezze date.

Per tutte le considerazioni fatte ci troviamo nella possibilità di dare la seguente

**Definizione.** — Due o più grandezze, che ammettono una summultipla comune, si dicono *commensurabili fra loro.*

**338. Teorema.** — *Ogni summultipla comune a due grandezze date è anche una summultipla comune alla minore di esse e al loro resto; e viceversa.*

1°. Infatti, sieno A, B le grandezze date, R il loro resto, e sia $R = A - mB$ ovvero $A = mB + R$. Se C è una summultipla comune ad A e B, dovrà essere $A = p \cdot C$, $B = q \cdot C$, e quindi

$$R = p \cdot C - mq \cdot C, \quad \text{ossia} \quad R = (p - mq)\,C,$$

d'onde si ha

$$C = \frac{1}{p - mq} R;$$

vale a dire C è summultipla anche di R.

2°. Se C è una summultipla comune a B ed R, dovrà essere $B = q \cdot C$, $R = kC$; ma $A = mB + R$, e quindi

$$A = mq \cdot C + kC = (mq + k) \cdot C,$$

d'onde deriva

$$C = \frac{1}{mq + k} \cdot A;$$

vale a dire C è anche una summultipla di A.

**339. Problema.** — *Verificare se due grandezze date ammettono una summultipla comune.*

Date due grandezze omogenee A e B, e supposto $A > B$, la grandezza A potrà essere, o no, multipla di B. Nel primo caso B è evidentemente una summultipla comune di A e B. Nel secondo la grandezza A dovrà essere eguale ad una multipla $m$B di B aumentata di un resto R minore di B, sarà cioè $A = mB + R$, ed allora, per i teoremi del § precedente, ogni summultipla comune di A e B è anche summultipla comune di B ed R, e viceversa. Allora, se B è eguale ed una multipla $m_1R$ di R, sarà R una summultipla comune di B ed R, e quindi anche di A e B. Se poi B non è multipla di R, dovrà essere eguale ad una multipla $m_1R$ di R aumentata di un resto $R_1$ minore di R, sarà cioè $B = mR + R_1$. Perciò ogni summultipla comune di B ed R, deve essere anche una summultipla comune di R e $R_1$, e viceversa; e se $R_1$ è summultipla di R, sarà $R_1$ summultipla comune di B ed R, e quindi anche di A e B, e viceversa. Se non lo è, si dovrà avere $R = m_2R_1 + R_2$,

dove $R_2$ è minore di $R_1$. Proseguendo in questo modo, potremo costruire una serie di resti $R, R_1, R_2 \dots . R_{n-1}, R_n \dots .$

È evidente intanto che, se uno di questi resti è multiplo del successivo, questo è un summultiplo comune di sè stesso e del precedente, e perciò anche delle due grandezze date A e B.

Viceversa, se le due grandezze date A e B ammettono una summultipla comune, necessariamente avverrà, che uno dei resti della serie suddetta sarà summultiplo del precedente. Infatti essendo $A = mB + R$ e $B > R$, si ha $R < \frac{A}{2}$, ed essendo $R = m_1 R_1 + R_2$ si trova $R_2 < \frac{R}{2}$, e quindi anche $R_2 < \frac{A}{4}$. Nello stesso modo si può ricavare $R_4 < \frac{A}{8}$, $R_8 < \frac{A}{16}, \dots .$ Perciò, supposto che la grandezza C sia una summultipla comune ad A e B, se con l'operazione suddescritta non si arrivasse mai ad un resto multiplo del successivo, si potrebbe però arrivare a trovare un resto minore di C, perchè la serie dei resti $A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \frac{A}{8}, \dots$ è indefinitamente decrescente (§ 293 Teor. 3°), e ciò è assurdo perchè C, che è summultipla comune ad A e B, e quindi anche summultipla di tutti i resti ottenuti, dovrebbe essere summultipla di grandezze minori di C.

Vi sono però dei casi in cui prolungando la serie dei resti $R, R_1, R_2 \dots .$ quanto si vuole, non si giunge mai a trovare un resto summultiplo del precedente. I due teoremi del § seguente varranno a dare due esempi di grandezze che non ammettono alcuna summultipla comune, onde possiamo dare la seguente.

**Definizione.** — Due grandezze, che non ammettono alcuna summultipla comune, si dicono *incommensurabili fra loro.*

**340. Teorema 1°.** — *Un lato e una diagonale di un quadrato sono incommensurabili.*

Sia ABCD un quadrato dato, AC una sua diagonale. Poichè in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza, la diagonale AC contiene il lato AB una volta soltanto e si ha un certo resto, che chiameremo EC. Condotta EF perpendicolare ad AC ed unito E con B, si osservi che nel triangolo EBF gli angoli $\widehat{BEF}, \widehat{EBF}$ sono eguali, come differenze di un angolo retto e degli angoli eguali $\widehat{AEB}, \widehat{ABE}$ appartenenti al triangolo isoscele ABE; ne viene che è $BF \equiv EF$. Ma anche il triangolo EFC è isoscele, perchè l'angolo $\widehat{FEC}$ è retto per costruzione, l'angolo $\widehat{ECF}$ è la metà di un retto, e quindi anche l'angolo $\widehat{EFC}$ è la metà di un angolo retto. Ne deriva che il lato EF è eguale al lato EC, ed essendo $EF \equiv BF$, si ottiene $BF \equiv EC$.

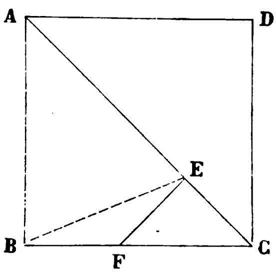


Fig. 277.

In conseguenza, per trovare quante volte il lato BC contiene il segmento EC, basta sottrarre EC da BC, indi vedere quante volte la

differenza FC contiene ancora EC. Ma FC è la diagonale di un quadrato che ha per lato EC, dunque siamo condotti nuovamente al caso di cercare quante volte la diagonale di un quadrato contiene un suo lato. Proseguendo colle medesime costruzioni è facile vedere che, dovendosi ripetere sempre il caso di trovare il resto fra la diagonale e il lato di un quadrato, non si potrà mai arrivare ad un resto, che sia summultiplo del precedente; vale a dire la diagonale e il lato dati non ammettono alcuna summultipla comune.

**Teorema 2°.** — *Un segmento e la sua parte aurea sono incommensurabili.*

Sia AB un segmento dato, ed AD la sua parte aurea (fig. 278). Poichè la parte aurea di un segmento è maggiore dell'altra parte, il segmento AB contiene AD una volta soltanto, e si ha per resto DB. Se ora si costruisce il triangolo isoscele ACB con la base BC eguale ad AD, e si congiunge il vertice C con D, si vede subito (§ 191 Prob. e § 274 Cor.) che i triangoli ACB, BCD sono entrambi isosceli, e che in ciascuno di essi ogni angolo alla base è il doppio dell'angolo al vertice; dunque DB è eguale alla parte aurea EC del segmento BC. Deriva da ciò che, per trovare quante volte AD contiene il primo resto DB, siamo condotti nuovamente a ricercare quante volte il segmento BC contiene la sua parte aurea EC. Procedendo in questo modo colle stesse costruzioni, è chiaro che si troveranno sempre dei resti, i quali decrescono indefinitamente, senza mai arrivare ad un resto, che sia summultiplo del precedente; per conseguenza il segmento dato e la sua parte aurea non ammettono alcuna summultipla comune.

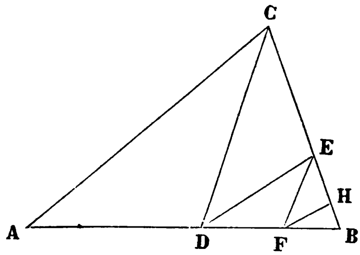


Fig. 278.

**341. Definizioni.** — **1ª.** Una multipla, o summultipla, della grandezza A secondo un numero $n$ si dice *prodotto* di A per $n$, o per $\frac{1}{n}$, rispettivamente.

**2ª.** La multipla secondo un numero $m$ di una summultipla di A secondo un numero $n$ si dice *prodotto* di A per $\frac{m}{n}$ e s'indica colla scrittura $\frac{m}{n}$ A.

**Teoremi.** — *1°. La multipla secondo un numero* m *di una multipla secondo il numero* n *di una grandezza* C *è equivalente alla multipla di* C *secondo il numero* m $\times$ n.

Infatti se $A = mB$ e $B = nC$ risulta A equivalente a $m$ volte una somma di grandezze equivalenti ad $n$ volte C, ossia è equivalente ad $n + n + \ldots = m.n$ volte la grandezza C.

*2°. La summultipla secondo un numero* n *di una multipla di* A *secondo un numero* m *è equivalente al prodotto di* A *per* $\frac{m}{n}$.

Sia

$$C = m\frac{A}{n}, \quad e \quad D = \frac{A}{n}.$$

Si ha evidentemente

$$mnD = mA,$$

da cui (§ 245 Teor. 8) si ricava

$$nmD = mA,$$

e quindi

$$C = mD = \frac{mA}{n},$$

ossia

$$\frac{mA}{n} = m\frac{A}{n}.$$

*3°. La summultipla secondo il numero* m *della summultipla secondo il numero* n *della grandezza* A *è equivalente alla summultipla di* A *secondo il numero* mn.

Infatti abbiam visto (Teor. 1°) che, se

$$A = mB \text{ e } B = nC, \quad \text{si ha pure} \quad A = m\,.\,nC.$$

Se ne deduce che se

$$B = \frac{1}{m}A \quad C = \frac{1}{n}B, \quad \text{si ha pure} \quad C = \frac{1}{m\,.\,n}A.$$

*4°. Secondo che il prodotto di una grandezza* A *per un numero* $\frac{m}{n}$ *è maggiore, eguale o minore del prodotto di* A *per un altro numero* $\frac{m'}{n'}$, *si ha pure* $\frac{m}{n} \gtreqless \frac{m'}{n'}$; *e viceversa.*

Infatti, secondo che è

$$\frac{m}{n}A \gtreqless \frac{m'}{n'}A,$$

si ha pure (Teor. 1°)

$$m'nA \gtreqless nm'A,$$

e quindi

$$m'n \gtreqless nm',$$

ossia

$$\frac{m}{n} \gtreqless \frac{m'}{n'}.$$

Analogamente si dimostra il teorema inverso.

**Corollario.** — *Se* $\left(\frac{m+1}{n}A, \frac{m}{n}A\right)$ *è una coppia di variabili convergenti,*

*anche le corrispondenti variabili numeriche* $\left(\frac{m+1}{n}, \frac{m}{n}\right)$ *sono convergenti; e viceversa.*

**Definizione 3ª.** — Se $\alpha$ è un numero irrazionale definito dalle due serie convergenti di numeri razionali $\left(\frac{m+1}{n}, \frac{m}{n}\right)$ il limite delle due variabili convergenti $\left(\frac{m+1}{n}A, \frac{m}{n}A\right)$ si dice prodotto della grandezza A per il numero $\alpha$.

È facile estendere alle grandezze i teoremi, che si dimostrano in Aritmetica, relativi alla moltiplicazione dei numeri, sostituendo all'unità la grandezza A che si considera.

**342. Teorema.** — *Date due grandezze omogenee, esiste sempre un numero, ed uno solo, che moltiplicato per una di esse riproduce l'altra.*

Consideriamo prima il caso che le due grandezze date A, B sieno commensurabili, e indichiamo con D una loro summultipla comune.

Sia
$$A = mD, \qquad B = nD.$$

Dalla seconda si ricava $D = \frac{1}{n}B$, e quindi, sostituendo, si ha
$$A = \frac{m}{n}B.$$

Il numero $\frac{m}{n}$ è unico, cioè indipendente dalla scelta di D, per il teorema 4° del § precedente.

Consideriamo ora due grandezze A, B incommensurabili, e sia D una summultipla qualunque di B, cioè sia $B = nD$. La grandezza A, non potendo essere multipla di D, perchè, se lo fosse, A e B sarebbero commensurabili fra loro contro l'ipotesi, sarà compresa fra due multipli successivi di D, per es., sarà
$$(m+1)\,D > A > mD,$$
ovvero
$$\frac{m+1}{n}B > A > \frac{m}{n}B.$$

Se ora facciamo variare $n$ con una legge qualunque, in modo che cresca indefinitamente (per es. se diamo ad $n$ i valori $n, n', n'', n''', \ldots.$ rispettivamente eguali o maggiori di 2, 4, 8, 16, ...., ciascuno dei quali è doppio del precedente), è chiaro (§ 293 Teor. 3°) che le grandezze
$$\frac{m+1}{n}B, \quad \frac{m_1+1}{n_1}B, \quad \frac{m_2+1}{n_2}B, \ldots.,$$
$$\frac{m}{n}B, \quad \frac{m_1}{n_1}B, \quad \frac{m_2}{n_2}B, \ldots.,$$
si possono riguardare come stati corrispondenti di due grandezze variabili, decrescente la prima e crescente la seconda, tali che la prima è sempre maggiore della seconda e la loro differenza è indefinitamente

decrescente. Queste variabili sono dunque convergenti, e siccome comprendono fra loro la grandezza A, hanno per limite la detta grandezza A. Ma agli stati di queste due variabili corrispondono rispettivamente le frazioni

$$\frac{m+1}{n}, \quad \frac{m_1+1}{n_1}, \quad \frac{m_2+1}{n_2}, \ldots,$$

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \ldots,$$

le quali (§ 341 Cor.) si possono riguardare come valori di due numeri variabili, convergenti.

Il limite di queste due variabili è il numero $\alpha$, per il quale moltiplicando B si ottiene la grandezza A.

È da notarsi anche in questo caso che, se invece della grandezza D si considera un'altra summultipla D' di B, il numero $\alpha$ non varia.

Infatti supposto per es. $B = n'D'$, procedendo come si è indicato sopra, si trova

$$\frac{m+1}{n} B > A > \frac{m}{n} B, \qquad \frac{m'+1}{n'} B > A > \frac{m'}{n'} B;$$

e il rapporto della grandezza A alla grandezza B è espresso tanto dal limite delle due variabili convergenti $\left(\frac{m+1}{n}, \frac{m}{n}\right)$, quanto dal limite delle due variabili convergenti $\left(\frac{m'+1}{n'}, \frac{m'}{n'}\right)$.

Sieno $\alpha$, $\alpha'$ questi due limiti. Dalle due limitazioni surriferite evidentemente si ricava

$$\frac{m+1}{n} B > \frac{m'}{n'} B, \qquad \frac{m'+1}{n} B > \frac{m}{n} B.$$

Allora sappiamo (§ 300 Teor.) che è sempre possibile, per ogni stato $\left(\frac{m'+1}{n'} B\right)_0$ della variabile $\frac{m'+1}{n'} B$ determinare uno stato della variabile $\frac{m+1}{n} B$, a partire dal quale sia sempre

$$\left(\frac{m'+1}{n'} B\right)_0 > \frac{m+1}{n} B,$$

e per ogni stato $\left(\frac{m'}{n'} B\right)_0$ della variabile $\frac{m'}{n'} B$, determinare uno stato della variabile $\frac{m}{n} B$, a partire dal quale si abbia

$$\left(\frac{m'}{n'} B\right)_0 < \frac{m}{n} B.$$

Ne segue che per ogni valore di $\frac{m'+1}{n}$ si possono determinare valori di $\frac{m+1}{n}$ minori di esso, e che per ogni valore di $\frac{m'}{n'}$ si possono determinare valori di $\frac{m}{n}$ maggiori di esso; dunque, essendo per ipotesi $\alpha < \frac{m+1}{n}$,

sarà pure $\alpha < \frac{m'+1}{n'}$, ed essendo $\alpha > \frac{m}{n}$, si avrà pure $\alpha > \frac{m'}{n'}$, vale a dire si avrà $\frac{m'+1}{n'} > \alpha > \frac{m'}{n'}$. Allora $\alpha$ ed $\alpha'$ sono limiti delle stesse variabili convergenti, e perciò sono eguali.

**Definizione.** — *Rapporto di una grandezza* A *ad una grandezza* B, *o misura di una grandezza* A *rispetto ad una grandezza* B, è il numero per cui bisogna moltiplicare B per avere A.

Indicheremo il rapporto $r$ di due grandezze A, B con una delle scritture $\frac{A}{B} = r$, $A : B = r$, che si leggeranno: " il *rapporto di* A *a* B *è eguale ad* r „ oppure " la *misura di* A *rispetto a* B *è eguale ad* r „.

**343. Teorema** *1°*. — *Se sono dati i rapporti di più grandezze ad una medesima grandezza* A.

*1° il rapporto di una delle grandezze date alla grandezza* A *è maggiore, eguale o minore del rapporto di un'altra grandezza alla grandezza* A, *secondochè la prima grandezza è maggiore, equivalente o minore della seconda;*

*2° il rapporto della somma di due o più grandezze alla grandezza* A *è eguale alla somma dei rapporti delle stesse grandezze alla grandezza* A.

*E viceversa.*

1°. Sieno $r, r'$ i rapporti di due grandezze date B, C alla grandezza A. Secondo che è $B \gtreqless C$ si ha pure, per definizione di rapporto $rA \gtreqless r'A$, e quindi $r \gtreqless r'$.

2°. Sieno $r_1$, $r_2$ i rapporti di due grandezze $A_1$, $A_2$ ad una grandezza B, vale a dire sia $A_1 = r_1 B$, $A_2 = r_2 B$. Si vuol dimostrare che $A_1 + A_2 = (r_1 + r_2)B$ ossia che il rapporto di $A_1 + A_2$ a B è eguale alla somma dei rapporti $r_1 + r_2$. — Il teorema è evidente se $r_1$, $r_2$ sono due numeri interi.

Se $r_1$, $r_2$ sono due frazioni, si possono ridurre a eguale denominatore; per es. sia $r_1 = \frac{m_1}{n}$, $r_2 = \frac{m_2}{n}$. Allora essendo $A_1 = \frac{m_1}{n} B = m_1 \frac{B}{n}$ e $A_2 = \frac{m_2}{n} B = m_2 . \frac{B}{n}$ si ha pure

$$A_1 + A_2 = (m_1 + m_2)\frac{B}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n} B,$$

ovvero

$$A_1 + A_2 = (r_1 + r_2) B.$$

Se finalmente $r_1$, $r_2$ sono tutti e due, o uno almeno, numeri irrazionali; per es. $r_1 = \lim\left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_1+1}{n}\right)$, $r_2 = \lim\left(\frac{m_2}{n}, \frac{m_2+1}{n}\right)$, si ha anche $(r_1 + r_2) = \lim\left\{\frac{m_1 + m_2}{n}, \frac{(m_1+1)+(m_2+1)}{n}\right\}$.

Inoltre risulta

$$A_1 = \lim\left(\frac{m_1}{n}B,\ \frac{m_1+1}{n}B\right), \qquad A_2 = \lim\left(\frac{m_2}{n}B,\ \frac{m_2+1}{n}B\right),$$

e quindi

$$A_1 + A_2 = \lim\left\{\frac{m_1+m_2}{n'}B,\ \frac{(m_1+1)+(m_2+1)}{n}B\right\},$$

ossia

$$A_1 + A_2 = (r_1 + r_2)B.$$

**Corollario 1°.** — *Dato il rapporto di una grandezza ad un'altra, il rapporto di una multipla (o summultipla) della prima alla seconda è multiplo (o summultiplo) secondo lo stesso numero del rapporto dato.*

**Teorema 2°.** — *Il rapporto della differenza di due grandezze ad una terza è eguale alla differenza dei rapporti delle due grandezze date a questa terza.*

Indichiamo infatti con $r$, $r'$, $r''$ i rapporti delle grandezze A, B, C ad una stessa grandezza D. Supponendo $A - B = C$, si ricava

$$B + C = A,$$

e quindi

$$r' + r'' = r,$$

e per conseguenza

$$r - r' = r''.$$

**Corollario 2°.** — *Se la differenza di due grandezze decresce indefinitamente, anche la differenza dei rapporti delle grandezze date ad una terza decresce indefinitamente; e viceversa.*

**344. Teorema.** — *Dati i rapporti di una prima grandezza ad una seconda e di questa ad una terza, il rapporto della prima alla terza grandezza è eguale al prodotto dei due rapporti dati.*

Sia $r$ il rapporto di una grandezza A ad una grandezza B, ed $r'$ il rapporto di B ad una terza grandezza C.

Per definizione di rapporto si ha $A = rB$, $B = r'C$. Si vuol dimostrare che anche $A = (r \cdot r')C$ ossia che il rapporto di A a C è il prodotto $r \cdot r'$. Ciò è evidente se $r$, $r'$ sono numeri interi. Se $r$, $r'$ sono frazionari, per es. $r = \frac{m}{n}$, $r' = \frac{m'}{n'}$, si ha

$$A = \frac{m}{n}B = m\frac{B}{n}, \quad B = \frac{m'}{n'}C = m'\frac{C}{n'},$$

e quindi, applicando i teoremi del § 341, si ricava successivamente

$$A = m\left(\frac{m'\frac{C}{n'}}{n}\right) = m \cdot \left(m'\frac{C}{n \cdot n'}\right) = m \cdot m'\frac{C}{n \cdot n'} = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n'}C$$

ossia

$$A = r r' C.$$

Se infine $r, r'$ son numeri irrazionali, per es.

$$r = \lim \left(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right), \quad r' = \lim \left(\frac{m'}{n'}, \frac{m'+1}{n'}\right),$$

si deduce

$$rr' = \lim \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'}, \frac{m+1}{n} \cdot \frac{m'+1}{n'}\right).$$

Si ha poi

$$\frac{m}{n}\left(\frac{m'}{n'}\mathrm{C}\right) = \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'}\mathrm{C}, \quad \frac{m+1}{n}\left(\frac{m'+1}{n}\mathrm{C}\right) = \frac{m+1}{n} \cdot \frac{m'+1}{n'}\mathrm{C},$$

e quindi

$$\lim\left\{\frac{m}{n}\left(\frac{m'}{n'}\mathrm{C}\right), \frac{m+1}{n}\left(\frac{m'+1}{n'}\mathrm{C}\right)\right\} = \lim\left\{\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'}\mathrm{C}, \frac{m+1}{n} \cdot \frac{m'+1}{n'}\mathrm{C}\right\}$$

ossia

$$\mathrm{A} = r \,.\, r'\mathrm{C}.$$

**Corollario.** — *Dati i rapporti di due grandezze ad una terza, il rapporto della prima alla seconda è il quoziente dei rapporti delle medesime grandezze alla terza.*

Sia

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} = r, \qquad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = r'.$$

Per il teorema dimostrato si ha

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \times \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}};$$

da cui si deduce

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = r : r',$$

cioè il rapporto di A a B è il quoziente dei rapporti di A e B alla grandezza C.

**345. Definizioni.** — 1ª. Se il rapporto di due grandezze A, B è eguale a quello di altre due C, D, si dice che queste grandezze formano una *proporzione*.

S'indica una proporzione con una delle scritture

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}},$$
$$\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{C} : \mathrm{D},$$
$$\mathrm{A} : \mathrm{B} : : \mathrm{C} : \mathrm{D},$$

che si leggono " A *sta a* B *come* C *sta a* D ".

2ª. Le grandezze A, B, C, D si dicono i *termini* della proporzione; A e C ne sono gli *antecedenti,* B e D i *conseguenti,* A e D gli *estremi,* B e C i *medii.*

È chiaro che i primi due termini di una proporzione devono essere grandezze omogenee; gli ultimi due devono pure essere grandezze omo-

genee fra loro, ma possono appartenere ad una classe diversa da quella alla quale appartengono i primi due.

3ª. Se quattro grandezze A, B, C, D, considerate nell'ordine scritto, formano una proporzione, l'ultima di esse si chiama *quarta proporzionale rispetto alle altre tre*.

4ª. Se in una proporzione i medii sono eguali o equivalenti, la proporzione si dice *continua*, e ciascuno dei medii si dice *medio proporzionale* fra le altre due grandezze.

Per es. se due grandezze A e B sono equimultiple di B e C, si ha evidentemente

$$A:B=B:C,$$

dove B è media proporzionale fra A e C.

5ª. Date due grandezze $A_1$, $A_2$ omogenee, se si determinano successivamente altre grandezze $A_3$, $A_4$, $A_5$, .... omogenee alle prime, tali che sieno verificate le proporzioni

$$A_1:A_2=A_2:A_3=A_3:A_4=A_4:A_5=\ldots,$$

le grandezze $A_3$, $A_4$, $A_5$,... si chiamano rispettivamente *la terza, la quarta, la quinta,... proporzionale rispetto alle grandezze* $A_1$, $A_2$.

I rapporti di $A_1$ ad $A_3$, di $A_1$ ad $A_4$, di $A_1$ ad $A_5$,.... si chiamano rispettivamente *il rapporto duplicato, triplicato, quadruplicato..... di* $A_1$ ad $A_2$.

**Teorema.** — *Se quattro grandezze formano una proporzione, i rapporti delle due prime ad un'altra omogenea con esse, e i rapporti delle altre due ad un'altra grandezza omogenea con esse formano pure una proporzione nell'ordine stesso delle grandezze date; e viceversa.*

1°. Infatti, se quattro grandezze A, B, C, D, nell'ordine indicato, formano una proporzione, e $a, b$ sono i rapporti delle grandezze A, B ad una grandezza omogenea M, e $c, d$ sono i rapporti delle grandezze C, D ad una grandezza omogenea N, il rapporto di A a B è dato dal quoziente $\frac{a}{b}$, e il rapporto di C a D è dato dal quoziente $\frac{c}{d}$; perciò si deve avere

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

dunque i quattro numeri $a, b, c, d$ formano una proporzione nell'ordine stesso delle grandezze date.

2°. Inversamente, se quattro numeri $a, b, c, d$ sono in proporzione, e A, B, C, D sono quattro grandezze, tali che i rapporti delle grandezze A e B ad una grandezza M omogenea con esse sieno rispettivamente $a$ e $b$, e i rapporti delle grandezze C, D ad una grandezza N omogenea con esse sieno rispettivamente $c$, $d$, i rapporti di A a B e di C a D sono $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, e perciò sono eguali fra loro. Ne segue che le quattro grandezze A, B, C, D formano una proporzione nell'ordine stesso dei numeri dati.

**346.** Deriva da ciò che abbiamo dimostrato nel § precedente, che per le proporzioni di grandezze devono sussistere tutte le proprietà, che in Aritmetica si dimostrano per le proporzioni numeriche, ad eccezione

di quelle proprietà, che si riferiscono al prodotto, o quoziente, o potenza, o radice dei termini di una proporzione, poichè " moltiplicare o dividere due grandezze fra loro, elevare una grandezza a potenza, estrarne la radice, „ sono locuzioni prive di qualunque significato, a meno che non s'intenda, che alle grandezze vengano sostituite le corrispondenti misure rispetto ad una grandezza qualunque omogenea ad esse.

Ci limitiamo ad enunciare qui sotto le più importanti proprietà delle proporzioni.

**Teorema 1°.** — *Se due proporzioni di grandezze hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti formano una proporzione.*

Cioè se

$$A:B = M:N$$
$$C:D = M:N,$$

si ha

$$A:B = C:D.$$

**Teorema 2°.** — *Se quattro grandezze sono in proporzione, si può sostituire agli antecedenti od ai conseguenti due equimultipli od anche due equisummultipli di essi.*

Cioè, se

$$A:B = C:D,$$

si ha pure

$$mA:nB = mC:nD,$$

oppure

$$\frac{1}{m}A:\frac{1}{n}B = \frac{1}{m}C:\frac{1}{n}D.$$

**Teorema 3°.** — *Se quattro grandezze sono in proporzione, si può scambiare ciascun antecedente col proprio conseguente.*

Cioè, se

$$A:B = C:D,$$

si ha pure

$$B:A = D:C$$

Si dice che questa proporzione si ricava dalla prima, *invertendo i termini.*

**Teorema 4°.** — *Se quattro grandezze sono in proporzione, la somma (o la differenza) dei primi due termini sta al primo o al secondo, come la somma (o la differenza) degli altri due sta al terzo o al quarto.*

Vale a dire, se

$$A:B = C:D,$$

si ha pure

$$(A \pm B):A = (C \pm D):C,$$

ed anche

$$(A \pm B):B = (C \pm D):D.$$

Si dice che quest'ultima proporzione, si ottiene, *componendo (o dividendo)* la data proporzione.

**Teorema** 5°. — *Se due proporzioni hanno gli antecedenti (o i conseguenti) rispettivamente eguali, i loro conseguenti (o i loro antecedenti) sono in proporzione.*

Vale a dire,

1° se

$$A:B = C:D\,,$$
$$A:E = C:F\,,$$

si ha pure

$$B:E = D:F\,;$$

2° se

$$A:B = C:D\,,$$
$$M:B = N:D\,,$$

si ha pure

$$A:M = C:N\,.$$

**Corollari.** — 1°. *Se due proporzioni hanno tre termini ordinatamente eguali, anche i termini rimanenti sono eguali.*

2°. *Se quattro grandezze sono in proporzione, la somma dei primi due termini sta alla loro differenza, come la somma degli altri due sta alla loro differenza.*

Cioè, se

$$A:B = C:D\,,$$

si ha pure

$$(A+B):(A-B) = (C+D):(C-D)\,.$$

**Teorema** 6°. — *Se due proporzioni hanno i medii (o gli estremi) ordinatamente eguali, si può formare una proporzione avente per estremi (o medii) quelli della prima, e per medii (o estremi) gli estremi (o medii) della seconda.*

Vale a dire,

1° se

$$A:B = C:D$$
$$M:B = C:N\,,$$

si ha pure

$$A:M = N:D$$

2° se

$$A:B = C:D$$
$$A:M = N:D\,,$$

si ha pure

$$M:B = C:N\,.$$

**Teorema** 7°. — *Se quattro grandezze, tutte omogenee, sono in proporzione, si possono scambiare fra loro i medii, o gli estremi.*

Cioè, se

$$A:B = C:D\,,$$

si ha pure

$$A:C = B:D$$
$$D:B = C:A$$
$$D:C = B:A.$$

Si dice che queste proporzioni si ottengono dalla prima *permutando i medii, o gli estremi.*

**Corollari.** — *3°. Se quattro grandezze omogenee sono in proporzione, la somma (o la differenza) degli antecedenti sta alla somma (o alla differenza) dei conseguenti, come un antecedente sta al proprio conseguente.*

*4°. Se quattro grandezze omogenee sono in proporzione, la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

*5.° Se più rapporti di grandezze, tutte omogenee, sono eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente qualunque sta al proprio conseguente.*

## 2. — PROPORZIONALITÀ DI SEGMENTI, DI SUPERFICIE E DI SOLIDI.

**347.** Se U è una grandezza variabile, e V è una sua multipla, o una sua summultipla, le due variabili U e V sono in corrispondenza univoca; e, indicando con $U_1$, $U_2$ due stati qualunque della prima variabile e con $V_1$, $V_2$ i corrispondenti stati della seconda, si ha evidentemente

$$U_1 : U_2 = V_1 : V_2 .$$

Se gli stati di due grandezze variabili U, V sono rispettivamente multipli e summultipli, secondo gli stessi numeri, di una grandezza costante A, le due variabili U, V sono in corrispondenza univoca. Quindi, indicando con $U_1$, $U_2$ due stati qualunque della prima variabile e con $V_1$, $V_2$ i corrispondenti stati della seconda, poichè le grandezze $U_1$, A, sono rispettivamente equimultiple delle grandezze A, $V_1$ si ha evidentemente

$$U_1 : A = A : V_1 ,$$

ed essendo anche $U_2$, A rispettivamente equimultiple di A, $V_2$, si ha pure

$$U_2 : A = A : V_2 ,$$

d'onde si ricava che

$$U_1 : U_2 = V_2 : V_1 .$$

**Definizioni.** — 1ª. Due grandezze variabili in corrispondenza univoca si dicono *direttamente proporzionali,* quando uno stato qualunque della prima variabile sta ad un altro stato qualunque della medesima, come lo stato dell'altra variabile, corrispondente al primo, sta allo stato della medesima, corrispondente al secondo.

2ª. Due grandezze variabili in corrispondenza univoca si dicono *inversamente proporzionali,* quando uno stato qualunque della prima sta ad un altro stato qualunque della medesima, come lo stato dell'altra variabile, corrispondente al secondo, sta allo stato della medesima, corrispondente al primo.

**348. Teorema.** — *Se due grandezze variabili sono in corrispondenza univoca, in modo che a stati eguali o equivalenti dell'una corrispondano stati eguali o equivalenti dell'altra, e allo stato somma di due o più stati dell'una corrisponda la somma degli stati corrispondenti dell'altra, le due grandezze sono direttamente proporzionali; e viceversa.*

1°. Osserviamo prima di tutto che se U, V sono due variabili, che soddisfano alle condizioni poste nell'enunciato del presente teorema, ed

$U_1$, $V_1$ sono stati corrispondenti delle medesime, anche due stati $mU_1$, $mV_1$ equimultipli di $U_1$, $V_1$ sono stati corrispondenti, poichè si possono riguardare come somme $U_1 + U_1 + \ldots\ldots, V_1 + V_1 + \ldots\ldots$ di stati corrispondenti. In secondo luogo, se $U_1 > U_2$, indicando con $U_r$ la differenza $U_1 - U_2$, avremo $U_1 = U_2 + U_r$, e quindi, essendo $V_1$, $V_2$, $V_r$ gli stati di V corrispondenti agli stati $U_1$, $U_2$, $U_r$ di U, è pure $V_1 = V_2 + V_r$; dunque sarà $V_1 > V_2$; vale a dire a stati crescenti di una variabile corrispondono stati crescenti dell'altra. Ciò posto, sieno $U_1$, $V_1$; $U_2$, $V_2$ due coppie di stati corrispondenti delle due variabili U, V, e sia $nU_1$ una multipla qualunque di $U_1$. Se esiste una multipla $mU_2$ di $U_2$, tale che sia

$$nU_1 = mU_2,$$

deve anche essere

$$nV_1 = mV_2,$$

poichè $nV_1$, $mV_2$ sono gli stati corrispondenti ai due stati equivalenti $nU_1$, $mU_2$; perciò sarà

$$U_1 = \frac{m}{n} U_2 \quad V_1 = \frac{m}{n} V_2,$$

d'onde deriva che il rapporto di $U_1$ ad $U_2$ e quello di $V_1$ a $V_2$ sono eguali alla frazione $\frac{m}{n}$, cioè

$$U_1 : U_2 = V_1 : V_2.$$

Se poi non esiste alcuna multipla di $U_2$ equivalente ad $nU_1$, si potranno trovare due multiple consecutive di $U_2$, che comprendono $nU_1$, tali cioè, che sia

$$(m + 1)\ U_2 > nU_1 > mU_2.$$

Ora siccome gli stati corrispondenti ad $(m + 1)\ U_2$, $nU_1$, $mU_2$, sono rispettivamente $(m + 1)\ V_2$, $nV_1$, $mV_2$ e a stati crescenti di U corrispondono, stati crescenti di V, si dovrà avere

$$(m + 1)\ V_2 > nV_1 > mV_2;$$

dalle quali diseguaglianze si ricava

$$\frac{m+1}{n} > \frac{U_1}{U_2} > \frac{m}{n}$$
$$\frac{m+1}{n} > \frac{V_1}{V_2} > \frac{m}{n}.$$

Facendo crescere $n$ indefinitivamente con una data legge, si vede che i rapporti $\frac{U_1}{U_2}$, $\frac{V_1}{V_2}$ sono i limiti, verso i quali convergono le frazioni $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m}{n}$, e perciò sono eguali ossia

$$U_1 : U_2 = V_1 : V_2.$$

2°. Se $U_1 : U_2 = V_1 : V_2$, e supponiamo per es. che sia $U_1 = U_2$, si ha pure $V_1 = V_2$, e viceversa. Dalla stessa proporzione si ricava (§ 346, Teor. 4°) che $(U_1 + U_2) : U_2 = (V_1 + V_2) : V_2$; d'altra parte, se si indica con $U_s$ lo stato somma dei due stati $U_1$, $U_2$, e con $V_s$ lo stato di V

corrispondente ad $U_s$, si ha pure $U_s : U_2 = V_s : V_2$, e quindi dalle due ultime proporzioni si ricava (§ 346 Cor. 1°) che $V_s = V_1 + V_2$. Resta dunque dimostrato che a stati equivalenti della variabile U corrispondono stati equivalenti della variabile V, e che a uno stato somma di due o più stati di U corrisponde lo stato di V, somma dei corrispondenti stati della medesima.

Abbiamo già trovati molti esempi di grandezze variabili in corrispondenza univoca, che soddisfano alle condizioni stabilite nell'ipotesi del teorema precedente, possiamo perciò ricavarne immediatamente i seguenti

**Corollari.** — *I diedri sono direttamente proporzionali ai loro rettilinei* (§ 69 Teor.)

*2°. I settori di uno stesso circolo, o di circoli eguali, gli angoli al centro e gli archi, che li comprendono, sono grandezze variabili direttamente proporzionali* (§ 33 Teor. 1°).

*3°. Gli spicchi sferici di una stessa sfera, o di sfere eguali, i diedri al centro e gli angoli sferici, che li comprendono, i rettilinei di questi diedri e gli archi equatoriali di questi angoli sferici sono cinque grandezze variabili direttamente proporzionali* (§ 33 Teor. 2° e § 215 Cor. 1°)

*4°. I perimetri dei poligoni regolari di* n *lati sono direttamente proporzionali ai loro raggi e ai loro apotemi.*

*5°. Gli archi di due o più circoli, compresi in angoli al centro eguali, e i circoli medesimi sono direttamente proporzionali ai loro raggi* (§ 315 Teor. 3°).

*6°. I parallelogrammi, od i prismi, di una serie sono direttamente proporzionali ai segmenti corrispondenti* (§ 109 Teor. e § 151 Teor.)

*7°. I triangoli, od i prismi, che hanno l'altezza costante, sono direttamente proporzionali alle loro basi.*

Infatti, tutti i triangoli, o prismi, che hanno la stessa altezza e basi eguali, od equivalenti, sono equivalenti (§ 251 Cor. 1° e § 289 Cor. 2°), e viceversa; perciò i triangoli, o i prismi, e le loro basi sono variabili, che si corrispondono univocamente. Inoltre un triangolo, od un prisma, che ha per altezza $h$ e per base la somma di due basi $b_1$, $b_2$ è equivalente alla somma di due triangoli, o di due prismi, che hanno l'altezza $h$ e per base $b_1$ e $b_2$ rispettivamente.

*8°. Le piramidi, che hanno l'altezza, o la base, costante, sono direttamente proporzionali alle loro basi, od alle loro altezze.*

Dimostrazione analoga alla precedente.

*9°.* (Teorema di Talete). — *Se i punti di due rette si corrispondono univocamente, in modo che sieno parallele le rette individuate dalle coppie di punti corrispondenti, i segmenti corrispondenti sono direttamente proporzionali.*

In altre parole: *I segmenti corrispondenti di due trasversali di una serie di rette parallele sono direttamente proporzionali* (§ 53 Teor. 1°).

Reciprocamente: *Se i punti di due rette si corrispondono univocamente, in modo che i segmenti corrispondenti sieno direttamente proporzionali e le rette individuate da due coppie di punti corrispondenti sieno parallele, tutte le rette, individuate da coppie di punti corrispondenti, sono parallele.*

Il teorema diretto è conseguenza immediata del teorema 1° del § 53. Inversamente, sieno $r$, $r'$ (fig. 279) due rette, i cui punti si corrispondano univocamente nel modo indicato, e sieno inoltre le rette AA′, BB′ parallele. Se C e C′ sono altri due punti corrispondenti, si deve avere la proporzione

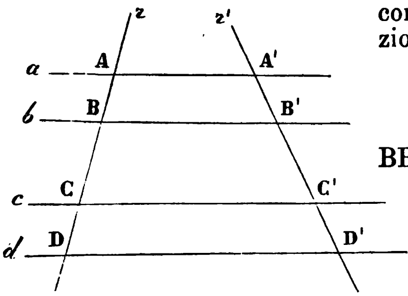



Fig. 279.

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Se ora la CC′ non fosse parallela alla BB′, potremmo condurre per C una retta $CC_1$ parallela ad essa, che incontrerebbe la $r'$ in un punto $C_1$, e si avrebbe la proporzione

$$AB : A'B' = BC : B'C_1.$$

Da queste due proporzioni risulta $B'C' \equiv B'C_1$. In simil guisa si dimostra che deve essere $A'C' \equiv A'C_1$, e perciò il punto $C_1$ deve coincidere con C′, ossia la retta CC′ è parallela alle parallele AA′, BB′.

*10°. Date due rette, comunque situate nello spazio, se si considerano come corrispondenti i loro punti d'incontro con una serie di piani paralleli, i segmenti corrispondenti delle due rette sono direttamente proporzionali.*

In breve: *I segmenti corrispondenti di due trasversali di una serie di piani paralleli sono direttamente proporzionali.*

Reciprocamente: *Se i punti di due rette, non situate nello stesso piano, si corrispondono univocamente, in modo che i segmenti corrispondenti sieno direttamente proporzionali, tutte le coppie di punti corrispondenti giacciono su piani paralleli.*

Il teorema diretto discende immediatamente dal teor. 2° del § 53. Inversamente, sieno $r$ ed $r'$ due rette non situate in un piano (fig. 280),

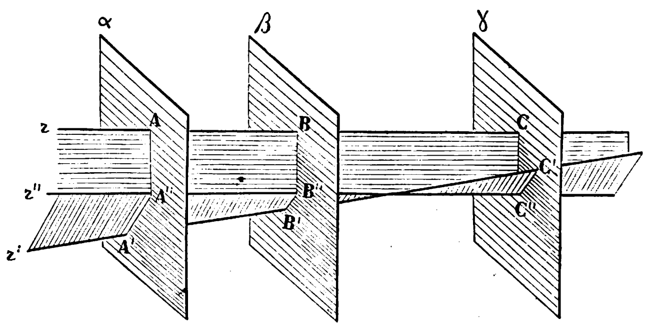



Fig. 280.

i punti delle quali si corrispondono univocamente, in modo che i segmenti corrispondenti delle due rette sieno proporzionali, e sieno A, A′: B, B′ due coppie di punti corrispondenti. Le rette AA′, BB′ non possono

giacere in un piano, perchè se ciò accadesse, anche le rette $r$ ed $r'$ giacerebbero in un piano; dunque si può condurre per la AA′ un piano $\alpha$ parallello alla BB′, e per la BB′ un piano $\beta$ parallello alla AA′; e perciò le rette AA′, BB′ giacciono in piani paralleli $\alpha$ e $\beta$. Condotta poi per un punto della $r'$ una retta $r''$ parallela ad $r$, s'indichino con A″, B″ i punti d'incontro di questa retta coi due piani $\alpha$ e $\beta$. È chiaro che le congiungenti AA″, A′A″ sono ordinatamente parallele alle rette BB″, B′B″, e che, se indichiamo con C, C′ un'altra coppia di punti corrispondenti delle due rette date e con C″ il punto di $r''$ tale che sia BC = B″C″, la CC″, per il Corollario prec. dovrà essere parallela a BB″ e la C′C″ parallela a B′B″. Perciò il piano $\gamma$, individuato dalle rette CC″ e C′C″, è parallelo al piano $\beta$, e quindi anche al piano $\alpha$.

*11°. Se i punti di due rette parallele si corrispondono univocamente, in modo che le rette individuate dalle coppie di punti corrispondenti passino per uno stesso punto, i segmenti corrispondenti sono direttamente proporzionali* (§ 86 Teor.)

Reciprocamente: *Se i punti di due rette parallele si corrispondono univocamente, in modo che sieno direttamente proporzionali i segmenti corrispondenti, le rette individuate dalle coppie di punti corrispondenti sono parallele, o passano per un punto.*

**349. Teorema** *1°. — Se due triangoli hanno un angolo eguale, il rapporto delle loro superficie è eguale al prodotto dei rapporti dei lati che individuano quest'angolo.*

Se T = ABC, T′ = A′B′C′, sono due triangoli aventi gli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{A'}$ eguali, si porti A′B′C′ sull'altro ABC in modo che i due angoli eguali coincidano. Unendo allora B con C′ si ha (§ 348 Cor. 7°), indicando con T″ il triangolo ABC′ ,

$$\frac{T}{T''} = \frac{AC}{AC'}$$

$$\frac{T''}{T'} = \frac{AB}{AB'}$$

Ne segue (§ 344 Teor.)

$$\frac{T}{T'} = \frac{AC}{AC'} \cdot \frac{AB}{AB'}.$$

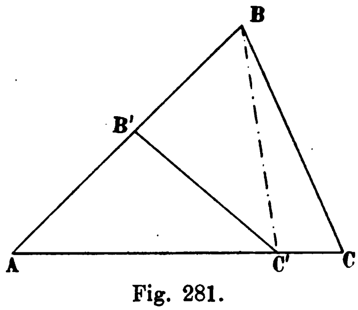


Fig. 281.

**Corollario** *1°. — Il rapporto di due parallelogrammi equiangoli fra loro, o in particolare di due rettangoli, è eguale al prodotto dei rapporti dei due lati dell'uno concorrenti in un vertice a due lati dell'altro pure concorrenti in un vertice.*

Infatti questi parallelogrammi son doppi di due triangoli che si trovano nelle condizioni supposte dal teorema precedente.

**Teorema** *2°. — Se due tetraedri hanno un triedro eguale, il rapporto dei loro solidi è eguale al prodotto dei rapporti dei tre spigoli dell'uno ai tre spigoli dell'altro concorrenti nel vertice del triedro eguale.*

Siano $T = ABCD$, $T' = A'B'C'D'$ due tetraedri aventi i triedri $\widehat{A}$, $\widehat{A}'$ eguali. Se portiamo il secondo sul primo in modo che i due tetraedri eguali coincidano, si ha che i due tetraedri $T = ABCD$, $T'' = AB'C'D$, considerando D come vertice, hanno la stessa altezza, e i due tetraedri $AB'C'D$, $AB'C'D'$ considerando $B'$ come vertice, hanno pure la stessa altezza, e quindi (§ 348 Cor. 8°)

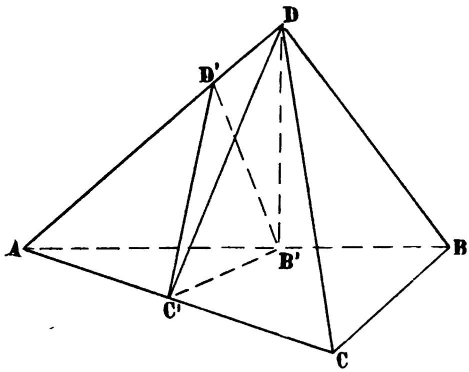


Fig. 282.

$$\frac{T}{T''} = \frac{ABC}{AB'C'}, \quad \frac{T''}{T'} = \frac{AC'D}{AC'D'}$$

ovvero (Teor. 1°)

$$\frac{T}{T''} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'}, \quad \frac{T''}{T'} = \frac{AD}{A'D'}.$$

Ne segue (§ 344 Teor.)

$$\frac{T}{T'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'}.$$

**Corollario 2°.** — *Il rapporto di due parallelepipedi aventi un triedro eguale, o in particolare di due parallelepipedi rettangoli, è eguale al prodotto dei rapporti dei tre spigoli dell'uno ai tre spigoli dell'altro concorrenti in un vertice.*

Infatti questi parallelepipedi sono sestupli di due tetraedri che si trovano nelle condizioni del teorema precedente.

**350. Teorema.** — *Se quattro segmenti* a, b, c, d *sono in proporzione, il rettangolo degli estremi è equivalente a quello dei medi; e viceversa.*

Essendo $R = \overline{a \cdot d}$ e $R' = \overline{b \cdot c}$ si ha (§ 349 Teor. 1°)

$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Ora se esiste la proporzione

$$a : b = c : d$$

il rapporto $\frac{d}{c}$ è l'inverso del rapporto $\frac{a}{b}$, e quindi

$$\frac{R}{R'} = 1,$$

ossia

$$R = R'.$$

Inversamente, se $R = R'$, si ha

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = 1$$

ossia

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**Corollari.** — *1°. Se un segmento è medio proporzionale fra due altri, il quadrato del primo segmento è equivalente al rettangolo degli altri due.*

*2°. Se un quadrato è equivalente ad un rettangolo, il lato del quadrato è medio proporzionale fra due lati consecutivi del rettangolo.*

**351.** I due teoremi del § precedente valgono a stabilire una interessante analogia, esistente fra la teoria dell'equivalenza e quella delle proporzioni, mediante la quale molti teoremi, dimostrati nell'equivalenza, possono essere trasportati a far parte della teoria delle proporzioni, dando agli enunciati una veste differente, molto spesso più semplice, ed in ogni caso più usata nei vecchi trattati di Geometria. Accenniamo a questo fatto col trascrivere alcuni degli enunciati più importanti.

**Corollari.** — *1°. Se due triangoli sono equiangoli fra loro, è costante il rapporto fra ogni lato del primo e il corrispondente lato del secondo* (§ 260 Teor. 1°).

*2°. Se due triangoli hanno un angolo eguale, e i rapporti dei due lati del primo triangolo, che comprendono quell'angolo, ai due lati del secondo, che comprendono l'angolo eguale, sono eguali, i due triangoli sono equiangoli fra loro, e il rapporto della terza coppia di lati è eguale a quello delle altre due coppie* (§ 260 Teor. 2°).

*3°. Se sono eguali i rapporti dei tre lati di un triangolo ai tre lati di un altro triangolo, i due triangoli sono equiangoli fra loro* (§ 260 Teor. 3°).

*4°. In un triangolo rettangolo*

*a) l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa;*

*b) un cateto è medio proporzionale fra la propria proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa* (§ 261 Teor.)

*5°. I segmenti, che un circolo determina sopra due secanti, a partire dal loro punto d'incontro, formano una proporzione, in modo che due segmenti di una stessa secante sono medii e gli altri due estremi* (§ 265 Teor, 1°).

*6°. Se da un punto esterno ad un circolo si tira una tangente ed una secante il segmento di tangente è medio proporzionale fra i segmenti della secante, che hanno per estremi il punto considerato ed i due punti d'incontro col circolo* (§ 265 Teor. 2°).

*7°. Il rapporto fra il diametro del circolo circoscritto ad un triangolo ed un lato del medesimo è eguale al rapporto di un altro lato del triangolo all'altezza relativa al terzo lato* (§ 266 Teor.)

*8°. Se la bisettrice di un angolo interno, od esterno, di un triangolo incontra la retta del lato opposto, il rapporto delle distanze di questo punto d'intersezione dai due vertici del triangolo, che si trovano su quella retta, è eguale a quello degli altri due lati* (§ 268 Teor.)

*9°. La parte aurea di un segmento è media proporzionale fra l'intero segmento e la sua parte minore* (§ 274).

**Definizione.** — Un segmento, diviso in sezione aurea, dicesi anche diviso *in media ed estrema ragione.*

**352. Problema** *1°. — Costruire la quarta proporzionale rispetto a tre segmenti dati.*

Se $a, b, c$ sono tre segmenti dati (fig. 283); condotte due rette che si tagliano in un punto O, si prendano sopra una di esse due segmenti

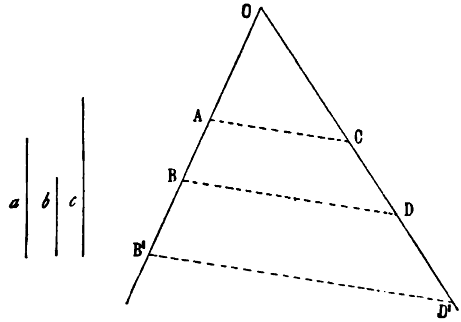



Fig. 283.

$OA \equiv a$, $BB' \equiv b$, e sull'altra un segmento $OC \equiv c$, indi si tiri la retta AC, e per i punti B, B' si conducano le BD, B'D' ad essa parallele. Il segmento DD' è il segmento richiesto.

Infatti si ha pel Teorema di Talete.

$$OA : BB' = OC : DD'.$$

**Problema 2°.** — *Costruire la terza, la quarta, la quinta.... proporzionale rispetto a due segmenti dati.*

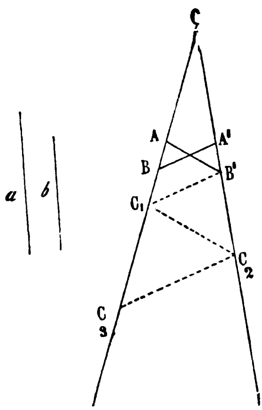



Fig. 284.

Sieno $a$, $b$ due segmenti qualunque (fig. 284). Ripetendo la stessa costruzione del problema precedente, ove si supponga $b \equiv c$, troveremo la terza proporzionale $c_1$; quindi applicando la stessa costruzione ai segmenti $a, b, c_1$ troveremo la quarta ecc.

Ecco uno dei modi più semplici per eseguire le costruzioni accennate. Sui due lati di un angolo si prenda $OA \equiv OA' \equiv a$, $OB \equiv OB' \equiv b$; indi, condotte le rette AB', A'B, si tiri per B' una parallela alla A'B; per il punto d'incontro $C_1$ di questa parallela coll'altro lato dell'angolo si conduca una parallela alla AB', e per il punto d'incontro $C_2$ di questa parallela col primo lato dell'angolo si conduca una parallela alla A'B, ecc. I segmenti $OC_1, OC_2, OC_3 \dots$ sono rispettivamente il terzo, il quarto, il quinto.... proporzionale rispetto ad $a$ e $b$.

**Problema 3°.** — *Dividere un segmento in parti proporzionali a varii segmenti dati in un certo ordine.*

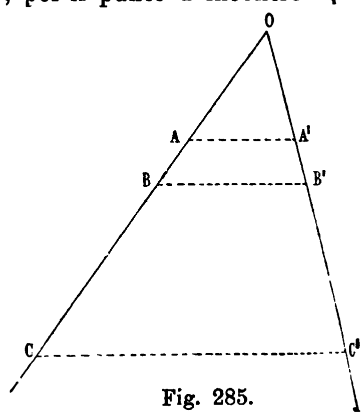



Fig. 285.

Sopra un lato di un angolo si prenda, a partire dal vertice, un segmento OC' eguale al segmento che si vuole dividere (fig. 285), e sull'altro lato,

a partire dal vertice, si prendano i segmenti adiacenti OA, AB, BC, eguali ai dati segmenti. Tracciata la CC′ e per i punti A e B condotte le parallele alla CC′, i loro punti d'incontro A′, B′ colla OC′ dividono il segmento OC′ in parti proporzionali ai segmenti OA, AB, BC.

# CAPITOLO II

## Omotetia e similitudine.

### 1. — FIGURE OMOTETICHE.

**353. Teorema.** — *Se due triangoli si corrispondono, in modo che le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli.*

Abbiansi (fig. 286, 287) i due triangoli ABC, A′B′C′, tali che le rette AA′, BB′, CC′ concorrano in un punto O e che i lati AB, AC sieno paralleli ai lati A′B′, A′C′; vogliamo dimostrare che anche i lati BC, B′C′ sono paralleli.

Se i due triangoli ABC, A′B′C′ sono situati in due piani diversi $\alpha, \alpha'$, questi son paralleli, perchè contengono due coppie di rette rispettivamente parallele, e perciò le due rette BC, B′C′ sono parallele, come intersezioni dei piani $\alpha, \alpha'$ col piano OBC.

Se poi i due triangoli ABC, A′B′C′, sono nello stesso piano, si conduca per il punto O una retta OD fuori del piano dei due triangoli. Si unisca A con un punto D di questa retta, e si conduca per A′ la parallela a questa retta; essa incontrerà la OD in un punto D′.

I due triangoli ABD, A′B′D′ si trovano nelle condizioni dell'enunciato del teorema e sono in piani diversi, perciò BD è parallela a B′D′; per la stessa ragione CD è parallela a C′D′. Ne segue che i piani BCD, B′C′D′ son paralleli, e quindi anche le rette BC, B′C′ sono parallele, come intersezioni di due piani paralleli con un terzo.

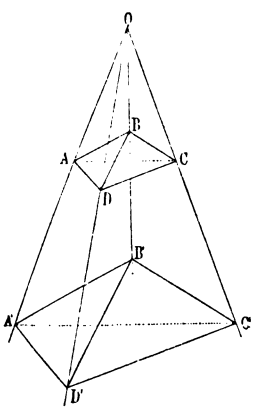



Fig. 286.

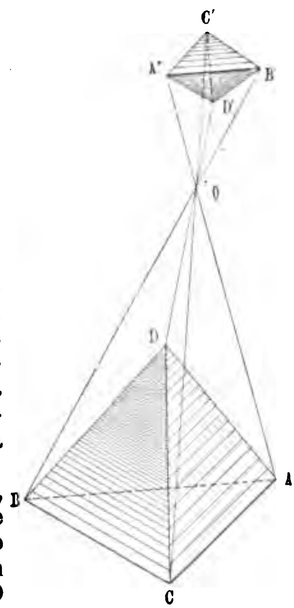



Fig. 287.

**354.** Essendo data (fig. 286, 287) una figura Σ qualunque dello spazio ed un punto O, si può costruire un'altra figura Σ', i cui punti corrispondano univocamente a quelli di Σ nel modo seguente: ad un punto arbitrario A di Σ si faccia corrispondere un punto arbitrario A' della retta OA, ad un altro punto qualunque B di Σ si faccia corrispondere il punto d'incontro B' della retta OB colla parallela ad AB condotta per il punto A'. La corrispondenza è univoca, perchè per mezzo della costruzione indicata un punto B di Σ ne individua uno ed uno solo di Σ', e viceversa un punto B' di Σ' ne individua uno di Σ, che è l'intersezione della OB' colla retta parallela ad A'B' condotta per il punto A.

Per il teorema precedente le due figure così costruite si corrispondono univocamente, in modo che due punti corrispondenti giacciono sopra una retta, che passa per O, e due o più punti di ciascuna figura situati in linea retta corrispondono ad altrettanti punti dell'altra figura situati sopra una retta parallela alla prima.

Si noti inoltre che se due punti A, A' corrispondenti sono situati sopra la retta OA dalla stessa parte del punto O, anche due altri punti corrispondenti B, B' si trovano sulla loro retta dalla medesima parte di O; se invece due punti corrispondenti A, A' si trovano sulla loro retta in parti opposte rispetto a O, anche due altri punti corrispondenti B, B' si trovano pure in parti opposte rispetto a O.

**Definizioni.** — 1ª. Due figure si dicono *omotetiche*, quando i loro elementi si corrispondono univocamente, in modo che le rette congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti passino per un punto fisso, detto *centro d'omotetia*, e a due o più punti di una figura situati sopra una retta corrispondano altrettanti punti dell'altra figura situati sopra una retta parallela alla prima. Tale corrispondenza chiamasi una *omotetia*.

2ª. Due punti corrispondenti in una omotetia si dicono anche *omologhi*.

3ª. Due figure omotetiche si dicono *direttamente* o *inversamente omotetiche*, secondo che il centro d'omotetia è esterno o interno al segmento, che ha per estremi due punti omologhi qualunque.

Data una figura Σ (fig. 288), se ne può costruire un'altra Σ', i cui elementi corrispondano univocamente a quelli di Σ colla seguente legge. Ad un punto A di Σ si faccia corrispondere un altro punto arbitrario A'; a un altro punto B di Σ si faccia corrispondere il punto d'incontro della retta, condotta per il punto A' parallela ad AB, colla retta condotta per B parallela ad AA'. La corrispondenza è evidentemente univoca.

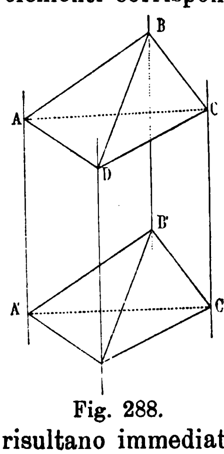


Fig. 288.

4ª. Due figure si dicono *omotetiche affini*, quando i loro elementi si corrispondono univocamente, in modo che le rette congiungenti le coppie di punti omologhi sieno parallele, e che a due o più punti situati in linea retta di una figura corrispondano altrettanti punti dell'altra figura, situati sopra una retta parallela alla prima. Tale corrispondenza si chiama *una omotetia affine*.

Ogni retta che contiene due punti corrispondenti dicesi *direttrice dell'omotetia*.

**355.** Da quanto abbiamo detto nei §§ precedenti risultano immediatamente i seguenti

**Corollari.** — *1°. Una omotetia è individuata, quando sono dati il centro e due punti omologhi. Una omotetia affine è individuata, quando sono dati due punti omologhi.*

2°. *Una omotetia è individuata, quando si conoscono due coppie di punti omologhi.*

Infatti, se A, B sono due punti rispettivamente omologhi a due punti A′, B′ si ottiene il centro d'omotetia mediante l'intersezione delle rette AA′, BB′, e quindi l'omotetia è individuata, per il Corollario precedente.

Si osservi che, se i due segmenti AB, A′B′ sono eguali, i segmenti AA′, BB′ non si incontrano, e le due figure sono omotetiche affini, essendo le rette AA′, BB′ parallele (§ 105).

3°. *Due figure omotetiche affini sono eguali.*

4°. *Se il centro d'omotetia divide per metà il segmento, che ha per estremi due punti omologhi, le due figure sono inversamente omotetiche, e simmetriche rispetto al centro.*

5°. *In due figure omotetiche, a tre o più punti di una figura situati in un piano, che non passi per il centro d'omotetia, (o non sia parallelo ad una direttrice dell'omotetia, se l'omotetia è affine), corrispondono nell'altra figura altrettanti punti situati in un altro piano parallelo al primo. A tre o più punti di un piano, che passa per il centro (o è parallelo a una direttrice, se l'omotetia è affine) corrispondono altrettanti punti dello stesso piano.*

6°. *Ogni figura omotetica ad un poligono è un altro poligono chè ha i lati e le diagonali rispettivamente paralleli ai lati e alle diagonali corrispondenti del poligono dato.*

7°. *Ogni figura omotetica ad un poliedro è un altro poliedro, che ha gli spigoli, le diagonali e le facce rispettivamente paralleli agli spigoli, alle diagonali e alle facce del poliedro dato.*

8°. *Due triangoli, che si corrispondono univocamente, in modo che i loro lati corrispondenti sieno paralleli, sono omotetici.*

Infatti se i due triangoli ABC, A′B′C′ sono tali che i lati AB, AC BC del primo sieno rispettivamente paralleli ai lati A′B′, A′C′, B′C′ del secondo, si può costruire l'omotetia individuata dalle coppie di punti A, A′; B, B′. Allora le coppie di rette AC, A′C′; BC, B′C′ sono corrispondenti in questa omotetia, e perciò C, C′ sono pure punti corrispondenti.

9°. *Se due figure si corrispondono, in modo che le rette, congiungenti un punto qualunque* C *dell'una con due punti fissi* A, B *della stessa figura sieno parallele alle rette, congiungenti il punto* C′ *corrispondente a* C *coi punti* A′, B′ *corrispondenti ad* A, B, *e che le rette* AB, A′B′ *sieno parallele, le due figure sono omotetiche.*

**356. Teorema.** — *Se due figure sono omotetiche, il rapporto di un segmento qualunque della prima al segmento corrispondente della seconda è costante, e gli angoli formati da due coppie di rette corrispondenti sono eguali.*

1°. Sieno A, A′; B, B′; C, C′; D, D′ (fig. 288 e 289) quattro coppie qualunque di punti corrispondenti di due figure omotetiche rispetto ad un centro d'omotetia O. Si deve dimostrare che esiste la proporzione

$$AB : A'B' = CD : C'D.$$

Infatti, poichè le due rette AB, A′B′ sono parallele, i due triangoli OAB, OA′B′ sono equiangoli fra loro, e perciò si ha la proporzione

$$AB : A'B' = OB : OB'.$$

Per le stesse ragioni, essendo la BC parallela a B′C′ e CD parallela a C′D′, si ha pure

$$OB : OB' = OC : OC',$$
$$OC : OC' = CD : C'D',$$

e quindi si ha pure

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

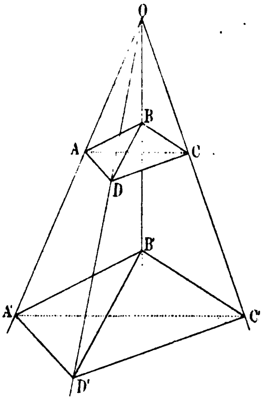


Fig. 289.

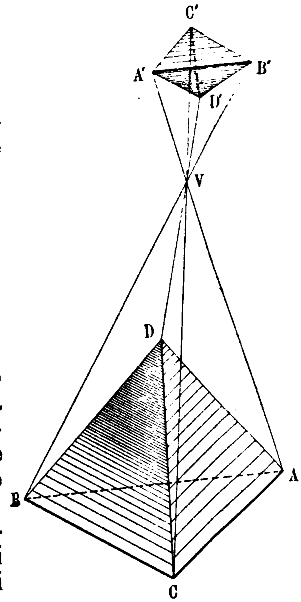


Fig. 290.

Se le due figure sono omotetiche affini, allora il rapporto di due segmenti corrispondenti è evidentemente costante ed eguale ad 1.

2°. Gli angoli formati da due coppie di semirette corrispondenti delle due figure omotetiche date, per esempio quelli formati dalle coppie AB, AC e A′B′, A′C′, sono eguali, perchè i loro lati sono diretti nello stesso senso, quando le due figure sono direttamente omotetiche, o omotetiche affini, e diretti in senso contrario, se le due figure sono inversamente omotetiche.

## 2. — FIGURE SIMILI.

**357.** Date due figure Σ, Σ′ omotetiche, se teniamo fissa l'una di esse e portiamo la seconda in un'altra posizione qualunque dello spazio, è evidente che in generale non sussisteranno più le proprietà, che definisce l'omotetia, che cioè le rette corrispondenti siano parallele e le rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti passino per uno stesso punto, o che sieno parallele. Restano però invariate le proprietà enunciate dal teorema del § precedente, cioè gli elementi delle due figure Σ, Σ′ si corrispondono univocamente, in modo che sia costante il rapporto di un segmento qualunque della prima al corrispondente della seconda, e che gli angoli formati da due semirette corrispondenti sieno eguali. Queste considerazioni mostrano l'esistenza di figure determinate dalle seguenti

**Definizioni.** — 1ª. Due figure, i cui punti si corrispondono univocamente, in modo che a più punti in linea retta della prima corrispondano altrettanti punti in linea retta della seconda, si dicono *simili*, se è costante il rapporto di ogni segmento della prima al corrispondente della seconda, e se sono eguali tutti gli angoli formati da due coppie di semirette corrispondenti, uscenti da due punti corrispondenti. Gli elementi corrispondenti di due figure simili si dicono anche *omologhi*.

2ª. Il rapporto costante fra un segmento della prima figura e il corrispondente della seconda dicesi *rapporto di similitudine*.

**358. Teorema 1°.** — *Due figure, non piane, simili si possono portare ad essere omotetiche in infiniti modi.*

Sieno $\Sigma, \Sigma'$ due figure omotetiche; A, B, C, D quattro punti dell'una, non situati in un piano rispettivamente corrispondenti a quattro punti A', B', C', D' dell'altra. Gli angoli $A\widehat{B}C$, $C\widehat{B}D$, $D\widehat{B}A$ essendo rispettivamente eguali agli angoli $A'\widehat{B'}C'$, $C'\widehat{B'}D'$, $D'\widehat{B'}A'$, il triedro $\widehat{B}.ACD$ è eguale al triedro $\widehat{B'}.A'C'D'$, oppure al suo opposto, e potremo perciò portarlo a coincidere con uno dei triedri formati dalle parallele, condotte per un punto arbitrario dello spazio, alle tre rette B'A', B'C', B'D', Se i due triedri sono eguali, le coppie di semirette BA, B'A'; BC, B'C'; BD, B'D' risulteranno dirette nello stesso senso, e se uno dei triedri suddetti è eguale all'opposto al vertice dell'altro, le coppie suddette risulteranno dirette in senso opposto.

Nel primo caso (fig. 289) i punti A, A' si trovano in una stessa parte del piano ABB'A' rispetto alla retta BB' e perciò, se il rapporto di similitudine è 1 (e quindi è $BA \equiv B'A'$), la AA' risulta parallela alla BB', e se il rapporto di similitudine è diverso ed 1, la AA' incontra la BB' in un punto O esterno al segmento BB', il quale, essendo i triangoli OBA, OB'A' equiangoli fra loro, verifica la proporzione

$$OB : OB' = BA : B'A',$$

ossia:

$$OB : OB' = K : 1,$$

ove K è il rapporto di similitudine.

Nello stesso modo si dimostra che le CC', DD' sono parallele alla BB', se il rapporto di similitudine è 1, e incontrano la BB' in un punto $O_1$, che verifica la proporzione

$$O_1B : O_1B' = K : 1,$$

e che perciò coincide con O, se il rapporto K è diverso da 1.

Ne segue che i due tetraedri ABCD. A'B'C'D' sono omotetici affini, o direttamente omotetici, rispetto al centro O.

Se ora si prendono a considerare altri due punti corrispondenti qualunque E, E', si vede facilmente che anche le semirette BE, B'E' devono essere dirette nello stesso senso, dovendo gli angoli $E\widehat{A}B$, $E\widehat{B}C$, $E\widehat{B}D$ essere rispettivamente eguali agli angoli $E'\widehat{B'}A'$, $E'\widehat{B'}C'$, $E'\widehat{B'}D'$, e perciò la EE' è anch'essa parallela alla BB', o passa per O, secondo che il rapporto di similitudine è eguale a 1, o diverso da 1.

Dunque le due figure $\Sigma, \Sigma'$ o sono omotetiche affini, o direttamente omotetiche.

Nel caso poi in cui ognuno dei due triedri $\widehat{B}.ACD$, $\widehat{B'}.A'C'D'$ è eguale all'opposto al vertice dell'altro, si dimostra in modo simile che le due figure si possono portare ad essere inversamente omotetiche. Nel caso in cui il rapporto di similitudine sia 1 le due figure divengono simmetriche rispetto a un punto.

**Corollari.** — 1°. *Tutte le omotetie, alle quali si possono fare appartenere due figure simili, non piane, sono della stessa specie, cioè o tutte dirette o tutte inverse.*

*2°. Se due figure non piane Σ, Σ′ sono simili, i triedri formati da tre semirette della prima sono tutti rispettivamente eguali ai triedri formati dalle semirette corrispondenti della seconda o sono tutti eguali agli opposti di questi.*

**Definizione.** — Due figure simili si dicono *direttamente* o *inversamente simili* secondo che il triedro formato da tre semirette dell'una è eguale al triedro formato dalle tre semirette corrispondenti della seconda, oppure è eguale al suo opposto.

**Corollario 3°.** — *Due figure, non piane, diseguali, direttamente simili si possono in infiniti modi portare ad essere direttamente omotetiche, ma non inversamente; due figure non piane inversamente simili si possono in infiniti modi portare ad essere inversamente, ma non direttamente, omotetiche.*

**Teorema 2°.** — *Due figure piane simili si possono portare in infiniti modi ad essere direttamente, od inversamente, omotetiche.*

Questo teorema si dimostra come il precedente, portando le due figure in uno stesso piano, o in piani paralleli, in modo che due segmenti corrispondenti sieno paralleli.

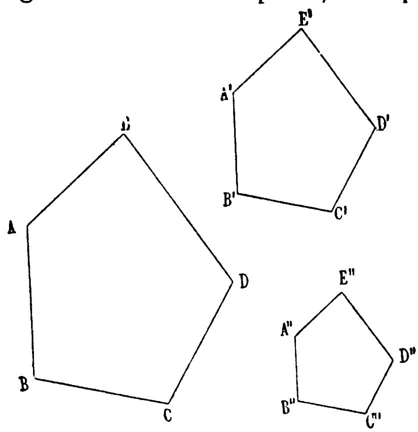


Fig. 291.

**359. Teorema.** — *Due figure simili ad una terza sono simili fra loro.*

Se Σ, Σ′ sono due figure simili ad una terza Σ″, gli angoli formati da due semirette di Σ e dalle due semirette corrispondenti di Σ′ sono eguali all'angolo formato dalle semirette corrispondenti di Σ″, e perciò sono eguali fra loro. Inoltre essendo A, B, C...., A′, B′, C′... i punti delle figure Σ, Σ′, corrispondenti a punti qualunque A″, B″, C″ di Σ″, si hanno le proporzioni

$$AB : A''B'' = AC : A''C'' = \ldots = BC : B''C'' = \ldots$$
$$A'B' : A''B'' = A'C' : A''C'' = \ldots = B'C' : B''C'' = \ldots.,$$

dalle quali si ricavano le altre

$$AB : A'B' = AC : A'C' = \ldots = BC : B'C' = \ldots.;$$

dunque Σ e Σ′ sono simili.

**Corollari.** — *1°. Data una figura qualunque Σ, si può costruire una ed una sola figura Σ′ ad essa direttamente, o inversamente simile, in modo che abbia per punti corrispondenti a tre punti arbitrari* A, B, C *di Σ, non in linea retta, i tre vertici*, A′, B′, C′ *di un triangolo* A′B′C′, *equiangolo al triangolo* ABC.

Per ottenere la figura Σ′ basterà portare il triangolo A′B′C′ ad essere direttamente, o inversamente, omotetico al triangolo ABC, e poi costruire la figura corrispondente a Σ in questa omotetia.

*2°. Due poligoni simili si possono scomporre in infiniti modi in un egual numero di triangoli simili, disposti nello stesso modo; viceversa, se due poligoni si possono scomporre in un egual numero di triangoli simili disposti nello stesso modo, essi sono simili.*

Sieno, infatti, ABCDE, A′B′C′D′E′ (fig. 292) due poligoni simili. Scomposto in un modo arbitrario uno di essi, per es. per mezzo dei segmenti che congiungono un punto O interno ad esso coi vertici, si

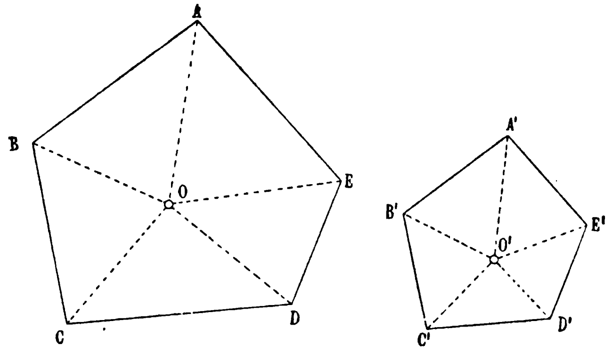



Fig. 292.

trovi nell'altro il punto O′ omologo. I triangoli O′A′B′, O′B′C′, O′C′D′, O′D′E′, O′E′A′ sono rispettivamente simili ai triangoli OAB, OBC, OCD, ODE, OEA.

Viceversa, se due poligoni ABCDE, A′B′C′D′E′ sono scomposti in triangoli simili, egualmente disposti, si rendano omotetici due triangoli OAB, O′A′B′. È facile vedere, che allora anche le altre coppie di vertici C, C′; D, D′; E, E′ sono coppie di punti omologhi in questa omotetia.

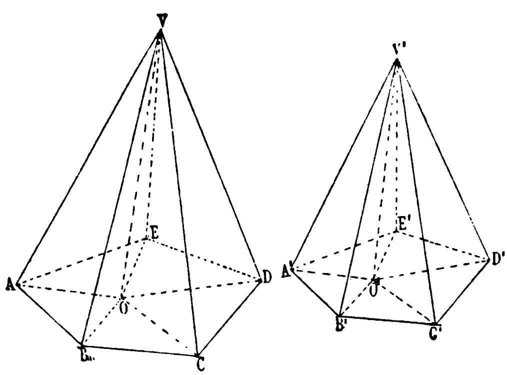



Fig. 293.

*3°. Due poliedri simili si possono in infiniti modi scomporre in un egual numero di tetraedri rispettivamente simili, e similmente disposti; viceversa, se due poliedri sono scomposti in egual numero di tetraedri simili e disposti nello stesso modo, sono simili.*

1°. Date per es. due piramidi VABCDE, V'A'B'C'D'E' (fig. 293) simili, si potrà scomporre la base dell'una nei triangoli OAB, OBC, OCD, ODE, OEA, e la base dell'altra nei triangoli O'A'B', O'B'C' O'C'D', O'D'E O'E'A' rispettivamente simili ai precedenti; allora le due piramidi si potranno scomporre nei tetraedri, che hanno per vertici V, V' rispettivamente e per basi i triangoli suddetti, e questi tetraedri saranno due a due simili fra loro.

2°. Dati poi due poliedri convessi ABCDEFHK, A'B'C'D'E'F'H'K' simili (fig. 293), si scomponga in modo arbitrario il primo di essi, per es.

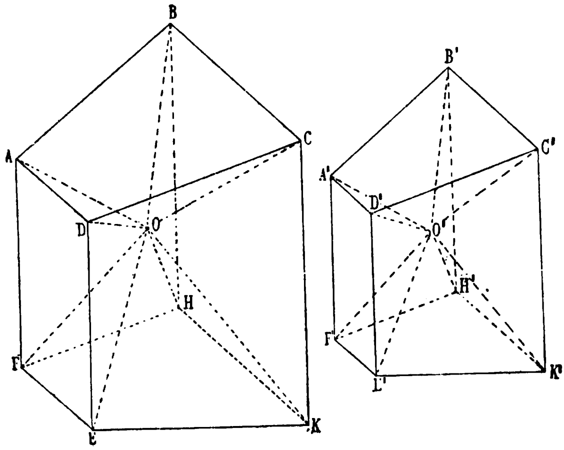



Fig. 294.

nelle piramidi, che hanno per vertice un punto O interno ad esso e per basi le varie sue facce. Se O' è il punto omologo di O nel secondo poliedro, è chiaro che questo poliedro può scomporsi nelle piramidi, che hanno per vertice O' e per basi le facce del poliedro, e queste piramidi sono rispettivamente simili alle piramidi, in cui è scomposto il primo poliedro. Scomponendo poi le coppie di piramidi simili ottenute in tetraedri simili, i due poliedri restano pure scomposti in tetraedri simili.

**360. Teorema** *1°. — Due triangoli sono simili, se i tre angoli dell'uno sono ordinatamente eguali ai tre angoli dell'altro.*

Infatti, se due triangoli sono equiangoli fra loro, i rapporti dei tre lati dell'uno ai corrispondenti lati dell'altro sono eguali (§ 351 Cor. 1°).

**Teorema** *2°. — Due triangoli sono simili, se hanno un angolo eguale, e sono eguali i rapporti dei due lati del primo triangolo, che comprendono quell'angolo, ai due lati del secondo, che comprendono l'angolo eguale.*

Infatti, i due triangoli (§ 351 Cor. 2°) sono equiangoli fra loro, e quindi (Teor. prec.) sono simili.

**Teorema** *3°. — Due triangoli sono simili, se sono eguali i rapporti dei tre lati dell'uno ai corrispondenti lati dell'altro.*

Infatti, i due triangoli (§ 351 Cor. 3°) sono equiangoli fra loro, e quindi (Teor. 1°) sono simili.

**Teorema 4°.** — *Due triangoli sono simili, se i tre lati dell'uno sono rispettivamente paralleli, oppure perpendicolari, ai tre lati dell'altro; e situati nello stesso piano.*

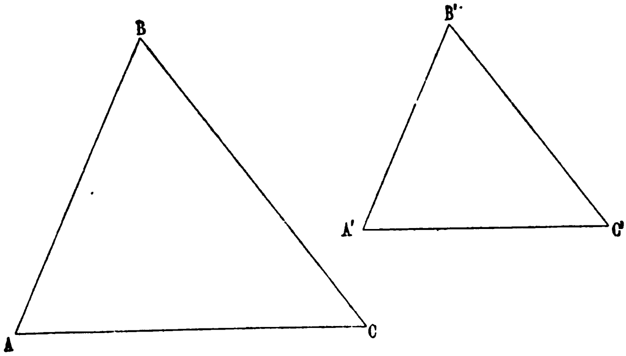



Fig. 295.

Infatti, se i lati dei triangoli ABC, A'B'C' sono ordinatamente paralleli, o perpendicolari, e situati nello stesso piano, i loro angoli devono essere eguali o supplementari (§§ 49 e 70). Quindi, indicando con P un angolo piatto, potrebbero presentarsi i seguenti casi:

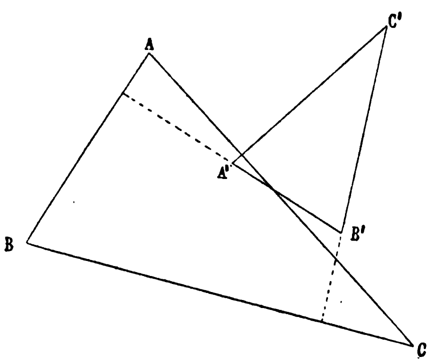



Fig. 296.

1°. I tre angoli di un triangolo sono supplementari di quelli dell'altro, cioè

$$\widehat{A}+\widehat{A'}\equiv\widehat{P},$$
$$\widehat{B}+\widehat{B'}\equiv\widehat{P},$$
$$\widehat{C}+\widehat{C'}\equiv\widehat{P}.$$

2°. Un angolo del primo triangolo è eguale al suo corrispondente, e gli altri due sono supplementari dei corrispondenti.

Per esempio

$$\widehat{A}\equiv\widehat{A'},\ \widehat{B}+\widehat{B'}\equiv\widehat{P},\ \widehat{C}+\widehat{C'}\equiv\widehat{P}.$$

3°. Due angoli di un triangolo sono eguali ai corrispondenti, e l'altro angolo è supplementare del corrispondente.

Per esempio

$$\widehat{A}\equiv\widehat{A'},\quad \widehat{B}\equiv\widehat{B'},\quad \widehat{C}+\widehat{C'}\equiv\widehat{P}.$$

4°. I tre angoli del primo triangolo sono rispettivamente eguali a quelli dell'altro, cioè

$$\widehat{A}\equiv\widehat{A'},\quad \widehat{B}\equiv\widehat{B'},\quad \widehat{C}\equiv\widehat{C'},$$

Nel primo caso sarebbe

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{A'}+\widehat{B'}+\widehat{C'}\equiv 3\widehat{P};$$

il che è assurdo, dovendo essere

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}\equiv\widehat{P}\quad,\quad \widehat{A'}+\widehat{B'}+\widehat{C'}\equiv\widehat{P}.$$

Nel secondo caso sarebbe

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{A'}+\widehat{B'}+\widehat{C'}\equiv 2P+2\widehat{A},$$

e ciò è assurdo per la ragione detta sopra.

Nel terzo caso, dovendo essere $\widehat{C}$ il supplemento della somma $\widehat{A}+\widehat{B}$, e $\widehat{C'}$ il supplemento della somma $\widehat{A'}+\widehat{B'}$, ed essendo $\widehat{A}+\widehat{B}\equiv\widehat{A'}+\widehat{B'}$ si avrebbe $\widehat{C}\equiv\widehat{C'}$. Perciò questo caso si riduce all'ultimo, il quale è evidentemente il solo possibile.

I due triangoli ABC, A'B'C', avendo dunque i loro angoli rispettivamente eguali, sono simili.

**361. Teorema 1°.** — *Due poligoni di* n *lati sono simili, se sono eguali i rapporti di* n—1 *lati del primo ai lati omologhi del secondo, e gli* n—2 *angoli del primo poligono, compresi fra quei lati, sono ordinatamente eguali ai corrispondenti del secondo.*

Sieno ABCDEF, A'B'C'D'E'F (fig. 297) due poligoni, tali che sieno verificate le condizioni AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DE:D'E'=EF::E'F', e di più $\widehat{B}\equiv\widehat{B'}$, $\widehat{C}\equiv\widehat{C'}$, $\widehat{D}\equiv\widehat{D'}$, $\widehat{E}\equiv\widehat{E'}$.

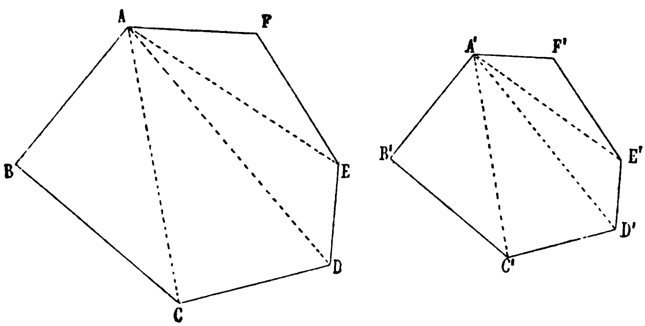



Fig. 297.

Condotte le diagonali dei due poligoni, che hanno un estremo nel vertice A e nell'omologo A', si trova, che i due triangoli ABC, A'B'C' sono simili, perchè gli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$ sono eguali, e sono eguali i rapporti dei lati che comprendono questi angoli; perciò è $B\widehat{C}A\equiv B'\widehat{C'}A'$ e AC:A'C'=BC:B'C'. Da questa proporzione e dell'altra BC:B'C'=CD:C'D' si ricava

$$AC:A'C'=CD:C'D'$$

Ne segue che i triangoli ACD, A'C'D' sono simili, perchè gli angoli $A\widehat{C}D$, $A'\widehat{C'}D'$ sono eguali come differenze di angoli eguali, e sono

eguali i rapporti dei lati, che comprendono questi angoli. Collo stesso ragionamento si dimostra che sono simili i triangoli ADE, A′D′E′, e successivamente che sono simili i triangoli AEF, A′E′F′. Adunque i due poligoni ABCDEF, A′B′C′D′E′F′, essendo scomposti in un egual numero di triangoli simili e similmente disposti, sono simili.

**Teorema** 2°. — *Due poligoni convessi di* n *lati sono simili, se* n—1 *angoli del primo sono eguali ordinatamente ai corrispondenti angoli del secondo, e se sono eguali i rapporti delle* n—2 *coppie di lati, che hanno per estremi i vertici degli angoli eguali.*

Nei poligoni ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ (fig. 297) sia $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$, $\equiv \widehat{D'}$, $\widehat{E} \equiv \widehat{E'}$;

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E'.$$

Condotte le diagonali dei due poligoni, che hanno un estremo in uno dei punti A, A′, si dimostra come nel teorema precedente, che sono simili le coppie di triangoli ABC, A′B′C′; ACD, A′C′D′; ADE A′D′E′, e perciò si ha $B\widehat{A}C \equiv B'\widehat{A'}C'$, $C\widehat{A}D \equiv C'\widehat{A'}D'$, $D\widehat{A}E \equiv D'\widehat{A'}E'$, $D\widehat{E}A \equiv D'\widehat{E'}A'$.

Essendo inoltre $F\widehat{A}B \equiv F'\widehat{A'}B'$, $F\widehat{E}D \equiv F'\widehat{E'}D'$ per ipotesi, se ne può concludere che gli angoli $F\widehat{A}E$, $F'\widehat{A'}E'$ e gli angoli $F\widehat{E}A$, $F'\widehat{E'}A'$ sono eguali, come differenze di angoli eguali, e perciò anche i due triangoli AEF, A′E′F′ sono simili.

Adunque i due dati poligoni si possono scomporre in un egual numero di triangoli simili e similmente disposti, e perciò essi sono simili.

**Teorema** 3°. — *Due poligoni di* n *lati sono simili, se sono eguali i rapporti di tutti i lati del primo ai corrispondenti lati del secondo, ed* n—3 *angoli consecutivi del primo sono ordinatamente eguali ai corrispondenti angoli del secondo.*

Nei poligoni ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ (fig. 297) si abbia

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EF : E'F' = FA : F'A',$$

ed inoltre

$$\widehat{B} \equiv \widehat{B'},\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'},\ \widehat{D} \equiv \widehat{D'}.$$

Condotte le diagonali, che hanno un estremo in uno dei punti A, A′, si dimostra come per i due teoremi precedenti, che i triangoli ABC, ACD, ADE sono ordinatamente simili ai triangoli A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′, e quindi si ha

$$AE : A'E' = EF : E'F' = FA ; F'A'.$$

Allora anche i due triangoli AEF, A′E′F′ sono simili, perchè sono eguali i rapporti dei lati del primo ai corrispondenti lati del secondo. Ne segue che i due poligoni dati, essendo scomposti in un egual numero di triangoli simili e similmente disposti, sono simili.

**362. Teorema.** — *Il rapporto dei perimetri di due poligoni simili è eguale a quello di due lati omologhi.*

Se i due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 297) sono simili si hanno le proporzioni AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'; e da queste si ricava

$$AB+BC+CD+DE+EA : A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A' = AB : A'B',$$

ossia, indicando con $p, p'$ i perimetri dei due poligoni,

$$p : p' = AB : A'B'.$$

**363. Teorema.** — *Il rapporto di due poligoni simili è eguale al quadrato del rapporto di due lati omologhi.*

Se T = ABC, T' = A'B'C' sono due triangoli simili, si ha (§ 349 Teor. 1°.).

$$\frac{T}{T'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'}$$

e siccome, indicando con $l, l'$ due lati qualunque corrispondenti dei due triangoli, si ha

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{l}{l'},$$

potremo scrivere

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^2$$

Sieno ora S, S' due poligoni simili $l, l'$ due loro lati omologhi. Sappiamo (§ 359 Cor. 2) che due poligoni simili si possono scomporre in un egual numero di triangoli $T_1$, $T_2$, $T_3$ ...; $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$ ..., due a due simili e similmente disposti. Perciò si ha:

$$\frac{T_1}{T_1'} = \frac{T_2}{T_2'} = \frac{T_3}{T_3'} = \ldots = \left(\frac{l}{l'}\right)^2.$$

Ma queste proporzioni hanno un rapporto comune; quindi si ha

$$\frac{T_1}{T_1'} = \frac{T_2}{T_2'} = \frac{T_3}{T_3'} = \ldots.;$$

e da queste proporzioni si ricava, componendo,

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots.}{T_1' + T_2' + T_3' + \ldots.} = \frac{T_1}{T_1'},$$

e infine

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^2.$$

**Corollari.** — *1°. Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.*

I quadrati costruiti sui lati omologhi $l, l'$ essendo poligoni simili si ha:

$$\frac{l^2}{l'^2} = \left(\frac{l}{l'}\right)^2.$$

Da questa proporzione e dall'altra

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^2$$

si ricava

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{l}^2}{\overline{l'}^2}.$$

2°. *Il rapporto di due poligoni simili è eguale al rapporto duplicato di due lati omologhi.*

Se $l$, $l'$ sono due lati omologhi di due poligoni simili S, S', e $l''$ la terza proporzionale dopo $l$, $l'$ si ha

$$\frac{l}{l'} = \frac{l'}{l''},$$

e quindi

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^2 = \frac{l}{l'} \cdot \frac{l'}{l''} = \frac{l}{l''}.$$

Da questa proporzione e dall'altra

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^2$$

si deduce

$$\frac{S}{S'} = \frac{l}{l''}.$$

**364. Teorema.** — *Il rapporto delle superficie di due poliedri simili è eguale al quadrato del rapporto di due spigoli omologhi, ossia al rapporto duplicato di due spigoli omologhi.*

Indichiamo con S, S' le superficie di due poliedri simili, con $F_1$, $F_2$, $F_3$.... le facce del primo con $F'_1$, $F'_2$, $F'_3$.... quelle del secondo rispettivamente simili alle prime, con $l$, $l'$ due spigoli omologhi e con $l''$ il segmento terzo proporzionale rispetto ad $l$, $l'$, il quale cioè verifica la proporzione

$$l : l' = l' : l''.$$

Per il Teorema del § precedente abbiamo le proporzioni

$$\frac{F_1}{F'_1} = \frac{F_2}{F'_2} = \frac{F_3}{F'_3} = \ldots = \left(\frac{l}{l'}\right)^2;$$

componendo, si deduce

$$\frac{F_1 + F_2 + F_3 + \ldots}{F'_1 + F'_2 + F'_3 + \ldots} = \frac{F_1}{F'_1}$$

dunque

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^2$$

od anche

$$S : S' = l : l''.$$

**Corollario.** — *Le superficie di due poliedri simili stanno fra loro come i quadrati di due spigoli omologhi.*

**365. Teorema.** — *Se quattro segmenti sono in proporzione, il rapporto di due poligoni simili, che hanno per lati corrispondenti i primi due segmenti, è eguale a quello di altri due poligoni simili, che hanno per lati corrispondenti gli altri due segmenti.*

Sieno $a$, $b$, $c$, $d$ quattro segmenti tali che si abbia

$$a : b = c : d\,,$$

A, B due poligoni simili che hanno per lati omologhi $a$, $b$, e C, D, due altri poligoni simili che hanno per lati omologhi $c$, $d$. Si avrà

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad , \quad \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)^2 ;$$

ed essendo $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{d}\right)^2$, se ne deduce

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}\,.$$

**Corollario.** — *Se quattro segmenti sono in proporzione, anche i loro quadrati sono in proporzione.*

**366. Teorema.** — *Se tre poligoni simili qualunque hanno per lati omologhi i lati di un triangolo rettangolo, quello che ha per lato l'ipotenusa è equivalente alla somma degli altri due.*

Sieno S, S′, S″ (fig. 298) tre poligoni simili, aventi per lati omologhi i tre lati del triangolo rettangolo ABC. Condotta dal vertice A dell'angolo retto la perpendicolare AD all'ipotenusa, sappiamo che il cateto AC è medio proporzionale fra l'ipotenusa BC e la sua proiezione DC sull' ipotenusa stessa (§ 351 Cor. 4°); ossia che DC è la terza proporzionale rispetto a BC e AC.

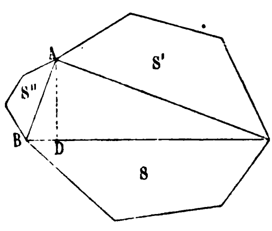



Fig. 298.

Si ha dunque (§ 363 Cor. 2°)

$$S : S' = BC : DC\,;$$

e per la stessa ragione si ha pure

$$S : S'' = BC : BD\,;$$

perciò

$$S' : S'' = DC : BD.$$

Da questa proporzione si ricava, componendo,

$$S' + S'' : S' = DC + BD : DC,$$

ovvero

$$S' + S'' : S' = BC : DC.$$

Confrontando questa proporzione colla prima, si ricava

$$S' + S'' = S.$$

Osservazione. — Il teorema di Pitagora (§ 262) è un caso speciale di questo.

**Corollario.** — *Il rapporto di due poligoni simili, aventi due lati omologhi eguali ai cateti di un triangolo rettangolo, è eguale al rapporto delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.*

**367. Teorema.** — *Le sezioni prodotte in un angoloide convesso da piani paralleli, che ne incontrino tutti gli spigoli, sono poligoni simili, che stanno fra loro come i quadrati delle distanze dei loro piani dal vertice dell'angoloide.*

Sieno ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 299) le sezioni prodotte nell'angoloide $\widehat{V}$ da due piani paralleli, e sieno VH, VH' le distanze di questi piani dal vertice V.

Le rette AB, A'B' sono parallele, come intersezioni di due piani paralleli con un terzo; e per la stessa ragione sono parallele le coppie di rette BC, B'C' : CD, C'D'; ecc. Ne segue che le coppie di angoli $A\widehat{B}C$, $A'\widehat{B'}C'$; $B\widehat{C}D$, $B'\widehat{C'}D'$; ecc., che hanno i lati diretti nello stesso senso, sono eguali.

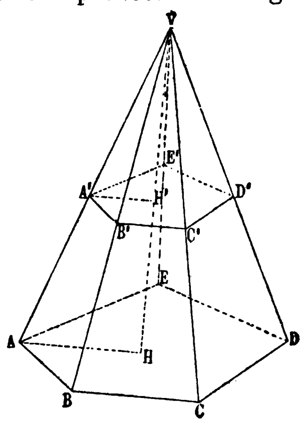


Fig. 299.

Inoltre (§ 351 Cor. 1°) si hanno le proporzioni

$$AB : A'B' = VB : VB',$$
$$BC : B'C' = VB : VB',$$

dalle quali si ricava

$$AB : A'B' = BC : B'C'.$$

Analogamente si dimostra che sono eguali i rapporti di ogni lato del poligono ABCDE al corrispondente lato del poligono A'B'C'D'E'.

Dunque i due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' sono simili. Indicando poi con S, S' le loro superficie si ha (§ 363 Cor. 1°)

$$S : S' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2.$$

Ma, essendo AB parallelo ad A'B' i due triangoli VAB, VA'B' sono simili, ed essendo pure le rette AH, A'H' parallele, anche i triangoli VAH, VA'H' sono simili; si hanno perciò le proporzioni

$$AB : A'B' = VA : VA' = VH : VH'$$

dalle quali (§ 365 Cor.) derivano le altre

$$\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{VA}^2 : \overline{VA'}^2 = \overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2.$$

Confrontando queste proporzioni con quella trovata prima, si ha

$$S : S' = \overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2.$$

**368. Teorema.** — *Il rapporto di due poliedri simili è eguale alla terza potenza del rapporto di due spigoli omologhi.*

1°. Consideriamo in primo luogo due tetraedri simili ABCD, A'B'C'D', che indicheremo brevemente con T,T'. Se i due tetraedri sono direttamente simili, hanno i triedri rispettivamente eguali, e perciò si ha (§ 349 Teor. 2°)

$$\frac{T}{T'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'}$$

ma, essendo $l$, $l'$ due spigoli omologhi qualunque, si ha

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{l}{l'},$$

e perciò

$$\frac{T}{T'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^3.$$

Se poi i due tetraedri T, T' sono inversamente simili, si costruisca il tetraedro $T_1$ simmetrico di T' rispetto ad un punto. È facile vedere che i due tetraedri T', $T_1$ sono equivalenti, avendo basi e altezze eguali, e T, $T_1$ sono direttamente simili; ne segue che il loro rapporto e quindi anche quello dei tetraedri T, T' è eguale alla terza potenza del rapporto di due spigoli omologhi.

2°. Sieno ora P, P' due poliedri simili qualunque, ed $l$, $l'$ due loro spigoli omologhi. Scomposti i due poliedri in un egual numero di tetraedri simili e disposti nello stesso modo $T_1$, $T'_1$; $T_2$, $T'_2$; $T_3$, $T'_3$; .... si hanno l'eguaglianze

$$\frac{T_1}{T'_1} = \left(\frac{l}{l'}\right)^3, \frac{T_2}{T'_2} = \left(\frac{l}{l}\right)^3, \frac{T_3}{T'_3} = \left(\frac{l}{l'}\right)^3, \ldots\ldots$$

dalle quali si ricava

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} = \frac{T_3}{T'_3} = , \ldots\ldots;$$

e quindi, componendo, si ha

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \ldots\ldots} = \frac{T_1}{T'_1},$$

ossia

$$\frac{P}{P'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^3$$

**Corollari.** — *1°. Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi di due spigoli omologhi.*

I cubi dei due spigoli $l$, $l'$ essendo poliedri simili, il loro rapporto è eguale alla terza potenza del rapporto degli spigoli stessi, perciò

$$\frac{\overline{l}^3}{\overline{l'}^3} = \left(\frac{l}{l'}\right)^3.$$

Da questa eguaglianza e dalla precedente si ricava

$$\frac{P}{P'} = \frac{\overline{l}^3}{\overline{l'}^3}.$$

2°. *Il rapporto di due poliedri simili è eguale al rapporto triplicato di due spigoli omologhi.*

Essendo $l''$, $l'''$ i segmenti terzo e quarto proporzionale dopo $l$, $l'$ (spigoli omologhi dei poliedri P, P′) si ha

$$\frac{l}{l'} = \frac{l'}{l''} = \frac{l''}{l'''},$$

e perciò

$$\left(\frac{l}{l'}\right)^3 = \frac{l}{l'} \cdot \frac{l'}{l''} \cdot \frac{l''}{l'''} = \frac{l}{l'''}.$$

Da questa eguaglianza e dall'altra

$$\frac{P}{P'} = \left(\frac{l}{l'}\right)^3$$

si deduce

$$\frac{P}{P'} = \frac{l}{l'''}.$$

**369. Teoremi.** — *Se quattro segmenti sono in proporzione, il rapporto di due poliedri simili, aventi per spigoli omologhi i primi due segmenti, è eguale a quello di altri due poliedri simili, aventi per spigoli omologhi gli altri due segmenti.*

Dimostrazione analoga a quella del § 365.

**Corollario.** — *Se quattro segmenti sono in proporzione, anche i loro cubi sono in proporzione.*

### 3. — ALCUNI PROBLEMI.

**370. Problema.** — *Costruire un poligono, che sia simile ad un poligono dato, ed abbia un lato, omologo ad un lato del dato poligono, eguale ad un segmento dato.*

Sia ABCDEF (fig. 300) il dato poligono, A′B′ il dato segmento, al quale deve essere eguale il lato del poligono, che si deve costruire, omologo al lato AB. Tracciate tutte le diagonali del poligono dato, che hanno un estremo in A, per i punti A′, B′ si conducano, dalla medesima parte della retta A′B′, due semirette A′C′, B′C′, tali che gli angoli $C'\widehat{A'}B'$, $C'\widehat{B'}A'$

sieno eguali agli angoli $\widehat{CAB}$, $\widehat{CBA}$ rispettivamente. Queste semirette s'incontrano in un punto C′, e i triangoli ABC, A′B′C′ sono simili (§ 360 Teor. 1°). Con la stessa costruzione formiamo un triangolo A′C′D′ simile ad ACD, e disposto rispetto al triangolo A′B′C′ come ACD è disposto rispetto al triangolo ABC; così successivamente costruiamo un triangolo A′E′D′ simile ad AED e disposto rispetto al triangolo A′C′D′

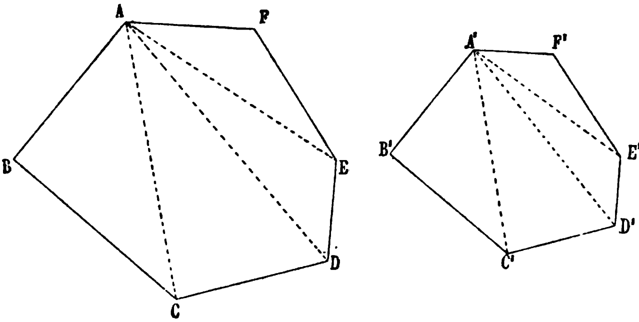



Fig. 300.

come AED è disposto rispetto al triangolo ACD, poi un triangolo A′E′F′ simile ad AEF e disposto rispetto ad A′D′E′ come ADF è disposto rispetto ad ADE.

Il poligono A′B′C′D′E′F′, che si ottiene, è composto di triangoli rispettivamente simili a quelli, nei quali è stato scomposto il dato poligono dalle sue diagonali, che hanno un estremo in A, e sono disposti nello stesso modo; perciò esso è il poligono domandato.

**371. Problema.** — *Costruire un poligono simile ad uno dato, in modo che il rapporto fra il dato poligono e quello che si vuol costruire sia eguale al rapporto di due dati segmenti.*

Sia S il dato poligono, *m*, *n* i dati segmenti, e sia S′ il poligono che si vuol costruire, simile ad S, in modo che sia verificata la proporzione

$$S : S' = m : n.$$

Si descriva un semicircolo, che abbia per diametro la somma BD+DC dei dati segmenti *m*, *n* (fig. 301). Dal punto D si elevi la perpendicolare a BC, che incontra in un punto A il suddetto semicircolo; indi, condotte le rette AB, AC, si prenda sulla retta AB, a partire da A e dalla medesima parte del segmento AB, un segmento AB′ eguale ad un lato del poligono S, e per il punto B′ si conduca una retta parallela a BC, che incontra le AC, AD in due punti C′, D′.

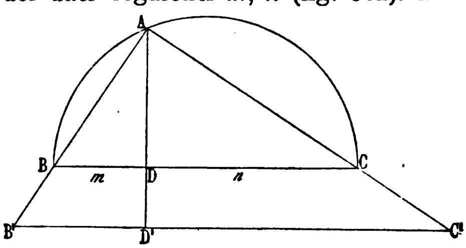



Fig. 301.

Se ora costruiamo un poligono S′ simile ad S, e che abbia il lato omologo ad AB′ eguale ad AC′, esso è il poligono richiesto.

Infatti il triangolo B′AC′ essendo rettangolo in A, e AD′ essendo perpendicolare all'ipotenusa B′C′, si ha (§ 366 Cor.)

$$S : S' = B'D' : D'C'.$$

Siccome poi le rette BC, B′C′ sono parallele, si ha pure (§ 348 Cor. 11°)

$$B'D' : D'C' = BD : DC;$$

e perciò

$$S : S' = BD : DC,$$

ossia

$$S : S' = m : n.$$

**372. Problema.** — *Costruire un poligono, che sia simile ad un dato poligono* S, *ed equivalente ad un altro poligono* P.

Costruiamo due quadrati rispettivamente equivalenti ai due poligoni dati S, P, e sieno $l, l'$ i loro lati. Se $m$ è un lato del poligono S, si costruisca un segmento $m'$ quarto proporzionale rispetto a $l, l', m$ (§ 352 Prob. 1°), tale cioè che sia verificata la proporzione

(1) $$l : l' = m : m';$$

e infine si costruisca un poligono S′ simile ad S, che abbia il lato omologo ad $m$ eguale ad $m'$. Questo è il poligono domandato.

Infatti si ha

$$S : P = \overline{l}^2 : \overline{l'}^2$$

$$S : S' = \overline{m}^2 : \overline{m'}^2.$$

Ma dalla proporzione (1) si ricava l'altra (§ 365 Cor.)

$$\overline{l}^2 : \overline{l'}^2 = \overline{m}^2 : \overline{m'}^2;$$

e perciò si ha la proporzione

$$S : P = S : S',$$

d'onde deriva

$$P = S'.$$

# CAPITOLO III

## Misure.

### 1. — UNITÀ DI MISURE.

**373.** Nel § 342 abbiamo definito il *rapporto* di due grandezze omogenee A e B, ed abbiamo osservato che questo rapporto di A e B può anche chiamarsi *la misura di* A *rispetto a* B.

Questo secondo modo di dire si adopra, in generale, solamente quando la seconda grandezza è una grandezza speciale, alla quale per con-

venzione si riferiscono tutte le altre grandezze della stessa specie, e che si chiama *unità di misura*. In tal caso il rapporto della grandezza A alla grandezza B si suol chiamare semplicemente la *misura di* A (si sottintende rispetto alla *unità di misura* B).

È da osservarsi che, siccome i rapporti di due grandezze equivalenti ad una terza sono eguali, e viceversa, se i rapporti di due grandezze ad una terza sono eguali, le due grandezze sono equivalenti, si ha il teorema:

*Le misure di due grandezze equivalenti sono eguali, e viceversa.*

Segue da questa considerazione, che ogni teorema relativo all'equivalenza di due figure porta come corollario una eguaglianza algebrica fra le loro misure; e viceversa.

**374.** Le unità di misura delle grandezze geometriche più comunemente adottate sono le seguenti.

1°. I segmenti si misurano rispetto a un segmento chiamato *metro.* Il metro è diviso in dieci parti eguali, chiamate *decimetri;* il decimetro è diviso in dieci parti eguali, chiamate *centimetri;* ecc.

2°. Gli angoli si misurano prendendo per unità di misura l'*angolo retto,* che è diviso in 90 parti eguali, chiamate *gradi,* ciascuna delle quali è divisa in 60 parti eguali, chiamate *minuti,* ciascuno dei quali è suddiviso in 60 parti eguali, chiamate *secondi.*

3°. Analogamente gli archi si misurano prendendo per unità di misura il *quadrante,* che è la quarta parte di un circolo: il quadrante è diviso in 90 parti eguali, chiamate *gradi,* ciascuna delle quali è divisa in 60 parti eguali, chiamate *minuti,* e così via.

Siccome in uno stesso circolo, o in circoli eguali, gli archi sono direttamente proporzionali agli angoli al centro, che li comprendono, di maniera che la misura di un dato arco, quando si prenda per unità il secondo, è eguale alla misura dell'angolo al centro, che comprende l'arco medesimo, quando si prenda per unità l'angolo al centro, che comprende il secondo, così possiamo dire che:

*Un arco ha la stessa misura dell'angolo al centro, che lo comprende.*

4°. I diedri si misurano prendendo per unità il diedro retto, il quale, al pari dell'angolo retto, è diviso in parti, che si chiamano *gradi, minuti* e *secondi.*

Ne segue che, siccome i diedri sono direttamente proporzionali ai loro rettilinei, si può enunciare la seguente proprietà:

*Un diedro ha la stessa misura del suo rettilineo.*

5°. Le superficie si misurano prendendo per unità di misura il quadrato, che ha per lato l'unità lineare (metro), e che si chiama *metro quadrato.* Un metro quadrato equivale a 100 *decimetri quadrati,* un decimetro quadrato a 100 *centimetri quadrati,* ecc.

6°. I solidi si misurano prendendo per unità il cubo, che ha per lato l'unità lineare (metro), e che si chiama *metro cubo.* Il metro cubo equivale a 1000 *decimetri cubi,* il decimetro cubo a 1000 *centimetri cubi,* ecc.

**Definizione.** — Diconsi rispettivamente *lunghezza di una linea, area di una superficie e volume di un solido,* le misure della linea, della superficie e del solido.

## 2. — LUNGHEZZA DEL CIRCOLO.

**375.** 1°. Abbiamo dimostrato (§ 348 Cor. 5°), che due circoli sono direttamente proporzionali ai loro raggi; quindi, indicando con C, C′ le lunghezze di due circoli, con R ed R′ quelle dei loro raggi, si ha

$$C : R = C' : R',$$

e, moltiplicando per 2 i conseguenti,

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Di qui si vede, che il rapporto della lunghezza di un circolo al diametro è costante, qualunque sia il circolo che si considera. Calcolato dunque questo rapporto per un circolo, esso varrà per qualunque altro. Questo rapporto è un numero irrazionale, e si suole indicare con la lettera $\pi$. Un suo valore approssimato espresso in frazione decimale è dato da

$$\pi = 3.1415926535\ldots.$$

Fra breve vedremo in qual modo si possano trovare valori approssimati di $\pi$. Avendosi

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

ne segue che

$$C = 2\pi R,$$

vale a dire: *La lunghezza di un circolo è eguale al prodotto di $\pi$ e della lunghezza del diametro.*

2°. Se indichiamo con $a$ la lunghezza di un arco di circolo e con $\alpha$ la sua misura in gradi, potendosi considerare il circolo come un arco, che ha per misura 360 gradi, si ha

$$a : 2\pi R = \alpha : 360,$$

e quindi

$$a = \frac{\alpha\pi R}{180}.$$

## 3. — AREE DELLE SUPERFICIE.

**376. Teorema.** — *La misura di un rettangolo è eguale al prodotto delle misure dei suoi lati.*

Se $m$ è l'unità lineare e per conseguenza il quadrato Q che ha per lato $m$ è l'unità di superficie, ed R è un rettangolo che ha per lati $a, b$, si ha (§ 349 Cor. 1°)

$$\frac{R}{Q} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m}$$

ossia la misura di R rispetto a Q è eguale al prodotto delle misure di $a$ e $b$ rispetto ad $m$.

**Corollari.** — *1°. L'area di un rettangolo è eguale al prodotto delle lunghezze della sua base e della sua altezza.*

*2°. L'area di un quadrato è eguale alla seconda potenza della lunghezza del suo lato.*

Questa è appunto la ragione, per la quale in Algebra la seconda potenza di un numero si chiama il suo quadrato.

*3°. L'area di un parallelogrammo è eguale al prodotto delle lunghezze di un suo lato e dell'altezza corrispondente* (§ 250 Cor. 2°)

*4°. L'area di un triangolo è eguale al prodotto delle lunghezze di una base e della metà dell'altezza corrispondente* (§ 251 Teor.)

*5°. L'area di un poligono convesso circoscritto ad un circolo è eguale al prodotto delle lunghezze del suo perimetro e della metà del suo apotema* (§ 251 Cor. 3°).

*6°. L'area di un trapezio è eguale al prodotto delle lunghezze della sua altezza e della semisomma delle sue basi, oppure è eguale al prodotto delle lunghezze della sua altezza e della sezione media* (§ 252).

*7°. L'area di un cerchio è eguale al prodotto delle lunghezze del suo circolo e della metà del raggio* (§ 314 Cor. 2°), *od anche è eguale al prodotto del numero* $\pi$ *per la seconda potenza del raggio.*

Indicando dunque con S l'area di un cerchio di raggio R, si ha

$$S = 2\pi R . \frac{1}{2} R = \pi R^2.$$

*8°. Il rapporto di due cerchi è eguale al rapporto dei quadrati dei loro raggi.*

Infatti, se S, S', sono le aree di due cerchi di raggi R, R', si ha

$$S = \pi R^2, \quad S' = \pi R'^2,$$

e quindi

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

*9°. L'area di un settore circolare è eguale al prodotto delle lunghezze dell'arco corrispondente e della metà del raggio* (§ 314 Cor. 1°).

Indicando con A l'area del settore circolare appartenente al cerchio di raggio R, e con $a$ ed $\alpha$ le misure dell'arco corrispondente rispetto al metro e al grado, si ha

$$A = a . \frac{R}{2},$$

e, sostituendo ad $a$ il suo valore espresso in funzione di $\alpha$, avremo

$$A = \frac{\alpha \pi R^2}{360}.$$

*10°. Il rapporto di due settori circolari, compresi in angoli al centro eguali, è eguale al rapporto dei quadrati dei raggi.*

*11°. L'area della superficie laterale di un prisma è eguale al prodotto delle lunghezze di uno spigolo laterale e del perimetro di una sezione normale* (§ 275 Teor. 1°).

12°. *L'area della superficie laterale di un settore piramidale, o di una piramide regolare, è eguale al prodotto delle lunghezze del perimetro della sua base e della metà del suo apotema* (§ 276 Teor. 1°).

13°. *L'area della superficie laterale di un settore tronco-piramidale, o di un tronco di piramide regolare, a basi parallele, è eguale al prodotto delle lunghezze dell'apotema e della semisomma dei perimetri delle basi, oppure al prodotto delle lunghezze dell'apotema e del perimetro della sezione media* (§ 276 Teor. 2°).

14°. *L'area della superficie laterale di un settore cilindrico, o di un cilindro, rotondo è eguale al prodotto delle lunghezze di un arco, o di un circolo, base e dell'altezza* (§ 320 Cor. 2°).

Se R è la lunghezza del raggio della base, $h$ quella dell'altezza del cilindro, ed S, S′ sono le aree della superficie laterale e totale, si ha

$$S = 2\pi R h, \qquad S' = 2\pi R(R + h).$$

15°. *L'area della superficie laterale di un settore conico, o di un cono, rotondo è eguale al prodotto delle lunghezze dell'arco, o del circolo, base e della metà dell'apotema* (§ 325 Cor. 2°).

Se R è la lunghezza del raggio della base, $a$ quella dell'apotema del cono ed S, S′ sono le aree della superficie laterale e totale, si ha

$$S = \pi R a, \qquad S' = \pi R(R + a).$$

16°. *L'area della superficie laterale di un settore tronco-conico, o di un tronco di cono, a basi parallele, è eguale al prodotto delle lunghezze dell'apotema e della semisomma degli archi, o delle circonferenze basi, oppure è eguale al prodotto delle lunghezze dell'apotema e dell'arco, o circolo, della sezione media* (§ 327 Cor. 2° e 3°).

Indicando con R, R′, $a$ le lunghezze dei raggi delle basi e dell'apotema di un tronco di cono, e con S, S′ le aree della superficie laterale e totale, si ha

$$S = \pi a(R + R'), \qquad S' = \pi a(R + R') + \pi(R^2 + R'^2)$$

17°. *L'area di una zona, o calotta, sferica è eguale al prodotto delle lunghezze di un suo circolo massimo e dell'altezza* (§ 333 Cor. 2°).

Indicando con R il raggio della sfera, con $h$ l'altezza della zona, e con S la superficie di questa, si ha

$$S = 2\pi R h.$$

18°. *L'area di una superficie sferica è eguale al prodotto delle lunghezze di un suo circolo massimo e di un diametro* (§ 333 Cor. 1°).

Si ha cioè

$$S = 4\pi R^2.$$

19°. *L'area di un angolo sferico (o fuso) è eguale al prodotto delle lunghezze dell'arco equatoriale e del diametro* (§ 333 Cor. 3°).

Indicando con F l'area del fuso dato, con R ed $a$ le lunghezze del raggio e dell'arco equatoriale, si ha

$$F = 2R \cdot a.$$

Sostituendo ad $a$ il suo valore espresso per mezzo della sua misura $\alpha$ in gradi, si ha anche

$$F = \frac{\pi R^2 \alpha}{90}.$$

*20°. Indicando con* T *l'area di un triangolo sferico* ABC, *con* a, b, c *le lunghezze degli archi equatoriali dei suoi angoli sferici, e con* $\alpha, \beta, \gamma$ *le loro misure in gradi, si ha*

$$T = R(a + b + c - \pi R)$$

$$T = \frac{\pi R^2}{180}(\alpha + \beta + \gamma - 180).$$

Infatti la prima formola è data dal Cor. 4° del § 333, e la seconda si ricava sostituendo ad $a, b, c$ i loro valori espressi per mezzo della corrispondente misura in gradi.

## 4. — VOLUMI DEI SOLIDI.

**377. Teorema.** — *La misura di un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto delle misure dei tre spigoli concorrenti in un vertice.*

Se $m$ è l'unità lineare, e per conseguenza il cubo C, che ha per lato $m$, è l'unità di volume, ed R è un parallelepipedo rettangolo che ha per lati $a, b, c$, si ha (§ 349 Cor. 2°).

$$\frac{R}{C} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{c}{m},$$

ossia la misura di R rispetto a C è il prodotto delle misure di $a, b, c$ rispetto ad $m$.

**Corollari.** — *1°. Il volume di un cubo è eguale alla terza potenza della lunghezza del suo lato.*

Questa è appunto la ragione, per la quale la terza potenza di un numero si chiama il suo cubo.

*2°. Il volume di un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto dell'area di una sua base e dell'altezza corrispondente.*

Infatti il prodotto delle lunghezze di due spigoli è eguale all'area della faccia, in cui essi giacciono, e che si può riguardare come base del parallelepipedo, mentre l'altro spigolo ne è l'altezza.

*3°. Il volume di un prisma è eguale al prodotto dell'area di una sua base e della sua altezza* (§ 289 Cor. 3°).

4°. *Il volume di una piramide è eguale al prodotto dell'area della base e di un terzo della sua altezza* (§ 307 Cor. 1°).

5°. *Il volume di un tronco di prisma triangolare è eguale al prodotto dell'area di una sua base e della media aritmetica delle lunghezze delle distanze dei vertici dell'altra base dal piano della prima base.*

Indicando con $b, h_1, h_2, h_3$ le misure della base e delle distanze suddette, con P quella del tronco di prisma, sappiamo (§ 308 Teor.) che il tronco di prisma è equivalente alla somma di tre piramidi, i volumi delle quali sono rispettivamente $\frac{1}{3} b \cdot h_1, \frac{1}{3} b \cdot h_2, \frac{1}{3} b \cdot h_3$; perciò si ha

$$P = b . \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}.$$

6°. *Il volume di un tronco di piramide a basi parallele è eguale al prodotto della lunghezza di un terzo della sua altezza e della somma delle aree delle sue basi e della loro media geometrica.*

Data una piramide qualunque VABCDE (fig. 302), la cui superficie laterale è tagliata da un piano parallelo a quello della base secondo un

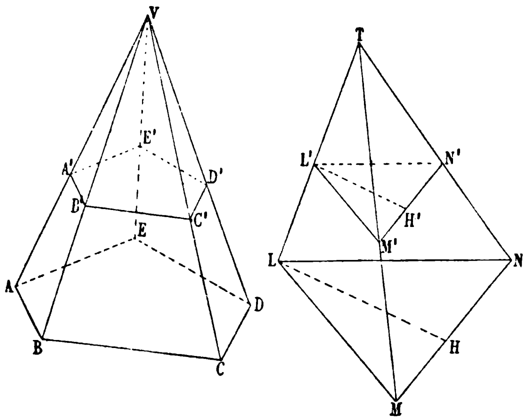



Fig. 302.

poligono A'B'C'D'E', si costruisca una piramide triangolare TLMN, che abbia la sua base LMN equivalente alla base ABCDE della data piramide, e che ne abbia la stessa altezza.

Ciò fatto, se si conduce un piano parallelo alla base di questa piramide, che ne tagli la superficie laterale, e che abbia dalla base una distanza eguale a quella dei piani ABC, A'B'C', sappiamo che anche i poligoni A'B'C'D'E,', L'M'N' sono equivalenti (§ 278 Teor.) Ne segue che le due piramidi VABCDE, TLMN, come pure le altre due VA'B'C'D', TL'M'N' sono equivalenti (§ 306 Teor.), e perciò sono pure equivalenti i due tronchi di piramide ABCDEA'B'C'D'E', LMNL'M'N'. Ma quest'ultima è equivalente (§ 309 Teor.) alla somma di tre piramidi, che hanno per altezza l'altezza del tronco stesso, e per basi, una il triangolo LMN, un'altra il triangolo L'M'N', e la terza un triangolo che ha per base MN e per altezza l'altezza L'H' del triangolo L'M'N'.

Indicando con $b, b'$ le aree dei poligoni ABCDE, A'B'C'D'E', e quindi anche dei triangoli LMN, L'M'N', e con $h$ la misura dell'altezza dei due tronchi, i volumi delle due prime piramidi suddette sono rispettivamente $\frac{1}{3} b \,.\, h$, $\frac{1}{3} b' \,.\, h$. Indicando poi con $x$ l'area della base della terza piramide, si ha

$$b : x = \mathrm{LH} : \mathrm{L'H'}$$
$$x : b' = \mathrm{MN} : \mathrm{M'N'};$$

e, siccome LH : L'H' = NM : M'N', dalle proporzioni precedenti si ricava

$$b : x = x : b',$$

donde risulta

$$x = \sqrt{b \,.\, b'};$$

dunque il volume della terza piramide è $\frac{1}{3} h \,.\, \sqrt{b \,.\, b'}$.

Ne segue che, indicando con T il volume del dato tronco di piramide, si ha

$$\mathrm{T} = \frac{1}{3} h \left(b + b' + \sqrt{b \,.\, b'}\right).$$

7°. *Il volume di un settore cilindrico, o di un cilindro, è eguale al prodotto dell'area del settore circolare, o del cerchio, base e dell'altezza* (§ 319 Cor. 1° e 2°).

Indicando con V il volume di un cilindro con R e $h$ le lunghezze del raggio della base e dell'altezza, si ha dunque

$$\mathrm{V} = \pi \mathrm{R}^2 h.$$

8°. *Il volume di un settore conico, o di un cono, è eguale al prodotto dell'area del settore circolare, o del cerchio, base e di un terzo dell'altezza* (§ 324 Cor. 1° e 3°).

Se indichiamo con V il volume di un cono, con R e $h$ le lunghezze del raggio della base e dell'altezza, si ha

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \pi \mathrm{R}^2 h.$$

9°. *Il volume di un settore tronco-conico, o di un tronco di cono, a basi parallele è eguale al prodotto della lunghezza di un terzo della sua altezza e della somma delle aree delle sue basi e della loro media geometrica* (§ 328 Cor. 1° e 2°).

Indicando con V il volume del tronco e con R, R', $h$ le lunghezze dei raggi delle due basi e dell'altezza, si ha

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \pi h \left(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R'}^2 + \mathrm{R} \,.\, \mathrm{R'}\right).$$

10°. *Il volume di un settore sferico è eguale ad un terzo del prodotto della lunghezza del raggio e dell'area della zona o calotta, che lo limita* (§ 335 Cor. 5°).

Essendo V il volume di un settore sferico, appartenente ad una sfera di raggio R, e $h$ l'altezza della zona o calotta corrispondente si ha

$$V = 2\pi Rh \,.\, \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

*11°. Il volume d'una sfera è eguale a un terzo del prodotto della lunghezza del raggio e dell'area della sua superficie* (§ 335 Cor. 5°).

Se indichiamo con V il volume di una sfera di raggio R, si ha

$$V = 4\pi R^2 \,.\, \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Indicando con D la lunghezza del diametro della sfera, si ha D = 2R, e perciò $D^3 = 8R^3$; se ne ricava

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

*12°. Il volume di uno spicchio sferico è eguale a un terzo del prodotto della lunghezza del raggio e dell'area del fuso corrispondente* (§ 335 Cor. 5°).

Essendo U il volume di uno spicchio sferico, F l'area del fuso ad esso corrispondente, R la lunghezza del raggio, $a$ ed $\alpha$ la lunghezza e la misura in gradi dell'arco equatoriale, corrispondente al fuso, si ha

$$U = \frac{1}{3} R \,.\, F.$$

Sostituendo ad F il valore corrispondente, si trova anche

$$U = \frac{2}{3} R^2 a = \frac{\pi R^3 \alpha}{270}.$$

*13°. Il volume di una piramide sferica è eguale ad $\frac{1}{3}$ del prodotto della lunghezza del raggio e dell'area del poligono sferico base* (§ 335 Cor. 6°).

Indicando con P il volume della piramide, con S la superficie del poligono base, si ha

$$P = \frac{1}{3} R \,.\, S.$$

Se la piramide è triangolare, se ne deduce, sostituendo a T i valori già trovati (§ 376 Cor. 20°),

$$P = \frac{R^2}{2}(a + b + c - \pi R)$$

$$P = \frac{\pi R^3}{540}\left\{\alpha + \beta + \gamma - 180\right\}.$$

*14°. Il volume di un segmento sferico ad una base di altezza* h *appartenente ad una sfera di raggio* R *è equivalente a quello di un cono di raggio* h *ed altezza* 3R — h.

Se DA è un arco appartenente ad una semicirconferenza di diametro DE e G è la proiezione di A su questo diametro, è chiaro che la figura DAG, rotando di un intero giro attorno a DE, genera un segmento sferico.

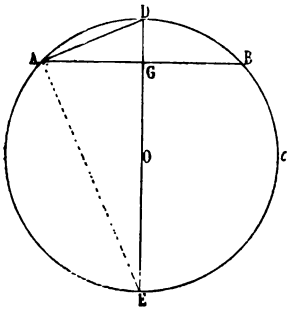


Fig. 303.

Essendo $h = DG$, possono darsi tre casi:

$$h < R \quad , \quad h = R \quad , \quad 2R > h > R.$$

Se è $h < R$, essendo O il centro del semicerchio si ha

$$V = \text{Vol}\,(DAG) = \text{Vol}\,(ODA) - \text{Vol}\,(OGA)$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi\,\overline{AG}^2 . (R - h)$$

Essendo il triangolo DAE rettangolo in A, si ha

$$\overline{AG}^2 = \overline{DG . GE} = h(2R - h),$$

e quindi

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h\,(2R - h)\,(R - h).$$

Se poi è $2R > h > R$, si ha in simil guisa (supposto che sia AE l'arco che rota)

$$V = \text{Vol}\,(OAE) + \text{Vol}\,(OAG)$$
$$= \frac{2}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi h\,(2R - h)\,(h - R).$$

In ambedue i casi si ha dunque, facendo le riduzioni,

(1) $$V = \frac{1}{3}\pi h^2\,(3R - h).$$

Se infine $h = R$, il segmento si riduce ad una semisfera, la cui misura è $\frac{2}{3}\pi R^3$; e questa espressione è identica al secondo membro della (1) ove si ponga in essa $h = R$.

*15°. Un segmento sferico ad una base è equivalente alla somma di un cilindro che ha la stessa base del segmento e l'altezza eguale alla metà dell'altezza del medesimo, e di una sfera che ha per diametro l'altezza del segmento.*

La formula (1) può scriversi nel modo seguente

$$V = \frac{1}{6}\pi h^2 \left\{ 6R - 3h + h \right\}$$
$$= \frac{1}{2}\pi h . h . (2R - h) + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

Posto $AG = b$, si ha, come abbiamo già visto, $b^2 = h\,(2R - h)$ e quindi

$$V = \frac{1}{2}\pi b^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

*16°. Un segmento sferico a due basi è equivalente alla somma delle metà dei cilindri, che hanno la stessa altezza del segmento e le basi rispettivamente eguali alle basi del medesimo, aumentata della sfera che ha per diametro l'altezza del segmento.*

Chiamando $a, b$ i raggi delle due basi del segmento, $h$ la sua altezza, è chiaro che il segmento sferico può riguardarsi come la differenza di due segmenti sferici, le cui basi sono $a, b$ rispettivamente e le cui altezze $h_1, h_2$ verificano la condizione $h = h_1 - h_2$.

Indicando con V il suo volume, si ha dunque

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h_1^2(3R - h_1) - \frac{1}{3}\pi h_2^2(3R - h_2) \\ &= \frac{1}{3}\pi\left\{3R(h_1^2 - h_2^2) - (h_1^3 - h_2^3)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\pi(h_1 - h_2)\left\{3R(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\pi h\left[3h_1(2R - h_1) + 3h_2(2R - h_2) + h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2\right], \end{aligned}$$

ovvero, essendo $a^2 = h_1 . (2R - h_1)$, $b^2 = h_2 . (2R - h_2)$,

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left\{3a^2 + 3b^2 + h^2\right\}$$

$$V = \frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{2}\pi b^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

# CAPITOLO IV

## Applicazioni dell'Algebra alla Geometria.

### 1. — RELAZIONI ALGEBRICHE FRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO, DI UN QUADRANGOLO INSCRITTO IN UN CIRCOLO E DI UN TETRAEDRO.

**378. Problema.** — *Date le lunghezze dei lati di un triangolo, trovare le misure*

*1° delle altezze;*
*2° della superficie;*
*3° delle mediane;*
*4° delle bisettrici;*
*5° del raggio del circolo circoscritto;*
*6° dei raggi dei circoli inscritti ed exinscritti.*

Indichiamo con $a, b, c$ le lunghezze dei lati del dato triangolo, rispettivamente opposti ai vertici A, B, C, con $h_a$, $h_b$, $h_c$ le misure delle

altezze, con $m_a$, $m_b$, $m_c$ le misure delle mediane, con $\delta_a$, $\delta_b$, $\delta_c$ le misure delle bisettrici, che passano rispettivamente pei vertici A, B, C, ed indichiamo con R la lunghezza del raggio del circolo circoscritto, con $r$ quella del raggio del circolo inscritto con $r_a$, $r_b$, $r_c$ le lunghezze dei raggi dei circoli ex-iscritti, che si trovano interni agli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ del triangolo rispettivamente.

1°. Dei due angoli $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ del triangolo dato (fig. 303) uno almeno dev'essere acuto; e perciò, supposto che l'angolo $\widehat{C}$ sia acuto, e condotta l'altezza AD, si ha la relazione (§ 263 Teor. 2°).

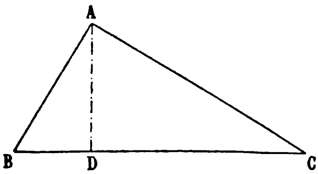


Fig. 304.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,.\,CD,$$

dalla quale si ricava

$$CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Ma dal triangolo ACD si ha pure

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2,$$

e quindi, sostituendo a CD il valore trovato, si ottiene

$$h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2},$$

ovvero

$$h_a^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2},$$

ed anche

$$h_a^2 = \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Ora, siccome la differenza dei quadrati di due numeri è eguale al prodotto della loro somma per la loro differenza, si ha ancora

$$h_a^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\,.\,(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2},$$

donde si ricava

$$h_a^2 = \frac{\{(a + b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a - b)^2\}}{4a^2},$$

ovvero, per la ragione detta sopra,

$$h_a^2 = \frac{(a + b + c)\,(a + b - c)\,(c + a - b)\,(c - a + b)}{4a^2}.$$

Ciò fatto, se indichiamo con $2p$ il perimetro del triangolo, cioè se poniamo

$$a + b + c = 2p,$$

si ha pure

(1) $$\begin{aligned} -a + b + c &= 2(p - a)\\ a - b + c &= 2(p - b)\\ a + b - c &= 2(p - c), \end{aligned}$$

e la formola precedente diviene

(2) $$h_a^2 = \frac{4}{a^2} p(p-a)(p-b)(p-c),$$

dalla quale si ricava (*)

(3) $$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Analogamente si trova

(4) $$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

(5) $$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2°. L'area T del triangolo è data dalla formola

$$T = a \cdot \frac{h_a}{2}.$$

Sostituendo ad $h_a$ il valore dato dalla formola (3), si trova

(6) $$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

che è la formola, la quale esprime l'area di un triangolo in funzione dei lati.

3°. Per il teorema del § 264, si ha la relazione

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ovvero

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Da questa eguaglianza si ricava

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2);$$

e quindi

(7) $$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Analogamente si trova

(8) $$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2},$$

(9) $$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

4°. Essendo AD (fig. 231) la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ del triangolo ABC, si ha (§ 267 Teor.)

$$\overline{AB}\,.\,\overline{AC} = \overline{AD}^2 + \overline{CD}\,.\,\overline{DB},$$

(*) In questo, e in varii altri esempi che seguono, si eseguisce l'estrazione della radice quadrata dei due membri di una eguaglianza, omettendo il doppio segno al secondo membro, perchè, dovendosi determinare soltanto i valori assoluti di certe lunghezze, le quantità negative non avrebbero significato.

e quindi, ponendo BD $= x$, DC $= y$, si ha

α) $$bc = \delta_a^2 + xy.$$

Si ha inoltre

$$x + y = a,$$

e per il Teorema del § 268

$$c \cdot y = b \cdot x;$$

da quest'ultima eguaglianza si ricava

$$y = \frac{b}{c} x,$$

e sostituendo ad $y$ questo suo valore nella eguaglianza precedente, si ha

$$\frac{b}{c} x + x = a;$$

ossia

$$x(b + c) = ac,$$

ed anche

$$x = \frac{ac}{b + c}.$$

Perciò si trova

$$y = \frac{ab}{b + c},$$

e quindi

$$xy = \frac{a^2 bc}{(b + c)^2}.$$

Allora dalla relazione α) si ricava

$$bc = \delta_a^2 + \frac{a^2 bc}{(b + c)^2};$$

e da questa si ottiene

$$\delta_a^2 = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b + c)^2}\right),$$

e riducendo

$$\delta_a^2 = \frac{bc}{(b + c)^2} \left\{ (b + c)^2 - a^2 \right\},$$

ossia

$$\delta_a^2 = \frac{bc(b + c + a)(b + c - a)}{(b + c)^2},$$

e a causa delle formole (1)

$$\delta_a^2 = \frac{4\, b \cdot c \cdot p\,(p - a)}{(b + c)^2};$$

dunque

(10) $$\delta_a = \frac{2}{b + c} \sqrt{b \cdot c \cdot p\,(p - a)}.$$

Analogamente si trova

(11) $$\delta_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{c \,.\, a \,.\, p(p-b)},$$

(12) $$\delta_c = \frac{2}{a+c}\sqrt{a \,.\, b \,.\, p(p-c)}.$$

5°. Dal teorema del § 266 si ricava

$$b \,.\, c = 2R \,.\, h_a \,.$$

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per $a$, si trova

$$a \,.\, b \,.\, c = 2R \,.\, a \,.\, h_a \,,$$

dalla quale, essendo $a \,.\, h_a = 2T$, si ricava pure

$$a \,.\, b \,.\, c = 4RT\,;$$

e quindi

(13) $$R = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4T}$$

ovvero

(14) $$R = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

6°. Essendo O il centro del circolo inscritto al triangolo ABC (fig. 305), si ha

$$OBC = \frac{a \,.\, r}{2},$$

$$OCA = \frac{b \,.\, r}{2},$$

$$OAB = \frac{c \,.\, r}{2}.$$

Siccome poi $OBC + OCA + OAB = T$, e $\frac{a+b+c}{2} = p$, sommando le eguaglianze precedenti, si ha

$$T = p \,.\, r\,,$$

e quindi

$$r = \frac{T}{p}\,,$$

ovvero

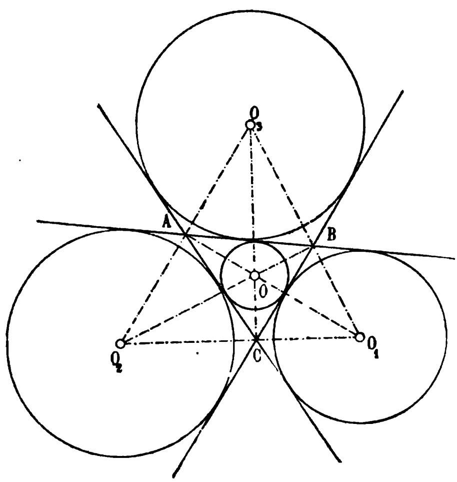


Fig. 305.

(15) $$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Essendo $O_1$ il centro del circolo ex-iscritto al triangolo, interno all'angolo $\widehat{A}$, si ha

$$O_1CA = \frac{b \, . \, r_a}{2},$$

$$O_1AB = \frac{c \, . \, r_a}{2}.$$

$$O_1BC = \frac{a \, . \, r_a}{2}.$$

Siccome $O_1CA + O_1AB - O_1BC = T$, e $\frac{b+c-a}{2} = p - a$, dalle eguaglianze precedenti si ricava

$$T = (p-a)\, r_a,$$

e quindi

$$r_a = \frac{T}{p-a},$$

ovvero

(16) $$r_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Analogamente si trova

(17) $$r_b = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}.$$

(18) $$r_c = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

**Corollario.** — *L'area di un triangolo è eguale alla radice quadrata del prodotto delle lunghezze dei raggi dei circoli inscritti ed ex-iscritti ad esso.*

Infatti, moltiplicando fra loro membro a membro le equazioni (15), (16), (17), (18), si ha, a causa della (6),

$$r \, . \, r_a \, . \, r_b \, . \, r_c = T^2,$$

e quindi

(19) $$T = \sqrt{r \, . \, r_a \, . \, r_b \, . \, r_c}\,.$$

**379. Problema.** — *Date le lunghezze dei lati di un quadrangolo inscritto in un circolo, trovare le misure*

*1° delle diagonali;*
*2° della superficie del quadrangolo;*
*3° del raggio del circolo circoscritto.*

1°. Indicando con $a, b, c, d$ le lunghezze dei lati AB, BC, CD, DA di un quadrangolo ABCD (fig. 306), inscritto in un circolo di raggio R, con $g$, $g'$ le lunghezze delle diagonali AC, BD e con S l'area del quadrangolo, dal teorema di Tolomeo (§ 270) si ricava

(20) $$gg' = ac + bd.$$

Considerando poi i due triangoli ABC, ADC, nei quali il quadrangolo dato resta diviso dalla diagonale AC, si ha per la formola (13) del § precedente

(21) $$\begin{cases} ABC = \dfrac{abg}{4R} \\ ADC = \dfrac{cdg}{4R}; \end{cases}$$

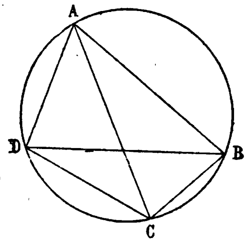


Fig. 306.

addizionando membro a membro queste eguaglianze, si ottiene

(22) $$S = \frac{(ab + cd)\,g}{4R}.$$

Analogamente dai triangoli ABD, BCD, nei quali il quadrangolo dato resta diviso dalla diagonale BD, si ricava

(23) $$S = \frac{(ad + bc)\,g'}{4R},$$

e quindi, paragonando queste due ultime eguaglianze, si trova

(24) $$\frac{g}{g'} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Se ora si moltiplicano, e poi si dividono l'una per l'altra le eguaglianze (20) e (24), si ottengono le eguaglianze

$$g^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}, \quad g'^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc},$$

dalle quali si ricavano le altre

(25) $$g = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, \quad g' = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Queste formole fanno conoscere le lunghezze delle diagonali del quadrangolo in funzione dei lati.

2°. Dalla prima delle formole (21) e dalla (22) si ricava

$$S = \frac{ab + cd}{ab}.ABC,$$

ed esprimendo l'area del triangolo ABC in funzione dei lati, mediante la formola (6) del § precedente, si ha

$$S = \frac{1}{4}\frac{ab + cd}{ab}\sqrt{(a+b+g)(a+b-g)(a-b+g)(-a+b+g)},$$

ossia

$$S = \frac{1}{4}\frac{ab + cd}{ab}\sqrt{[(a+b)^2 - g^2][g^2 - (a-b)^2]}.$$

Sostituendo a $g$ il valore dato dalla (25), dopo qualche riduzione si trova

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - (c-d)^2][c+d)^2 - (a-b)^2]};$$

e di qui, si ricava

$$(26)\quad S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Se ora poniamo per brevità

$$a+b+c+d=2p,$$

risulta

$$\begin{aligned}-a+b+c+d&=2(p-a)\\ a-b+c+d&=2(p-b)\\ a+b-c+d&=2(p-c)\\ a+b+c-d&=2(p-d),\end{aligned}$$

e la formola precedente diventa

$$(27)\quad S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

la quale esprime l'area di un quadrangolo inscritto in funzione dei suoi lati.

3°. Dalla formola (22) si ricava

$$R=\frac{(ab+cd)g}{4S},$$

e, sostituendo a $g$ e ad S i loro valori dati dalle eguaglianze (25) e (27) si ha

$$(28)\quad R=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}},$$

la quale formola dà la lunghezza del raggio del circolo circoscritto al quadrangolo dato in funzione dei lati del medesimo.

**Corollario.** — *Se un quadrangolo è inscritto in un circolo, e circoscritto ad un altro, indicando con* a, b, c, d *le misure dei suoi lati, con* S *ed* r *quelle della sua superficie e del raggio del circolo inscritto, si ha*

$$(29)\quad S=\sqrt{abcd},$$

$$(30)\quad r=\frac{\sqrt{abcd}}{a+b}$$

Se il quadrangolo dato ABCD è inscritto in un circolo e circoscritto ad un altro, essendo in questo caso la somma di due lati opposti eguale alla somma degli altri due, la formola (26) si riduce alla (29) come si vede facilmente ponendo $a+c=b+d$.

Se poi indichiamo con $r$ il raggio del circolo inscritto, è facile vedere che si ha

$$S=\frac{1}{2}(ar+br+cr+dr);$$

e di qui si ricava

$$r=\frac{2S}{a+b+c+d},$$

ossia

$$r = \frac{\sqrt{abcd}}{a+b}.$$

Questa è la formola che dà il raggio del circolo inscritto in funzione dei lati del quadrangolo.

**380. Problema.** — *Date le lunghezze degli spigoli di un tetraedro, calcolare il volume del tetraedro e le lunghezze dei raggi delle sfere inscritte ed ex-inscritte ad esso.*

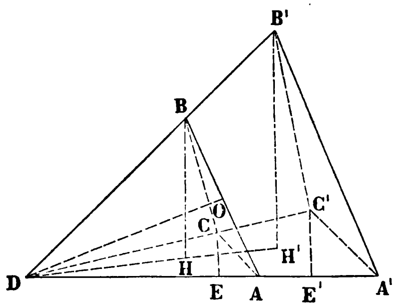



Fig. 307.

1°. Sia (fig. 307) DABC un tetraedro, il quale abbia gli spigoli DA, DB, DC eguali. Indicando con $l$ la lunghezza degli spigoli eguali, con $a_1, b_1, c_1$ le lunghezze degli spigoli BC, CA, AB rispettivamente, con V il volume del tetraedro, con DO l'altezza del tetraedro, corrispondente alla faccia ABC, e con R la lunghezza del raggio del circolo circoscritto ad essa, è facile vedere che il punto O è il centro del circolo circoscritto al triangolo ABC, e quindi si ha

$$R = \frac{a_1 b_1 c_1}{4 . ABC},$$

$$ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a_1+b_1-c_1)(a_1+c_1-b_1)(b_1+c_1-a_1)}.$$

Ma per il teorema di Pitagora si ha

$$DO = \sqrt{l^2 - R^2}.$$

e sostituendo in questa eguaglianza ad R il valore precedente, si ricava

$$DO = \frac{\sqrt{16 . l^2 . (ABC)^2 - a_1^2 b_1^2 c_1^2}}{4 . ABC}.$$

Ora sappiamo che

$$V = \frac{1}{3} . ABC . DO;$$

onde si ha, sostituendo ad ABC e DO i valori trovati,

$$(31)\ V = \frac{1}{12}\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(-a_1+b_1+c_1)(a_1-b_1+c_1)(a_1+b_1-c_1)l^2 - a_1^2 b_1^2 c_1^2};$$

questa formola esprime il volume del tetraedro in funzione dei lati.

2°. Supponiamo ora che DABC sia un tetraedro avente gli spigoli DA, DB, DC disuguali, e indichiamo con $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a$, $b$, $c$ le lunghezze degli spigoli BC, CA, AB, DA, DB, DC rispettivamente.

Prendiamo sulle semirette DA, DB, DC, a partire dal vertice, tre segmenti eguali DA', DB', DC', la cui lunghezza è rappresentata

da $l$, e indichiamo con $a'_1$, $b'_1$, $c'_1$ le lunghezze degli spigoli B′C′, A′C′, A′B′ del tetraetro risultante D′A′B′C′ e con V′ il suo volume. È noto (§ 349 Teor. 2°) che

$$\text{(32)} \qquad \frac{V}{V'} = \frac{abc}{l^3}, \text{ onde } V = \frac{abc}{l^3} V'.$$

Ora, se CE, C′E′ sono le perpendicolari condotte da C, C′ alla AC′, dai triangoli ACD, A′C′D si ricava (§ 263)

$$b_1'^2 = a^2 + c^2 \pm 2a \,.\, DE$$
$$b_1'^2 = 2l^2 \pm 2l \,.\, DE',$$

inoltre si ha

$$DE : DE' = c : l.$$

Eliminando DE e D′E′ da queste tre ultime eguaglianze, si trova

$$b_1'^2 = \frac{b_1^2 - (a-c)^2}{ac} l^2.$$

Analogamente si deduce

$$a_1'^2 = \frac{a_1^2 - (b-c)^2}{bc}$$
$$c_1'^2 = \frac{c_1^2 - (a-b)^2}{ab}.$$

Il volume V′ del tetraedro DA′B′C′ è dato dalla formola

$$V' = \frac{1}{12} \sqrt{(a_1' + b_1' + c_1')(a_1' + b_1 - c_1)(a_1' + c_1' - b_1')(b_1' + c_1 - a_1) l^2 - a_1'^2 b_1'^2 c_1'^2};$$

e, mettendo in luogo di $a'_1$, $b'_1$, $c'_1$ i valori trovati sopra nella formola (29), si ricava

$$\text{(33)} \qquad V = \frac{1}{12} \sqrt{P}$$

dove

$$P = a^2 a_1^2 (b^2 + c^2 - a^2 + b_1^2 + c_1^2 - a_1^2) + b^2 b_1^2 (a^2 + c^2 - b^2 + a_1^2 + c_1^2 - b_1^2) +$$
$$+ c^2 c_1^2 (a^2 + b^2 - c^2 + a_1^2 + b_1^2 - c_1^2) - a^2 b_1^2 c_1^2 - b^2 c_1^2 a_1^2 - c^2 a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2 c_1^2,$$

3°. Indichiamo con $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$ le aree delle facce del tetraedro, con $r$, $r_1$, $r_2$, $r_3$, $r_4$ i raggi della sfera inscritta e delle sfere ex-iscritte, comprese rispettivamente nei triedri $\widehat{D}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, e con $r_5$, $r_6$, $r_7$ i raggi delle rimanenti sfere ex-iscritte. È chiaro che

$$V = \frac{r}{3}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4),$$

d'onde si ricava

$$\text{(34)} \qquad r = \frac{3V}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}.$$

Analogamente si dimostra che

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{3V}{s_2 + s_3 + s_4 - s_1}, \\
r_2 &= \frac{3V}{s_1 + s_3 + s_4 - s_2}, \\
r_3 &= \frac{3V}{s_1 + s_2 + s_4 - s_3}, \\
r_4 &= \frac{3V}{s_1 + s_2 + s_3 - s_4}, \\
r_5 &= \pm \frac{3V}{s_1 + s_4 - s_2 - s_3}, \\
r_6 &= \pm \frac{3V}{s_1 + s_3 - s_2 - s_4}, \\
r_7 &= \pm \frac{3V}{s_1 + s_2 - s_3 - s_4}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Nelle ultime tre formole si deve prendere il segno + o —, in modo che i secondi membri risultino positivi. Dalle tre formole stesse risulta che, se il tetraedro è tale che sieno verificate una, o due, o tutte e tre le equivalenze $s_1 + s_2 = s_3 + s_4$, $s_1 + s_3 = s_2 + s_4$, $s_1 + s_4 = s_2 + s_3$, i raggi di uno, o due, o tre sfere inscritte, divengono infiniti, e perciò non esistono le sfere stesse.

Siccome poi i denominatori delle frazioni, che danno i raggi delle altre sfere tangenti ai quattro piani del tetraedro, non possono mai essere nulli, ne viene che, come già vedemmo nel § 197 Teor. 3°, esistono non meno di cinque sfere tangenti ai quattro piani del tetraedro dato.

**Corollari.** — *1°. Se due coppie di spigoli opposti sono rispettivamente perpendicolari, anche gli altri due spigoli sono perpendicolari, ed il volume del tetraedro è dato dalla formola*

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{4b_1^2c_1^2a^2 - (a^2 + a_1^2)(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)^2}. \tag{36}$$

È facile vedere che, se due spigoli di un tetraedro sono rispettivamente perpendicolari agli opposti, anche gli altri due spigoli opposti sono perpendicolari, e che la somma dei quadrati di una coppia di detti spigoli è equivalente alla somma dei quadrati di ciascun'altra coppia; quindi, ponendo nella formola (33)

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2,$$

dopo qualche riduzione si trova la formola scritta sopra.

*2°. Se ogni spigolo di un tetraedro è eguale all'opposto, indicando con* a, b, c *le lunghezze dei tre spigoli concorrenti in un vertice, il volume del tetraedro è dato dalla formola*

$$V - \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}. \tag{37}$$

3°. *Indicando con* l *la lunghezza di uno spigolo di un tetraedro regolare, il volume* V *di questo è dato dalla formola*

(38) $$V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3.$$

## 2. — MISURE DEI LATI, DEGLI APOTEMI E DELLE SUPERFICIE DI ALCUNI POLIGONI REGOLARI INSCRITTI O CIRCOSCRITTI AD UN CIRCOLO IN FUNZIONE DEL RAGGIO.

**381.** Nel Cap. II del Libro 3° abbiamo imparato ad inscrivere e circoscrivere ad un circolo tutti i poligoni regolari, tali che il numero $n$ dei loro lati sia di una delle forme $2^p$ $(p > 1)$, $3 \times 2^p$, $5 \times 2^p$, $15 \times 2^p$. dove $p$ è un numero intero qualunque. È chiaro dunque che, dato un circolo, restano completamente determinati i lati, gli apotemi, i perimetri e le superficie dei suddetti poligoni. Ci proponiamo ora di trovare le misure di tali lati, apotemi, perimetri e superficie, espresse in funzione del raggio.

Indicheremo sempre con $l_n$, $\alpha_n$, $p_n$, $s_n$ le misure di un lato, dell'apotema, del perimetro, della superficie di un poligono regolare di $n$ lati inscritto in un circolo di raggio R; con $L_n$, $P_n$, $S_n$ le misure di un lato del perimetro, della superficie di un poligono regolare di $n$ lati circoscritto allo stesso circolo.

**Problema.** — *Date le misure* R, $l_n$ *del raggio di un circolo e del lato di un poligono regolare di* n *lati, inscritto in esso, trovare le misure* $\alpha_n$, $p_n$, $s_n$ *dell'apotema, del perimetro e della superficie del medesimo, e le misure* $L_n$, $P_n$, $S_n$ *del lato, del perimetro e della superficie del poligono regolare di* n *lati, circoscritto allo stesso circolo.*

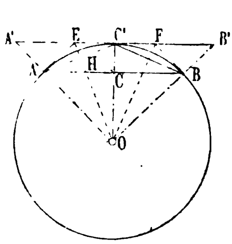


Fig. 308.

Se l'arco AB (fig. 308) è l'$n^{esima}$ parte del circolo di raggio OA, la corda AB è il lato del poligono regolare inscritto di $n$ lati, il segmento A'B' della tangente nel punto medio C' dell'arco AB, compreso nell'angolo al centro $\widehat{AOB}$, che si appoggia sull'arco $\widehat{AB}$, è il lato del poligono regolare circoscritto di $n$ lati. Il raggio OC' divide per metà l'angolo $\widehat{AOB}$, (§ 178 Teor.), ed è perpendicolare alla corda AB nel suo punto di mezzo C; inoltre le rette AB, A'B', ambedue perpendicolari al raggio OC', sono parallele.

Dal triangolo rettangolo ACO si ricava (§ 262 Teor.)

$$\overline{OA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CO}^2,$$

e quindi

$$R^2 = \frac{l_n^2}{4} + \alpha_n^2.$$

Da questa eguaglianza si ricava

(1) $$\alpha_n = \sqrt{R^2 - \frac{l_n^2}{4}},$$

ovvero

(2) $$\alpha_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}.$$

Siccome è noto che deve essere

(3) $$p_n = n \, . \, l_n \, ,$$

(4) $$s_n = \frac{p_n \, . \, \alpha_n}{2} \, ,$$

per mezzo della eguaglianza (2) si ricava anche

(5) $$s_n = \frac{n \, . \, l_n \sqrt{4R^2 - l_n^2}}{4} \, .$$

Dalle coppie di triangoli simili OA′B′, OAB; OA′C′, OAC si ricava

$$A'B' : AB = OA' : OA = OC' : OC;$$

perciò

$$L_n : l_n = R : a_n$$

Da questa proporzione si ottiene

(6) $$L_n = \frac{l_n \, .R}{\alpha_n} \, ,$$

e, sostituendo ad $\alpha_n$ il valore dato dalla eguaglianza (2), si ha

(7) $$L_n = \frac{2 \, l_n \, . \, R}{\sqrt{4R^2 - l_n^2}} \, .$$

Essendo poi

(8) $$P_n = n \, L_n \, ,$$

(9) $$S_n = \frac{P_n \, . \, R}{2} \, ,$$

si ha pure

(10) $$S_n = \frac{n \, . \, l_n \, R^2}{\sqrt{4R^2 - l_n^2}} \, .$$

**382. Problema.** — *Date le misure* R, $l_n$ *del raggio di un circolo e del lato di un poligono regolare di* n *lati inscritto in esso, calcolare la misura* $l_{2n}$ *del lato del poligono regolare di* 2n *lati inscritto nello stesso circolo.*

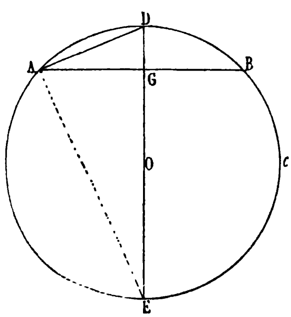


Fig. 309.

Sia l'arco AB (fig. 309) la $n^{esima}$ parte del circolo $c$ e D il suo punto di mezzo. Le corde AB, AD sono i lati dei poligoni regolari inscritti nel circolo $c$, l'uno di $n$ e l'altro di $2n$ lati, e sappiamo che il diametro DE incontra la corda AB nel suo punto di mezzo G, ed è perpendicolare ad essa, di guisa che OG è l'apotema del poligono regolare di $n$ lati inscritto al circolo $c$. Condotta la corda AE, si ottiene un triangolo ADE, nel quale l' angolo $\widehat{DAE}$ è retto, ed AG è l'altezza corrispondente all'ipotenusa DE, perciò si ha (§ 261 Teor.)

$$\overline{AD}^2 = \overline{DE \, . \, DG}.$$

Ne segue, essendo $DG \equiv DO - GO$,

$$l_{2n}^2 = 2R(R - \alpha_n),$$

e quindi

(11) $$l_{2n} = \sqrt{2R(R - \alpha_n)},$$

od anche, sostituendo ad $\alpha_n$ il suo valore dato dall' eguaglianza (2),

(12) $$l_{2n} = \sqrt{2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}\right)}.$$

**383. Problema.** — *Date le misure* $R, l_{2n}$ *del raggio di un circolo e del lato di un poligono regolare di* 2n *lati inscritto in esso, calcolare la misura* $l_n$ *del lato del poligono regolare di* n *lati, inscritto nello stesso circolo.*

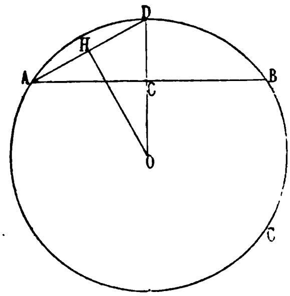


Fig. 310.

Essendo l'arco $\widehat{AB}$ (fig. 310) l' $n^{esima}$ parte del circolo $c$, e D il suo punto di mezzo, AB, AD sono rispettivamente i lati dei poligoni regolari, l'uno di $n$ e l'altro di $2n$ lati, inscritti nel circolo $c$, e il raggio OD incontra la corda AB nel suo punto di mezzo C, ed è perpendicolare ad essa.

Condotta la OH perpendicolare ad AD, è facile vedere che i due triangoli HDO, CDA sono equiangoli fra loro, perchè l'angolo $\widehat{HDO}$ è comune ad entrambi, e gli angoli $\widehat{DHO}, \widehat{DCA}$ sono retti; perciò

$$\overline{OH}\,.\,\overline{AD} = \overline{OD}\,.\,\overline{AC}.$$

Ne segue

$$\alpha_{2n}\,.\,l_{2n} = R\,.\,\frac{l_n}{2},$$

e quindi

(13) $$l_n = \frac{2\,l_{2n}\,.\,\alpha_{2n}}{R},$$

ovvero, a causa della eguaglianza (2),

(14) $$l_n = \frac{l_{2n}\sqrt{4R^2 - l_{2n}^2}}{R}.$$

**384. Problema.** — *Determinare le misure dei lati, degli apotemi, dei perimetri e delle superficie dei poligoni regolari di quattro, sei e dieci lati inscritti, o circoscritti, ad un circolo di raggio* R.

Nel § 203 abbiamo veduto come si costruisca un quadrato inscritto in un dato circolo. Da questa costruzione apparisce che i raggi, i quali terminano agli estremi di un lato del quadrato inscritto, sono perpendicolari. È chiaro perciò, che si ha

$$l_4^2 = 2R^2,$$

e quindi

(15) $$l_4 = R\sqrt{2}.$$

Inoltre abbiamo veduto (§ 204 Cor. 1°) che il lato dell'esagono regolare, inscritto in un circolo, è eguale al raggio di questo. Si ha dunque

(16) $$l_6 = R.$$

Infine, siccome sappiamo (§ 274 Cor.) che il lato del decagono regolare inscritto in un circolo è eguale alla parte aurea del raggio, si deve avere

$$R : l_{10} = l_{10} : (R - l_{10}),$$

ovvero

$$l_{10}^2 = R(R - l_{10}),$$

donde si ricava

$$l_{10}^2 + R . l_{10} - R^2 = 0;$$

questa equazione, risoluta rispetto a $l_{10}$, dà

$$l_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2}$$

La soluzione corrispondente al segno positivo del radicale è la sola che soddisfa al problema, perchè la soluzione corrispondente al segno — ha un valore assoluto maggiore di R; dunque si ha

(17) $$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Trovate così le misure dei lati dei poligoni regolari inscritti di 4, 6 e 10 lati, si calcolano facilmente per mezzo delle formole (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) del § 381 anche le misure degli apotemi, dei perimetri, delle superficie dei medesimi, e quelle dei lati, dei perimetri e delle superficie dei poligoni regolari circoscritti di egual numero di lati.

Si ottengono così i resultati seguenti:

| QUADRATO INSCRITTO | ESAGONO REGOLARE INSCRITTO | DECAGONO REGOLARE INSCRITTO |
|---|---|---|
| $l_4 = R\sqrt{2}$ | $l_6 = R$ | $l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ |
| $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ | $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ | $a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ |
| $p_4 = 4R\sqrt{2}$ | $p_6 = 6R$ | $p_{10} = 5R(\sqrt{5} - 1)$ |
| $s_4 = 2R^2$ | $s_6 = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$ | $s_{10} = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ |

| QUADRATO CIRCOSCRITTO | ESAGONO REGOLARE CIRCOSCRITTO | DECAGONO REGOLARE CIRCOSCRITTO |
|---|---|---|
| $L_4 = 2R$ | $L_6 = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$ | $L_{10} = \frac{2}{5}R\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$ |
| $P_4 = 8R$ | $P_6 = 4R\sqrt{3}$ | $P_{10} = 4R\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$ |
| $S_4 = 4R^2$ | $S_6 = 2R^2\sqrt{3}$ | $S_{10} = 2R^2\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$ |

**385. Problema.** — *Calcolare le misure dei lati, degli apotemi, dei perimetri e delle superficie dei triangoli e dei pentagoni regolari inscritti, o circoscritti, ad un circolo di raggio* R.

Conoscendo le misure dei lati e degli apotemi dei poligoni regolari di 6 e di 10 lati inscritti in un circolo, la formola (13) del § 383 ci permette di calcolare colla massima facilità anche quelle dei lati dei poligoni regolari di 3 e 5 lati inscritti nello stesso circolo. Si ha infatti

$$l_3 = \frac{2l_6 \cdot \alpha_6}{R} \quad , \quad l_5 = \frac{2l_{10} \cdot \alpha_{10}}{R},$$

facendo le opportune sostituzioni e le riduzioni, si trova

$$l_3 = R\sqrt{3} \quad , \quad l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Trovate così le misure dei lati del triangolo regolare e del pentagono regolare inscritti in un circolo di raggio R, per mezzo delle formole del § 381, si possono calcolare le misure di tutti gli altri elementi dei poligoni regolari di 3 e 5 lati inscritti, o circoscritti, al medesimo circolo. Si trovano così i resultati indicati nel seguente quadro:

| TRIANGOLO REGOLARE INSCRITTO | PENTAGONO REGOLARE INSCRITTO |
|---|---|
| $l_3 = R\sqrt{3}$ | $l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ |
| $\alpha_3 = \frac{R}{2}$ | $\alpha_5 = \frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{R}{4}(1+\sqrt{5})$ |
| $p_3 = 3R\sqrt{3}$ | $p_5 = \frac{5}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ |
| $s_3 = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$ | $s_5 = \frac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ |
| **TRIANGOLO REGOLARE CIRCOSCRITTO** | **PENTAGONO REGOLARE CIRCOSCRITTO** |
| $L_3 = 2R\sqrt{3}$ | $L_5 = 2R\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ |
| $P_3 = 6R\sqrt{3}$ | $P_5 = 10R\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ |
| $S_3 = 3R^2\sqrt{3}$ | $S_5 = 5R^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ |

**386. Problema.** — *Calcolare la misura del lato del pentadecagono regolare, inscritto in un circolo di raggio* R.

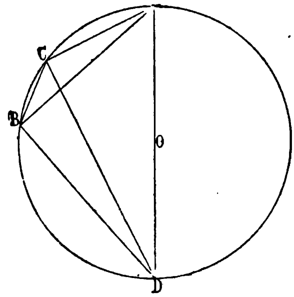



Fig. 311.

Sappiamo (§ 206 Prob.) che, se AB, AC sono i lati dell'esagono e del decagono regolare inscritti in un circolo (fig. 311), BC è il lato del pentadecagono regolare inscritto nello stesso circolo. Se ora tracciamo il diametro AD e le corde BD, CD, siccome l'arco AB è un terzo di mezza circonferenza, l'arco BD ne è i due terzi, e quindi la corda BD è il lato del triangolo equilatero inscritto nel dato circolo.

Dal triangolo ACD, rettangolo in C, si ricava

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2;$$

e quindi, indicando con $x$ la misura di CD, si ha

$$4R^2 = l_{10}^2 + x^2.$$

Risolvendo questa equazione rispetto ad $x^2$, si ha

$$x^2 = 4R^2 - l_{10}^2,$$

ovvero

$$x^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}),$$

ovvero

$$x^2 = \frac{R^2}{4}(10 + 2\sqrt{5});$$

e quindi

$$x = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Il quadrangolo ACBD essendo inscritto in un circolo, per il teorema di Tolomeo (§ 270), si ha

$$\overline{AB \cdot CD} = \overline{BD \cdot AC} + \overline{AD \cdot BC},$$

e perciò

$$l_6 \cdot x = l_3 \cdot l_{10} + 2R \cdot l_{15},$$

ed anche

$$2R \cdot l_{15} = l_6 \cdot x - l_3 \cdot l_{10}.$$

Sostituendo ad $l_6, x, l_3 . l_{10}$. i valori già trovati, si ottiene

$$2 \cdot Rl_{15} = R \cdot \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

dunque

$$l_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right).$$

Applicando le solite formole del § 381, potremmo calcolare le misure anche degli altri elementi dei pentadecagoni regolari l'uno inscritto e l'altro circoscritto al circolo dato. Siccome però esse risultano assai complicate, le omettiamo.

**387.** Avendo determinate le misure di tutti gli elementi dei poligoni regolari di 4 lati inscritti, o circoscritti, ad un circolo, le formole (11) e (12) del § 383 ci danno il mezzo di calcolare $l_8$; e quindi mediante le formole del § 381 possiamo calcolare anche le misure di tutti gli altri elementi dei poligoni regolari di 8 lati inscritti, o circoscritti, allo stesso circolo. Analogamente potremo poi determinare successivamente le misure degli elementi dei poligoni regolari di 16, 32, 64.... lati inscritti e circoscritti allo stesso circolo.

In modo simile si può operare su $l_6, l_{10}, l_{15}$, dimodochè le formole date nei §§ precedenti sono sufficienti per calcolare le misure di tutti gli elementi dei poligoni regolari di $n$ lati inscritti, o circoscritti, ad un circolo di raggio R, essendo $n$ un numero di una delle forme $2^p$ $(p > 1)$, $3 \times 2^p$, $5 \times 2^p$, $15 \times 2^p$ (dove $p$ è un numero intero e positivo qualunque).

Come esempio di ciò calcoleremo le misure degli elementi degli ottagoni regolari, inscritto e circoscritto.

Per la formola citata (11) si ha

$$l_8 = \sqrt{2R(R - \alpha_4)},$$

e quindi, sostituendo ad $\alpha_4$ il suo valore, si ottiene

$$l_8 = \sqrt{2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)},$$

ossia

$$l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Applicando poi le formole del § 381, si trova

$$\alpha_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$p_8 = 8R\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$s_8 = 2R^2\sqrt{2},$$

$$L_8 = R\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}),$$

$$P_8 = 8R\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}),$$

$$S_8 = 4R^2\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}).$$

**388. Problema.** — *Calcolare le misure del raggio, dell'apotema e della superficie di un poligono regolare di* n *lati, conoscendo la lunghezza dei lati del medesimo, ed essendo* n *un numero di una delle forme* $2^p$, $3 \times 2^p$, $5 \times 2^p$, $15 \times 2^p$.

Per mezzo delle formole dei §§ precedenti si può facilmente esprimere R in funzione di $l_n$, ed allora sostituendo i valori trovati di R

nelle espressioni di $\alpha_n$, $p_n$, $s_n$ sarà risoluto il problema proposto. Per dare un esempio di ciò, risolviamo il problema per il caso di un triangolo e di un pentagono regolare.

Essendo

$$l_3 = R\sqrt{3},$$

si ricava

$$R = \frac{l_3}{3}\sqrt{3};$$

e quindi

$$\alpha_3 = \frac{l_3}{6}\sqrt{3},$$

$$s_3 = \frac{l_3^2}{4}\sqrt{3}.$$

Similmente, essendo

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

si ricava

$$R = \frac{2l_5}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{l_5}{10}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})},$$

e per conseguenza

$$\alpha_5 = \frac{l_5}{10}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})},$$

$$s_5 = \frac{l_5^2}{4}\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}.$$

### 3. — MISURE DELLE SUPERFICIE E DEI SOLIDI DEI POLIEDRI REGOLARI.

**389.** Ci proponiamo qui di trovare le aree e i volumi dei poliedri regolari in funzione della lunghezza di uno spigolo, oppure del raggio della sfera inscritta o della sfera circoscritta. Indicheremo con $l$, S, V, R, $r$ le misure di uno spigolo, della superficie, del solido e dei raggi delle sfere l'una circoscritta, e l'altra iscritta al dato poliedro regolare.

**Problema.** — *Trovare le misure della superficie e del solido di un tetraedro regolare, e dei raggi delle sfere, l'una inscritta e l'altra circoscritta, conoscendo la lunghezza di uno spigolo.*

Abbiamo già trovato il volume del tetraedro regolare (§ 380 Cor. 3°) come caso particolare del volume di un tetraedro qualunque. Ma possiamo anche determinarlo direttamente nel modo seguente.

Se indichiamo con $l$ la lunghezza degli spigoli di un tetraedro regolare, con $S_1$ l'area di una faccia, con $h$ l'altezza corrispondente e con $R_1$ il raggio del circolo circoscritto alla faccia stessa, si ha

$$V = \frac{1}{3}S_1 \, . \, h.$$

Per le formole del § 388 si ha poi

$$S_1 = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}; \qquad R_1 = \frac{l}{3}\sqrt{3}.$$

Il tetraedro dato essendo regolare, la perpendicolare condotta da un vertice alla faccia opposta la incontra nel centro del circolo circoscritto, di guisa che uno spigolo laterale, l'altezza e il raggio del circolo circoscritto alla base sono rispettivamente l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo, e si ha perciò

$$h^2 = l^2 - R^2_1 = \frac{2l^2}{3},$$

e quindi

$$h = l\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Nella prima delle eguaglianze scritte sostituendo a $S_1$ e $h$ i valori trovati, si ha

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{l^2}{4}\sqrt{3}\,.\,l\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ovvero

(1) $$V = \frac{\sqrt{2}}{12}l^3.$$

Ricordando poi che in un tetraedro le mediane si tagliano in un punto, che divide ciascuna di esse in due parti l'una tripla dell'altra (§ 165 Teor.), e che nel tetraedro regolare il punto d'incontro delle mediane è anche il centro della sfera inscritta e della sfera circoscritta, si ha

$$r = \frac{1}{4}h, \quad R = \frac{3}{4}h;$$

e quindi

(2) $$r = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{l}{12}\sqrt{6},$$ (3) $$R = \frac{l}{4}\sqrt{6}.$$

Dalle formole trovate si ricava anche

(4) $$V = 8r^3\sqrt{3},$$ (5) $$V = \frac{8}{27}R^3\sqrt{3}$$

Finalmente si ha

$$S = 4\,.\,S_1,$$

ossia

(6) $$S = l^2\sqrt{3}.$$

**390. Problema.** — *Trovare le misure della superficie e del solido di un esaedro regolare, e dei raggi delle sfere, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad esso, conoscendo la lunghezza di uno spigolo.*

Poichè l'esaedro regolare non è che un parallelepipedo, si ha evidentemente

(7) $V = l^3$, (8) $S = 6l^2$,

(9) $r = \frac{l}{2}$, (10) $R = \frac{l\sqrt{3}}{2}$,

e quindi anche

(11) $V = 8r^3$, (12) $V = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3}$.

**391. Problema.** — *Trovare le misure della superficie e del solido di un ottaedro regolare, e dei raggi delle sfere, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad esso, conoscendo la lunghezza di uno spigolo.*

L'ottaedro regolare può riguardarsi come la somma di due piramidi regolari, che hanno per basi un quadrato di lato $l$ e per altezza la metà della diagonale di questo quadrato; la misura di questa altezza è dunque $\frac{l}{2}\sqrt{2}$.

Si ha perciò

(13) $$V = \frac{2l^2}{3} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{2} = \frac{l^3}{3}\sqrt{2},$$

(14) $$R = \frac{l}{2}\sqrt{2}.$$

Il raggio della sfera inscritta è poi un cateto di un triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa l'altezza di una delle piramidi suddette, e che ha l'altro cateto eguale ai due terzi dell'altezza di una delle facce; si ha dunque

$$r^2 = \frac{l^2}{2} - \frac{4}{9} \cdot \frac{3l^2}{4} = \frac{1}{6} l^2,$$

e perciò

(15) $$r = \frac{l}{6}\sqrt{6}.$$

Se ne deduce anche

(16) $V = 4r^3\sqrt{3}$, $V = \frac{4}{3} R^3$.

Finalmente si trova

$$S = 2l^2\sqrt{3}.$$

**392. Problema.** — *Trovare le misure della superficie e del solido di un dodecaedro regolare, e dei raggi delle sfere, l'una inscritta e l'altra circoscritta ad esso, conoscendo la lunghezza di uno spigolo.*

Vedemmo (§ 211 Probl. 4°) che un dodecaedro regolare è composto di due figure eguali, formate ciascuna da sei pentagoni regolari, e che hanno per contorno un decagono gobbo. È facile vedere che i punti di mezzo dei lati di un tale decagono gobbo sono in un piano, e sono i

vertici di un decagono regolare. Infatti (fig. 312) i segmenti che congiungono i punti medii delle coppie di spigoli PR, RF; FG, GH; HI, IK; KL, LM: MN, NP sono rispettivamente paralleli ed eguali alle metà delle diagonali PF, FH, HK, KM, MP, e perciò sono eguali fra loro e paralleli al piano della faccia ABCDE. Per la stessa ragione i segmenti, che hanno per estremi i punti di mezzo delle coppie di lati NP, PR; RF, FG; GH, HI; IK, KL; LM, MN, sono paralleli al piano della faccia del dodecaedro, parallela alla faccia ABCDE, e sono eguali fra loro ed eguali ai cinque segmenti precedenti.

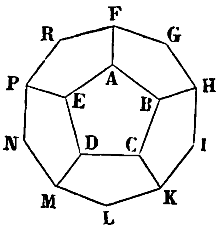


Fig. 312.

Il decagono, che ha per vertici i punti di mezzo degli spigoli considerati è dunque situato in un piano parallelo a due facce del dodecaedro. Esso è inoltre regolare, perchè, non solo tutti i suoi lati, ma anche tutti i suoi angoli sono eguali, come è facile vedere, portando il dodecaedro a coincidere con sè stesso, in guisa che la faccia ABCDE venga a coincidere con sè stessa o con la faccia parallela, in tutti i modi possibili.

Segue da ciò che l'angolo formato dalle semirette, le quali, partendo dal centro della sfera inscritta e della sfera circoscritta al dodecaedro, passano per i punti di mezzo di due spigoli consecutivi, è eguale alla quinta parte di un angolo piatto.

Ciò posto sia OABCDE (fig. 313) una delle dodici piramidi, che hanno per basi le facce del dodecaedro e per vertice il centro della sfera inscritta e della sfera circoscritta ad esso. Se indichiamo con $V_1$ il volume di una tale piramide, con V quello del decaedro, si avrà dunque $V = 12\,V_1$. Se $OO_1$ è l'altezza della piramide considerata, le misure $r$, R dei raggi della sfera inscritta e della sfera circoscritta al dodecaedro sono le lunghezze di $OO_1$ e di OB.

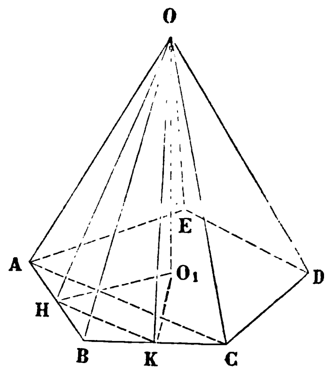


Fig. 313.

Consideriamo il triangolo isoscele OHK, che ha per vertici i punti di mezzo H, K di due lati consecutivi AB, BC della base ed il vertice O della piramide. In esso l'angolo $\widehat{HOK}$ è eguale alla quinta parte di un angolo piatto, ossia è la metà di ciascuno degli altri due angoli che sono eguali, e perciò HK è eguale alla parte aurea di OK. Ne segue

$$OK = HK\,\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

ed essendo $HK = \frac{1}{2}AC$, si ha pure

$$OK = AC\,.\,\frac{1+\sqrt{5}}{4}\,.$$

Considerando ora il triangolo ACD, si vede facilmente che il lato

CD del pentagono ABCDE, la cui lunghezza indicheremo con $l$, è la parte aurea della diagonale AC, cosicchè

$$AC = l \,.\, \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

e per conseguenza

$$OK = \frac{l}{8}(1+\sqrt{5})^2 = \frac{l}{4}(3+\sqrt{5}).$$

Si ha poi dal triangolo rettangolo OBK

$$\overline{OB}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{BK}^2,$$

e quindi

$$R^2 = \frac{l^2}{16}(3+\sqrt{5})^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{16}(18+6\sqrt{5}),$$

ovvero

$$R = \frac{l}{4}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}.$$

A causa poi della identità

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

possiamo scrivere

(17) $$R = \frac{l\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5}).$$

Similmente dal triangolo rettangolo $OO_1K$ si ha

$$\overline{OO_1}^2 = \overline{OK}^2 - \overline{O_1K}^2.$$

Ma $O_1K$ è l'apotema del pentagono regolare di lato $l$, quindi si ha

$$O_1K = \frac{l}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})},$$

e, sostituendo, si ricava

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{l^2}{16}(3+\sqrt{5})^2 - \frac{l^2}{100} \,.\, 5 \,.\, (5+2\sqrt{5}) \\ &= \frac{l^2}{8}(7+3\sqrt{5}) - \frac{l^2}{20}(5+2\sqrt{5}) \\ &= \frac{l^2}{80}(50+22\sqrt{5}) = \frac{l^2}{40}(25+11\sqrt{5}); \end{aligned}$$

ossia

(18) $$r = \frac{l}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}.$$

Indicando con $S_1$ l'area del pentagono ABCDE e con S quella del dodecaedro, si ha

$$S_1 = \frac{l^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$$

e quindi

$$S = 3l^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}. \tag{19}$$

Finalmente il volume $V_1$ dalla piramide OABCDE è

$$V_1 = \frac{1}{3}S_1 . r,$$

ovvero

$$V_1 = \frac{l^2}{12}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} . \frac{l}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})} = \frac{l^3}{4.12}\sqrt{10(47+21\sqrt{5})},$$

e per conseguenza

$$V = \frac{l^3}{4}\sqrt{10(47+21\sqrt{5})} = \frac{l^3}{4}(15+7\sqrt{5}) \cdot \tag{20}$$

Ricavando dalla (17) il valore di $l$ in funzione di R, si trova

$$l = \frac{1}{6}R\sqrt{3}(\sqrt{5}-1).$$

e, sostituendo questo valore nella espressione di V, si ha

$$V = \frac{R^3\sqrt{15}}{18}\sqrt{9+4\sqrt{5}},$$

oppure

$$V = \frac{R^3\sqrt{15}}{18}(\sqrt{5}+2). \tag{21}$$

Similmente, risolvendo la (18) rispetto ad $l$, si trova

$$l = r\sqrt{2.(25-11\sqrt{5})},$$

e per conseguenza, essendo $V = \frac{1}{3}r.S$, si trova

$$V = 10\,r^3.\sqrt{130-58\sqrt{5}} \tag{22}$$

**393. Problema.** — *Trovare le misure della superficie e del solido di un icosaedro regolare e dei raggi delle sfere l'una inscritta e l'altra circoscritta ad esso, conoscendo la lunghezza di uno spigolo.*

In un icosaedro regolare (fig. 314) si consideri la piramide pentagonale, che ha per facce laterali cinque facce dell'icosaedro concorrenti in un vertice D. È facile dimostrare che i punti di mezzo dei dieci spigoli, che partono dai vertici di questa piramide e non appartengono

ad essa, cioè FE, EA, AS, SB... sono situati in un piano, e sono i vertici di un decagono regolare. Ne segue che ogni angolo che ha il vertice nel centro della sfera inscritta e della sfera circoscritta all'icosaedro regolare, e i cui lati passano per i punti di mezzo di due spigoli consecutivi è la quinta parte di un angolo piatto.

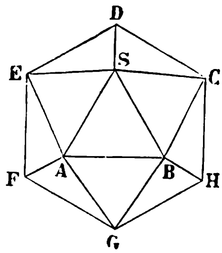



Fig. 314.

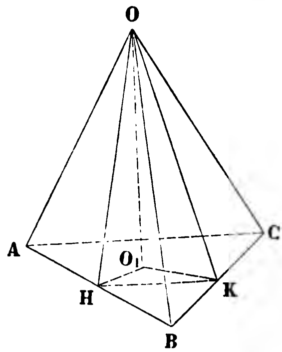



Fig. 315.

Ciò posto sia OABC (fig. 315) una delle venti piramidi regolari eguali, che hanno per vertice il centro della sfera circoscritta all'icosaedro e per base una delle facce del medesimo, e sia $OO_1$ la sua altezza. È chiaro che lo spigolo OA è il raggio della sfera circoscritta all'icosaedro, e l'altezza $OO_1$ è il raggio della sfera inscritta all'icosaedro stesso.

Il triangolo isoscele OHK, che ha per vertici i punti di mezzo H, K di due lati della base ed il vertice O della piramide, ha l'angolo $H\widehat{O}K$ eguale alla quinta parte di un angolo piatto, ed è perciò la metà di ciascuno degli angoli $O\widehat{H}K$, $O\widehat{K}H$, cosicchè la base HK è la parte aurea del lato OH, e per conseguenza si ha

$$OH = \frac{HK}{2}(1+\sqrt{5}) \cdot$$

Siccome poi $HK = \frac{1}{2}AC = \frac{l}{2}$, si ha pure $OH = \frac{l}{4}(1+\sqrt{5})$.

Ma dal triangolo rettangolo OAH si ricava

$$\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2,$$

dunque sostituendo si ha

$$R^2 = \frac{l^2}{16}(1+\sqrt{5})^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{16}(10+2\sqrt{5});$$

ne segue

(23) $$R = \frac{l}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Dal triangolo rettangolo $OO_1H$ si ha

$$\overline{OO_1}^2 = \overline{OH}^2 - \overline{O_1H}^2;$$

e siccome (§ 388 Prob.) $O_1H = \frac{l\sqrt{3}}{6}$, si ha

$$\overline{OO_1}^2 = \frac{l^2}{16}(1+\sqrt{5})^2 - \frac{l^2}{12} = \frac{l^2}{48}(14+6\sqrt{5}) = \frac{l^2}{144}(42+18\sqrt{5});$$

dunque

$$r = \frac{l}{12}\sqrt{6(7+3\sqrt{5})},$$

od anche, per la identità citata nel § 392,

(24) $$r = \frac{l\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5}).$$

L'area del triangolo ABC essendo data da $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ (§ 388 Prob.), si ha

(25) $$S = 5\,l^2\sqrt{3}$$

$$V = 20 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3}\,\frac{l\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5}),$$

ossia

(26) $$V = \frac{5}{12}l^3(3+\sqrt{5}) \cdot$$

Risolvendo l'eguaglianza (23) rispetto ad $l$, si ha anche

$$l = \frac{R}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})};$$

e sostituendo questo valore di $l$ nella formola (26), si ricava

(27) $$V = \frac{2R^3}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot$$

Ricavando dalla eguaglianza (24) il valore di $l$ in funzione di $r$, si ha pure

$$l = r\sqrt{3}(3-\sqrt{5});$$

e sostituendo questo valore nella espressione di V si ha

(28) $$V = 30\,r^3\sqrt{3}(7-3\sqrt{5}).$$

**394.** Nel seguente prospetto sono riassunte le misure $R$, $r$, $S$ dei raggi delle sfere circoscritte e inscritte e delle superficie dei poliedri

regolari, in funzione della lunghezza $l$ di uno spigolo trovate nei §§ precedenti.

| | R | $r$ | S |
|---|---|---|---|
| Tetraedro | $\frac{l}{4}\sqrt{6}$ | $\frac{l}{12}\sqrt{6}$ | $l^2\sqrt{3}$ |
| Esaedro | $\frac{l}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{l}{2}$ | $6\,l^2$ |
| Ottaedro | $\frac{l}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{l}{6}\sqrt{6}$ | $2\,l^2\sqrt{3}$ |
| Dodecaedro | $\frac{l\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})$ | $\frac{l}{20}\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$ | $3\,l^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ |
| Icosaedro | $\frac{l}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | $\frac{l\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$ | $5\,l^2\sqrt{3}$ |

Nel quadro seguente sono raccolte le misure dei volumi dei poliedri regolari in funzione delle lunghezze di uno spigolo, o del raggio della sfera inscritta, o del raggio della sfera circoscritta, che abbiamo trovate nei §§ precedenti.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tetraedro | $\frac{l^3}{12}\sqrt{2}$ | $8\,r^3\sqrt{3}$ | $\frac{8R^3}{27}\sqrt{3}$ |
| Esaedro | $l^3$ | $8\,r^3$ | $\frac{8R^3}{9}\sqrt{3}$ |
| Ottaedro | $\frac{l^3}{3}\sqrt{2}$ | $4\,r^3\sqrt{3}$ | $\frac{4R^3}{3}$ |
| Dodecaedro | $\frac{l^3}{4}(15+7\sqrt{5})$ | $10\,r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}$ | $\frac{R^3\sqrt{15}}{18}(2+\sqrt{5})$ |
| Icosaedro | $\frac{5l^3}{12}(3+\sqrt{5})$ | $30\,r^3\sqrt{3}(7-3\sqrt{5})$ | $\frac{2R^3}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ |

## 4. — CALCOLO DEL NUMERO $\pi$.

**395.** Fra i vari metodi che si possono seguire per il calcolo del numero $\pi$ (rapporto fra una circonferenza e il suo diametro) esporremo uno dei più semplici. Esso è fondato sui due teoremi seguenti:

**Teorema 1°.** — *L'inversa della lunghezza del perimetro di un poligono regolare di* 2n *lati, circoscritto ad un circolo, è la media aritmetica fra le inverse delle lunghezze dei perimetri dei poligoni regolari di* n *lati, l'uno inscritto e l'altro circoscritto al circolo stesso.*

Conservando le notazioni dei §§ 381 e seguenti, questo teorema è più brevemente enunciato dalla formola

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n}\right).$$

Sia l'arco AB (fig. 316) la $n^{esima}$ parte del circolo $c$, C' il suo punto di mezzo. Le corde AB, AC' sono i lati dei poligoni regolari, inscritti nel circolo, di $n$ e di $2n$ lati. Condotte poi le bisettrici OE, OF degli angoli $A\widehat{O}C'$, $C'\widehat{O}B$, risulta che il segmento EF è il lato del poligono regolare di $2n$ lati circoscritto.

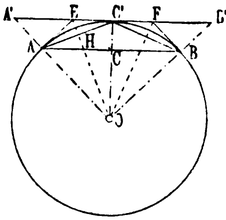


Fig. 316.

Poichè il rapporto dei perimetri di due poligoni regolari di egual numero di lati è eguale a quello dei raggi dei circoli ad essi circoscritti, si ha

$$P_n : p_n = OA' : OC'.$$

Ma, siccome OE è la bisettrice dell'angolo A'OC', si ha pure

$$OA' : OC' = A'E : EC',$$

e perciò

$$P_n ; p_n = A'E : EC'.$$

Componendo, ed osservando che A'E + EC'≡A'C', se ne ricava

$$(P_n + p_n) : p_n = A'C' : EC',$$

e quindi

$$(P_n + p_n) : p_n = \frac{L_n}{2} : \frac{L_{2n}}{2}.$$

Moltiplicando i due ultimi termini di questa proporzione per $4n$, si ricava

$$(P_n + p_n) : p_n = 2n L_n : 2n L_{2n};$$

ovvero, siccome $n L_n = P_n$, $2n L_{2n} = P_{2n}$,

$$(P_n + p_n) : p_n = 2P_n : P_{2n}.$$

Da questa proporzione si ricava

$$P_{2n} = \frac{2 P_n \, p_n}{P_n + p_n},$$

e quindi

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n}\right).$$

**Teorema** 2°. — *L'inversa della lunghezza del perimetro di un poligono regolare di* 2n *lati, inscritto in un circolo, è la media geometrica fra le inverse dei perimetri dei poligoni regolari, l'uno di* n *lati inscritto e l'altro di* 2n *lati circoscritto al medesimo circolo.*

Conservando le solite notazioni, il teorema enunciato è più brevemente espresso dalla formola

$$\frac{1}{p_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{p_n} \cdot \frac{1}{P_{2n}}}.$$

I triangoli HEC', CC'A (fig. 316) sono equiangoli fra loro, essendo gli angoli $E\widehat{H}C'$, $C'\widehat{C}A$ eguali come retti e gli angoli $E\widehat{C'}H$, $C'\widehat{A}C$ eguali,

come alterni interni rispetto alle rette parallele A'C', AC e alla traversale C'A. Ne segue (§ 260 Teor. 2°)

$$\overline{EC'}.\overline{AC} = \overline{HC'}.\overline{AC'}$$

e quindi

$$\frac{L_{2n}}{2}.\frac{l_n}{2} = \frac{l_{2n}}{2}.l_{2n},$$

d'onde si ricava

$$L_{2n}.l_n = 2l^2_{2n}.$$

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per $2n^2$, si ha

$$2nL_{2n}.nl_n = (2nl_{2n})^2,$$

ovvero

$$P_{2n}.p_n = p^2_{2n}.$$

Perciò è

$$p_{2n} = \sqrt{P_{2n}.p_n},$$

e quindi

$$\frac{1}{p_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{P_{2n}}.\frac{1}{p_n}}.$$

**Corollario.** — *I numeri* $\frac{1}{P_n}, \frac{1}{p_n}, \frac{1}{P_{2n}}, \frac{1}{p_{2n}}, \frac{1}{P_{4n}}, \frac{1}{p_{4n}}, \ldots\ldots$ *a cominciare dal terzo, sono alternativamente medii aritmetici e medii geometrici fra i due precedenti.*

Deriva da ciò che, se i primi due numeri $\frac{1}{P_n}, \frac{1}{p_n}$ sono dati, si può facilmente per mezzo di essi calcolare anche i seguenti.

**396.** Il circolo $c$ essendo il limite verso il quale convergono i perimetri dei poligoni regolari l'uno inscritto e l'altro circoscritto ad esso, si ha

$$P_n > C > p_n,$$

e quindi

$$\frac{2R}{P_n} < \frac{2R}{C} < \frac{2R}{p_n},$$

ossia, siccome $\frac{C}{2R} = \pi$, e quindi $\frac{2R}{C} = \frac{1}{\pi}$,

$$\frac{2R}{P_n} < \frac{1}{\pi} < \frac{2R}{p_n}.$$

Se ora prendiamo il raggio R eguale a $\frac{1}{2}$, la diseguaglianza precedente diviene

$$\frac{1}{P_n} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{p_n}.$$

Analogamente si trova

$$\frac{1}{P_{2n}} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{p_{2n}},$$
$$\frac{1}{P_{4n}} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{p_{4n}},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Noi conosciamo già i valori dei numeri $P_n$, $p_n$ e quindi anche quelli dei numeri $\frac{1}{P_n}$, $\frac{1}{p_n}$, per il caso di $n = 4, n = 3, n = 5$, ecc....

Da questi valori possiamo poi successivamente ricavare con molta facilità i valori dei numeri $\frac{1}{P_{2n}}, \frac{1}{p_{2n}}; \frac{1}{P_{4n}}, \frac{1}{p_{4n}}; \ldots\ldots$, e così formare le successive coppie di valori, che comprendono fra di loro il numero $\frac{1}{\pi}$, tali che la loro differenza decresce indefinitamente. È chiaro perciò che, se ad un certo punto arriveremo ad avere due di questi valori approssimati (in frazioni decimali), che abbiano le prime $p$ cifre decimali eguali, queste apparterranno anche al numero $\frac{1}{\pi}$. Cosicchè di $\frac{1}{\pi}$ si può avere un valore approssimato quanto si vuole. Per esempio se prendiamo $n = 4$, si ha

$$P_4 = 8R \quad , \quad p_4 = 4R\sqrt{2},$$

ed essendo $R = \frac{1}{2}$,

$$P_4 = 4 \quad , \quad p_4 = 2\sqrt{2} = \sqrt{8};$$

e quindi

$$\frac{1}{P_4} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \quad , \quad \frac{1}{p_4} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{0{,}125} = 0{,}3535534\ldots.$$

Applicando la regola detta sopra, si ricava successivamente:

$$\frac{1}{P_4} = 0{,}25 \qquad \frac{1}{p_4} = 0{,}3535534\ldots.$$
$$\frac{1}{P_8} = 0{,}3017767\ldots. \qquad \frac{1}{p_8} = 0{,}3266407\ldots.$$
$$\frac{1}{P_{16}} = 0{,}3142087\ldots. \qquad \frac{1}{p_{16}} = 0{,}3203644\ldots.$$
$$\frac{1}{P_{32}} = 0{,}3162867\ldots. \qquad \frac{1}{p_{32}} = 0{,}3188217\ldots.$$
$$\frac{1}{P_{64}} = 0{,}3180541\ldots. \qquad \frac{1}{p_{64}} = 0{,}3184377\ldots.$$
$$\frac{1}{P_{128}} = 0{,}3182459\ldots. \qquad \frac{1}{p_{128}} = 0{,}3183418\ldots.$$
$$\frac{1}{P_{256}} = 0{,}3182939\ldots. \qquad \frac{1}{p_{256}} = 0{,}3183178\ldots.$$

$$\frac{1}{P_{512}} = 0{,}3183058\ldots \qquad \frac{1}{p_{512}} = 0{,}3183118\ldots$$
$$\frac{1}{P_{1024}} = 0{,}3183088\ldots \qquad \frac{1}{p_{1024}} = 0{,}3183103\ldots$$
$$\frac{1}{P_{2048}} = 0{,}3183096\ldots \qquad \frac{1}{p_{2048}} = 0{,}3183099\ldots$$
$$\frac{1}{P_{4096}} = 0{,}3183097\ldots \qquad \frac{1}{p_{4096}} = 0{,}3183098\ldots$$
$$\frac{1}{P_{8192}} = 0{,}3183098\ldots \qquad \frac{1}{p_{8192}} = 0{,}3183098\ldots$$

Si ha dunque

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots;$$

e quindi

$$\pi = \frac{1}{0{,}3183098\ldots} = 3{,}14159\ldots$$

**397.** Abbiamo veduto come si possa trovare un valore di $\pi$ approssimato quanto si vuole. È pero impossibile calcolarlo esattamente. Infatti il *Lambert* fino dal 1761 aveva dimostrato che $\pi$ è incommensurabile; poi il *Legendre* dimostrò che è incommensurabile anche il suo quadrato $\pi^2$; infine il *Lindemann* ha dimostrato (1882) che $\pi$ non può essere radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti reali.

Diamo qui alcune notizie sugli studî fatti per determinare valori approssimati di $\pi$.

*Archimede di Siracusa* (morto 212 anni av. Cr.) fu il primo a determinare il rapporto della circonferenza al diametro. Egli (col paragone de' perimetri de' poligoni regolari inscritti e circoscritti di 6, 12, 24, 48, 96 lati) dimostrò che questo rapporto è compreso fra $3 + \frac{10}{71}$ e $3 + \frac{10}{70}$. Il secondo numero, ossia $\frac{22}{7}$, del quale si fa grande uso, è approssimato in eccesso: l'errore è compreso fra $\frac{1}{742}$ e $\frac{1}{741}$, e quindi è minore della metà di $\frac{1}{100}$.

*Metius,* geometra olandese, (1700) diede per $\pi$ il valore $\frac{355}{113}$, che ha il doppio vantaggio di essere facile a ricordarsi e di superare $\pi$ per meno di $\frac{3}{10^7}$.

Gli Indiani del XII secolo conoscevano il rapporto $\frac{3927}{1250}$, che supera $\pi$ per meno di $\frac{1}{10^5}$. Altri opina che conoscessero il rapporto $\frac{333}{106}$, che supera $\pi$ per meno di $\frac{1}{10^4}$.

*Ludolph van Ceulen* (anno 1539) calcolò $\pi$ con 32 cifre decimali; *Vega,* geometra austriaco, spinse (1793) il calcolo fino alla 140ª cifra decimale; *Dase* (1844) arrivò alla 200ª; *Richter* (1854) alla 500ª. Tutti trovarono

$$\pi = 3{,}14159\quad 26535\quad 89793\quad 23846\ldots.$$

*Wallis* trovò sotto forma di prodotto di infiniti fattori;

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots;$$

*Leibnitz* sotto forma di serie infinita:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

*Brounker* sotto forma di frazione continua:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{ecc.}}}}}};$$

*Lacroix* sotto la forma:

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$

*Bernoulli* sotto la forma:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Si ha pure

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\quad 98861\quad 83790\quad 67153\ldots,$$

$$\log\pi = 0{,}49714\quad 98726\quad 94133\quad 85435\ldots \text{ (base 10)},$$

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\quad 38509\quad 05516\quad 02729\ldots$$

# ESERCIZI

## TEOREMI.

**841.** Se una retta, presa nel piano di un triangolo ABC, incontra le rette dei lati BC, AC, AB rispettivamente nei punti D, E, F, oppure se tre rette che congiungono i vertici A, B, C di un triangolo con un punto O preso nel suo piano, incontrano le rette opposte nei punti D, E, F, si ha la relazione

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1.$$

Viceversa, se tre punti qualunque D, E, F, presi sulle rette BC, CA, AB di un triangolo ABC verificano la relazione precedente, i tre punti D, E, F sono in linea retta, oppure le tre rette AD, BE, CF passano per un punto.

**842.** In ogni triangolo le bisettrici di due angoli interni e la bisettrice dell'angolo esterno, conseguente al terzo angolo, incontrano le rette dei lati opposti in tre punti, che sono in linea retta.

**843.** Se un triangolo è inscritto in un circolo, e per ogni vertice si conduce una tangente al circolo, i punti d'incontro di queste tangenti colle rette dei lati opposti sono in linea retta.

**844.** Se le rette dei lati opposti di un esagono, inscritto in un circolo, si tagliano, i loro punti d'incontro sono in linea retta.

**845.** Dato un triangolo ABC, si conduca per ciascun vertice una retta, che divida il lato opposto in due segmenti proporzionali ai quadrati degli altri due lati del triangolo. Dimostrare:

1° che queste tre rette passano per uno stesso punto M;

2° che, se da M si conducono le perpendicolari MP, MQ, MR sui lati del triangolo ABC, i segmenti MP, MQ, MR sono proporzionali ai lati del triangolo ABC, e che M è il baricentro del triangolo PQR.

**846.** Se un piano taglia tutti i lati di un poligono gobbo, il prodotto delle misure di $n$ segmenti non consecutivi è eguale al prodotto delle misure degli altri $n$ segmenti.

**847.** Se tre semirette uscenti dai vertici di un triangolo ABC passano per uno stesso punto O, e incontrano i lati del triangolo nei punti A′, B′, C′, si ha

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

**848.** Se quattro semirette uscenti dai vertici di un tetraedro ABCD passano per uno stesso punto O, e incontrano le facce opposte nei punti A′, B′, C′, D′, si ha

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

**849.** Se la distanza e l'angolo di due spigoli opposti di un tetraedro è eguale alla distanza e all'angolo di due spigoli opposti di un altro tetraedro, il rapporto dei due tetraedri è eguale al rapporto dei due rettangoli che hanno per lati l'uno gli spigoli considerati del primo tetraedro e l'altro quelli del secondo tetraedro.

**850.** Il rapporto di due tetraedri, che abbiano eguali uno spigólo e il corrispondente diedro, è eguale al prodotto dei rapporti delle distanze di questi spigoli dai vertici, ove terminano gli spigoli opposti.

**851.** Se un triedro trirettangolo è tagliato da un piano, che ne incontra tutti gli spigoli, il triangolo determinato su ciascuna faccia è medio proporzionale fra il triangolo determinato nel piano secante e la propria proiezione su questo piano.

**852.** Restando le cose come nel teorema precedente, il quadrato dell'area del triangolo determinato sul piano secante è eguale alla somma dei quadrati dell'aree dei triangoli determinati sulle facce.

**853.** La differenza fra le superficie S, $s$ di due poligoni regolari simili, l'uno circoscritto e l'altro inscritto a un circolo, è equivalente al poligono simile, inscritto nel circolo, che ha per diametro un lato del primo, o circoscritto al circolo, che ha per diametro un lato del secondo.

**854.** Due poligoni circoscritti ad uno stesso circolo stanno fra loro come i perimetri.

**855.** Le tre altezze AD, BC, CF di un triangolo si taglino in un punto H, e sia ABL un triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa AB ed ha il vertice L sulla retta AH. Il triangolo ABL è media geometrica fra i triangoli ABC, ABH.

**856.** La distanza di un punto di un circolo da una sua corda qualunque è media proporzionale fra le distanze dello stesso punto dalle tangenti al circolo condotte per gli estremi della corda.

**857.** Se due triangoli hanno la medesima altezza, i rettangoli in essi inscritti, e che hanno la medesima altezza, stanno fra loro come i due triangoli.

**858.** Dato in un piano un punto O e due rette perpendicolari, che si tagliano in un punto A, si conduca per O una secante qualunque, che tagli in B, B′ le due rette date. Indicando con $s, s'$ le aree dei due triangoli OAB, OAB′, la somma $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}$ è costante.

**859.** Tre rette, condotte per i vertici di un triangolo, che passano per uno stesso punto interno ad esso, scompongono il triangolo in sei triangoli, tali che la somma delle inverse delle aree di tre non consecutivi è eguale alla somma delle inverse delle aree degli altri tre.

**860.** Se ABC è un triangolo rettangolo inscritto in un semicircolo, e da un punto D qualunque dell'ipotenusa AB si tira la perpendicolare ad essa, la quale incontri rispettivamente il semicircolo e le rette AC, BC nei punti E, F, H, si ha che DE è media proporzionale fra DF, DH.

**861.** Se due triangoli ABC, A′B′C′ hanno i lati paralleli, ed il secondo è interno al primo, ed un terzo triangolo A″B″C″ è inscritto ad ABC e circoscritto ad A′B′C′, il triangolo A″B″C″ è medio proporzionale fra i triangoli ABC, A′B′C′.

**862.** L'area di un triangolo è media geometrica fra l'area del triangolo, che ha per vertici i centri dei circoli ex-inscritti, e quella del triangolo, che ha per vertici i punti di contatto dei lati col circolo inscritto.

**863.** La somma dei quadrati delle distanze di un punto dai tre vertici di un triangolo è eguale al triplo quadrato della sua distanza dal baricentro aumentato della media aritmetica dei quadrati dei lati.

**864.** In un triangolo la somma dei quadrati delle mediane è i $\frac{3}{4}$ della somma dei quadrati dei lati.

**865.** In un triangolo la somma dei quadrati delle distanze del baricentro dai vertici è $\frac{1}{3}$ della somma dei quadrati dei lati.

**866.** In un triangolo il quadrato della distanza del baricentro dal centro del circolo circoscritto al triangolo è equivalente alla differenza fra il quadrato del diametro e $\frac{1}{9}$ della somma dei quadrati dei lati.

**867.** In un triangolo qualunque il quadrato della distanza del baricentro dal punto d'incontro delle altezze è equivalente alla differenza fra il quadrato del diametro del circolo circoscritto al triangolo e $\frac{4}{9}$ della somma dei quadrati dei lati.

**868.** In un triangolo qualunque la somma dei quadrati delle distanze del baricentro del triangolo dai centri dei circoli ex-inscritti ed inscritto ad esso è equivalente al triplo del quadrato del diametro del circolo circoscritto al triangolo, aumentato del quadrato del doppio della distanza del baricentro del triangolo dal centro del circolo circoscritto.

**869.** Se G è il baricentro di un triangolo ABC, $O_1$, $O_2$, $O_3$ i centri dei circoli circoscritti ai triangoli ABG, BCG, ACG rispettivamente, il baricentro del triangolo $O_1O_2O_3$ è il centro O del circolo circoscritto al triangolo dato.

**870.** Se G è il baricentro di un tetraedro ABCD, $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ i centri delle sfere circoscritte ai tetraedri ABCG, ACDG, ABDG, BCDG, il baricentro del tetraedro $O_1O_2O_3O_4$ è il centro O della sfera circoscritta al tetraedro dato.

**871.** In un triangolo il quadrato della distanza del punto di concorso delle altezze dal centro del circolo circoscritto al triangolo è equivalente alla differenza fra il triplo quadrato del lato del triangolo regolare inscritto nello stesso circolo e la somma dei quadrati dei lati del triangolo dato.

**872.** In ogni triangolo la distanza del centro del circolo inscritto dal centro del circolo circoscritto è media proporzionale fra il diametro del circolo circoscritto e la distanza del centro del circolo inscritto dal centro del circolo dei nove punti.

**873.** Se due triangoli rettangoli sono simili, il prodotto delle lunghezze delle ipotenuse è eguale alla somma dei prodotti delle lunghezze dei cateti omologhi.

**874.** Se due triangoli rettangoli sono simili, la somma dei prodotti delle inverse delle lunghezze dei cateti omologhi è eguale al prodotto delle inverse delle lunghezze dell'altezze relative alle ipotenuse.

**875.** Se $a > b > c$ sono le lunghezze dei lati di un triangolo ABC ed S è l'area del medesimo,

1° l'area S′ del triangolo, che ha per vertici i piedi delle bisettrici interne del triangolo dato, ha per misura

$$S' = \frac{2abc \,.\, S}{(b + c)\,(c + a)\,(a + b)};$$

2° l'area S″ del triangolo, che ha per vertici i piedi delle bisettrici esterne, condotte dai vertici B, C, e della bisettrice interna condotta dal vertice A, ha per misura

$$S'' = \frac{2abcS}{(b + c)\,(a - c)\,(a - b)}.$$

**876.** Indicando con R, $r$, $d_a$, $d_b$, $d_c$, le misure dei raggi dei circoli circoscritto ed inscritto ad un triangolo e delle distanze del centro del circolo circoscritto dai tre lati $a$, $b$, $c$, si trova

$$4(R \,.\, d_a + d_b \,.\, d_c) = bc;\ 4(R \,.\, d_b + d_c \,.\, d_a) = ca;\ 4(R \,.\, d_c + d_a \,.\, d_b) = ab$$
$$4(d_a \,.\, d_b + d_b \,.\, d_c + d_c \,.\, d_a) = ab + bc + ca - 4\,(R + r).$$

**877.** Se $b$, $c$, $h$, sono le lunghezze dei cateti e della altezza corrispondente all'ipotenusa di un triangolo rettangolo si ha

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

**878.** Per un punto fisso O, preso sulla bisettrice di un angolo retto $\widehat{A}$, si conduce una secante qualunque MON. La somma

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{NA}$$

è costante.

**879.** La superficie del triangolo, che ha per vertici i centri dei circoli ex-inscritti ad un triangolo dato, è equivalente al rettangolo del perimetro di questo triangolo e del raggio del circolo circoscritto.

**880.** Il quadrato del raggio del circolo inscritto in un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati dei raggi dei circoli inscritti nei due triangoli, nei quali il triangolo dato resta scomposto dalla altezza corrispondente all'ipotenusa.

**881.** Se R, $r$, $r_a$, $r_b$, $r_c$ sono le lunghezze dei raggi del circolo circoscritto, del circolo inscritto e dei circoli ex-inscritti ad un triangolo, $h_a$, $h_b$, $h_c$ le misure delle altezze, si ha

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a};\quad \frac{1}{r_b}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b};\quad \frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r.$$

**882.** Indicando con $d$, $d_1$, $d_2$, $d_3$ le distanze del centro del circolo circoscritto ad un triangolo dai centri del circolo inscritto e dei circoli ex-inscritti, si ha che

1° $d$ è medio proporzionale fra R ed $R-2r$;

2° $d_1$ è medio proporzionale fra R ed $R+2r$;

3° la somma dei quadrati delle distanze $d, d_1, d_2, d_3$, è equivalente a 12 volte il quadrato di R.

**883.** La somma delle distanze del centro del circolo circoscritto ad un triangolo dalle rette di questo è eguale alla somma dei raggi del circolo inscritto e del circolo circoscritto.

**884.** Dati due circoli S, S', di raggi $r, r'$ ($d$ essendo la distanza dei centri), la condizione necessaria è sufficiente perchè esista un triangolo inscritto al primo e circoscritto al secondo è

$$d^2 = r^2 \pm 2rr'.$$

**885.** Se due circoli di raggi $r$, $r'$ sono tangenti esternamente, e si descrive un terzo circolo tangente ai primi due, in punti situati sulla retta dei centri, indi si descrive un quarto circolo tangente ai primi tre, si ha che, indicando con $x$ il raggio di quest'ultimo circolo,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}-\frac{1}{r+r'}.$$

**883.** Se $h_a$, $h_b$, $h_c$, sono le altezze di un triangolo e $p_a$, $p_b$, $p_c$ le distanze dai tre lati di un punto O interno, si ha

$$\frac{p_a}{h_a}+\frac{p_b}{h_b}+\frac{p_c}{h_c}=1.$$

Come deve esser modificato il teorema, se il punto O è esterno al triangolo?

**887.** Il piano bisettore di un diedro di un tetraedro divide lo spigolo opposto in due parti, il rapporto delle quali è eguale a quello delle facce, che comprendono il diedro considerato.

**888.** Se $a, b, c, d$ sono le misure dei segmenti staccati da un piano qualunque sopra gli spigoli consecutivi di un angoloide, appartenente ad un ottaedro regolare, si ha

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

**889.** Dato un angoloide regolare, tutti i piani che passano per un punto equidistante dagli spigoli dell'angoloide, staccano sugli spigoli dei segmenti, la somma delle inverse dei quali è costante.

**890.** Indicando con $s$ l'area di un poligono, con $s_1, s_2, s_3$, le aree delle sue proiezioni su tre piani perpendicolari due a due, si ha

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

**891.** L'area di un triangolo rettangolo isoscele di perimetro $2p$ è $p^2\,(6-4\sqrt{2})$.

**892.** Se $h_1, h_2, h_3, h_4$ sono le altezze di un tetraedro, $p_1, p_2, p_3, p_4$ le distanze dalle faccie di un punto interno, si ha

$$\frac{p_1}{h_1}+\frac{p_2}{h_2}+\frac{p_3}{h_3}+\frac{p_4}{h_4}=1.$$

Come deve essere modificato il teorema, se il punto O è esterno al tetraedro?

**893.** Dato un tetraedro, se indichiamo con $a, b, c, d, e, f$ le lunghezze degli spigoli, con $m_1, m_2, m_3$ le lunghezze dei lati di tre losanghe ottenute tagliando il tetraedro con tre piani, si ha

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}.$$

**894.** Per ogni tetraedro sussistono le relazioni

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}-\frac{1}{h_1}$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$\pm\frac{1}{r_5}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_4}-\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

**895.** Sui lati $a, b, c$ d'un triangolo qualunque ed esternamente ad esso si costruiscano dei quadrati; indi si congiungano i vertici esterni mediante i segmenti $a_1, b_1, c_1$, in modo che le rette $a_1, b_1, c_1$ non taglino alcun quadrato. Sui segmenti $a_1, b_1, c_1$ si costruiscano altri quadrati come precedentemente, e si tirino le congiungenti i vertici esterni, che indichiamo con $a_2, b_2, c_2$; su questi segmenti si costruiscano altri quadrati come precedentemente e così di seguito. Dimostrare che

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=3(a^2+b^2+c^2)$$

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2=16(a^2+b^2+c^2)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

**896.** Se si forma una serie, i cui termini siano i valori inversi delle aree dei settori poligonali regolari, dello stesso numero di lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto in un settore circolare, che variano raddoppiando successivamente il numero dei loro lati; questi termini, a partire dal terzo, sono alternativamente medi geometrici e medi aritmetici, ciascuno rispetto ai due immediatamente precedenti.

**897.** Se si forma una serie, i cui termini siano alternativamente gli apotemi e i raggi delle spezzate regolari, dello stesso numero di lati, l'una circoscritta e l'altra inscritta ad un arco di circolo, che variano raddoppiando successivamente il numero dei loro lati, questi termini, a partire dal terzo, sono alternativamente medi aritmetici e medi geometrici, ciascuno rispetto ai due immediatamente precedenti.

**898.** Dato un circolo di centro O e un suo diametro AB, se, presa una corda BC eguale al raggio, le si conduce da O la perpendicolare che incontri in D la tangente al circolo, condotta per il punto B, indi si porta nella direzione DB il segmento DE triplo del raggio e si congiunge A con E, la misura del segmento AE è la lunghezza del semicircolo con un errore per difetto compreso fra 5 e 6 centomillesimi del raggio.

**899.** Dato un circolo di centro O e un suo diametro AB, se per il punto B si tira la tangente al circolo e si portano su di essa i segmenti adiacenti BC, CD, DE rispettivamente eguali al diametro, a un quinto del raggio e a due quinti del medesimo, indi si porta nella direzione BA il segmento BF $\equiv$ OD, e si conduce per F la parallela alla OE che incontri la tangente in G, la misura del segmento BG è la lunghezza del circolo con un errore per difetto compreso fra uno e due milionesimi del raggio.

**900.** Il perimetro del triangolo rettangolo, che ha per cateti i $\frac{3}{5}$ e i $\frac{6}{5}$ del diametro di un circolo, ha sul circolo rettificato un eccesso minore di un decimillesimo del raggio.

**901.** L'eccesso della somma de' lati del quadrato e del triangolo regolare inscritti in un circolo sul semicircolo rettificato è minore della metà di un centesimo del raggio.

**902.** L'eccesso di un circolo rettificato sulla somma del triplo del diametro e della decima parte della diagonale del quadrato circoscritto, è minore di due decimillesimi del diametro.

**903.** Dato un circolo, se si prendono gli archi consecutivi AB, BC eguali rispettivamente a un quarto e ad un sesto del circolo, indi si conduce per A e pel punto medio D del segmento BC la corda AE, l'eccesso del lato del quadrato, equivalente al cerchio, sul segmento AE è minore della metà di un millesimo del raggio.

**904.** Dato un circolo di raggio OA, si divida il raggio OA in cinque parti eguali, e si porti sul diametro AB il segmento AD eguale ad una di queste parti; indi, diviso OB per metà nel punto E, si prolunghi di $BF \equiv BE$, e sopra DE e AF, come diametri, si descrivano due semicircoli da parti opposte di AF: questi semicircoli incontrano la perpendicolare condotta per O al diametro AB nei punti G, H, tali che il segmento GH ha sul lato del quadrato, equivalente al cerchio dato, un eccesso minore di due centomillesimi del raggio.

**905.** Diviso il diametro di un circolo in parti ad arbitrio, e descritti su queste, come diametri, i semicircoli, in modo che due consecutivi qualunque sieno situati da parti opposte del diametro, la linea curva formata da tutti questi semicircoli è equivalente al semicircolo dato.

**906.** Una corona circolare è equivalente al cerchio, che ha per diametro il segmento di tangente al circolo minore, compreso nel circolo maggiore.

**907.** L'area della superficie (detta *arbelo)* compresa fra un semicircolo dato e altri due semicircoli, descritti dalla stessa parte del primo sopra due segmenti in cui sia diviso il diametro di questo, è equivalente al cerchio che ha per diametro un segmento medio proporzionale fra i primi due segmenti.

**908.** I semicircoli descritti sull'ipotenusa e sui cateti di un triangolo rettangolo limitano due superficie (dette *lunule d'Ippocrate*), la cui somma è equivalente al triangolo dato.

**909.** Diviso il diametro AB di un semicircolo dato in tre parti, di cui le estreme sieno eguali, si descrivano sulle parti estreme due semicircoli dalla stessa parte di quello dato e sulla parte intermedia si descriva un semicircolo situato da parte opposta degli altri due. La superficie (detta *salinon*) compresa fra i quattro semicircoli è equivalente al cerchio, che ha per diametro la somma dei raggi dei due semicircoli concentrici.

**910.** Se sul diametro AB di un circolo si prendono due punti C, D ad arbitrio, e si descrivono, su AC, AD da una parte e su BD, BC dall'altra, quattro semicircoli, il contorno della figura risultante (detta *pelecoide*) è equivalente al circolo dato, e la sua superficie sta a quella del cerchio come CD sta ad AB.

**911.** Fra le figure piane di eguale perimetro il cerchio ha la massima area.

**912.** Fra le figure piane equivalenti il circolo ha perimetro minore.

**913.** Dei tre quadrati che si possono inscrivere in un triangolo il maggiore è quello che ha un lato sul lato minore del triangolo.

**914.** Il volume di un cilindro, o di un cono, o di un tronco di cono, circoscritto ad una sfera è eguale all'area della sua superficie totale moltiplicata per un terzo del raggio della sfera.

**915.** Il volume di un cono è eguale all'area della superficie laterale moltiplicata per $\frac{1}{3}$ della distanza del centro della base da un'apotema.

**916.** Il volume di un cono è eguale ad $\frac{1}{3}$ dell'area del triangolo generatore moltiplicata per la lunghezza della circonferenza base.

**917.** Due solidi qualunque circoscritti a due sfere eguali stanno fra loro come le loro superficie totali.

**918.** Se l'apotema di un tronco di cono è eguale alla somma dei raggi delle basi, l'altezza è il doppio della media geometrica dei diametri e il volume del tronco è eguale ad $\frac{1}{6}$ dell'area della sua superficie totale moltiplicata per l'altezza.

**919.** Se l'altezza di un tronco di cono è il quadruplo della differenza dei raggi delle basi, il volume di questo tronco è eguale alla differenza dei volumi delle due sfere, che hanno i raggi eguali a quelli delle basi.

**920.** Data una sfera ed un punto fisso, si traccino per esso tre piani perpendicolari fra loro due a due. La somma dei tre cerchi ottenuti dall'intersezione della sfera con questi tre piani è costante.

**921.** Il solido racchiuso fra due sfere concentriche è equivalente al tronco di cono, che ha per basi due cerchi massimi delle due sfere e per altezza il quadruplo della differenza dei raggi delle due sfere.

**922.** I solidi generati da un rettangolo, o da un parallelogrammo, che rota di un intero giro attorno a due lati consecutivi successivamente, stanno fra loro in ragione inversa dei lati stessi.

**923.** Essendo $V, V_1, V_2$ i volumi generati da un triangolo rettangolo; rotando successivamente di un intero giro attorno all'ipotenusa e ai cateti, si ha

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$

**924.** Indicando con $a$ il raggio della base e con $h$ l'altezza di un cono circoscritto ad una sfera di raggio $r$, si ha

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{a.h}.$$

**925.** Esiste una sfera tangente a tutti gli spigoli di un poliedro regolare.

**926.** Le lunghezze $\rho$ dei raggi delle sfere tangenti agli spigoli di un poliedro regolare in funzione della lunghezza $l$ di uno spigolo sono le seguenti:

per il tetraedro $\rho = \frac{l}{4}\sqrt{2}$

per l'esaedro $\rho = \frac{l}{2}\sqrt{2}$

per l'ottaedro $\rho = \frac{l}{2}$

per il dodecaedro $\rho = \frac{l}{4}(3 + \sqrt{5})$

per l'icosaedro $\rho = \frac{l}{4}(1 + \sqrt{5})$.

**927.** Il raggio della sfera tangente agli spigoli di un tetraedro regolare è la media geometrica dei raggi delle sfere, l'una inscritta e l'altra circoscritta al medesimo tetraedro.

**928.** Sia data una sfera fissa. Le superficie delle zone comprese in questa sfera, appartenenti a tutte le sfere, che passano per il centro della sfera data, sono equivalenti.

**929.** Un segmento sferico è equivalente al cilindro, che ha la stessa altezza del segmento, ed ha per base il cerchio ottenuto tagliandolo con un piano equidistante dalle basi, diminuito della metà della sfera che ha per diametro l'altezza del segmento.

**930.** Il solido generato da un triangolo rettangolo isoscele, rotando di un intero giro attorno ad una retta condotta per il vertice dell'angolo retto parallela all'ipotenusa, è equivalente alla sfera che ha per diametro l'ipotenusa.

**931.** Il volume di un tronco di prisma triangolare, ottenuto tagliando una superficie prismatica triangolare mediante due piani, che s'intersecano secondo una retta, che incontra la superficie medesima, è dato dalla formola

$$V = \frac{B}{3} \cdot \frac{h_1(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + h_2 h_3 (h_1 + h_2 + h_3)}{(h_1 + h_2)(h_1 + h_3)};$$

dove B è l'area di una base, $h_1, h_2, h_3$ sono le lunghezze delle distanze abbassate sul piano di questa base dai vertici dell'altra base ($h_1$ essendo in particolare quell'altezza, che è situata, rispetto al piano della base che si considera, da parte opposta dell'altre due).

**932.** Da un punto B, esterno ad un cerchio di centro O, si tirino le tangenti BA, BC e il diametro DC, che ha un estremo nel punto di contatto C. Dimostrare che, se tutta la figura compie un giro, rotando intorno al diametro DC, il solido generato dalla superficie ABC, compresa fra le due tangenti BA, BC e l'arco di circolo AC, è equivalente al cono generato dal triangolo DBC.

**933.** Se un cono rotondo è circoscritto a due sfere tangenti esternamente, il solido compreso fra le loro tre superficie è la metà del solido compreso fra la superficie del cono e la superficie sferica, che passa per i circoli di contatto del cono e delle due sfere date.

**934.** L'area della superficie totale del cilindro equilatero inscritto in una sfera è media proporzionale tra l'area della superficie sferica e quella della superficie totale del cono equilatero inscritto nella medesima.

**935.** Il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera è medio proporzionale fra il volume della sfera e quello del cono equilatero inscritto nella medesima.

**936.** La zona, che due sfere concentriche determinano su di una sfera qualunque, che passi pel centro comune, ha un'area costante.

**937.** Dimostrare che, se in un tronco di cono l'altezza è media geometrica fra i diametri delle due basi, il tronco di cono è circoscrivibile ad una sfera.

## LUOGHI GEOMETRICI.

**938.** Trovare il luogo dei punti tali, che il rapporto delle loro distanze da due punti dati sia eguale ad una costante data.

**939.** Trovare il luogo dei punti di un piano, dai quali si vedono sotto uno stesso angolo due circoli del piano medesimo.

**940.** Trovare il luogo dei punti di un piano (o dello spazio), dal quale si vedono sotto uno stesso angolo due segmenti dati in un piano.

**941.** Trovare il luogo dei punti, dai quali si vedono sotto uno stesso angolo tre segmenti dati.

**942.** Trovare il luogo dei punti dello spazio, dai quali si vedono sotto uno stesso angolo due sfere date.

**943.** Trovare il luogo dei punti dello spazio tali, che le distanze da tre punti dati stieno fra loro come tre segmenti dati.

**944.** Trovare il luogo dei punti dello spazio, dai quali si vedono sotto uno stesso angolo tre sfere date.

**945.** Trovare il luogo dei punti di un piano tali, che il rapporto delle distanze da due rette date sia eguale a quello di due segmenti dati.

**946.** Trovare il luogo dei punti tali, che le distanze da due piani dati abbiano fra loro lo stesso rapporto di due segmenti dati.

**947.** Trovare il luogo dei punti tali, che le distanze da tre piani dati abbiano fra loro gli stessi rapporti di tre segmenti dati.

**948.** ABCD è un quadrilatero rettangolo in B, e i cui vertici A, B, C sono fissi, mentre il quarto vertice D è variabile nel piano degli altri tre ed assoggettato alla sola condizione, che sia l'angolo $\widehat{BDC}$ costante. Per ciascuna posizione del vertice D si divide il lato AD in un punto M, in modo che sia $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{7}$, e sopra AM si co-

struisce un triangolo equilatero. Trovare il luogo dei baricentri dei triangoli rettangoli così costruiti.

**949.** Trovare il luogo dei vertici delle piramidi, che hanno per base un dato quadrilatero, e che sono tagliati secondo dei parallelogrammi dai piani perpendicolari alla retta, che congiunge il vertice stesso col punto d'incontro delle diagonali della base.

**950.** Trovare il luogo di un punto, tale che le superficie dei triangoli formati, unendo questo punto cogli estremi di due segmenti dati, abbiano un dato rapporto.

**951.** Per un punto P si conducano tutti i segmenti, che terminano ad un circolo, o ad una sfera. Trovare il luogo dei punti, che dividono questi segmenti in un dato rapporto.

**952.** Per un punto fisso P si conduca una retta, che incontri un piano fisso in un punto A. Si determini poi sulla retta medesima un punto B, tale che il rettangolo dei segmenti PA, PB sia equivalente a un rettangolo dato. Facendo rotare la retta attorno a P, qual'è il luogo dei punti B?

## PROBLEMI.

**953.** Essendo dati due punti di un circolo, trovare su di esso un punto, tale che il rapporto delle sue distanze dai due punti dati sia eguale ad un rapporto dato.

**954.** Per due punti dati condurre due rette, che s'incontrino su di un dato circolo, in modo che la retta, che unisce gli altri punti d'intersezione di queste rette col circolo, sia parallela alla congiungente i due punti dati.

**955.** Condurre per un punto dato una retta, che stacchi sui lati di un angolo due segmenti, il cui rettangolo sia equivalente a un rettangolo dato.

**956.** Per un punto condurre una retta, che con due date rette, che s'incontrano, formi un triangolo equivalente ad un triangolo dato.

**957.** Costruire due circoli tangenti fra loro e tangenti ad una retta in due punti dati, in modo che la somma dei cerchi da essi limitati sia equivalente ad un cerchio dato.

**958.** Dividere un triangolo in parti, che stiano fra loro come segmenti dati, per mezzo di rette parallele ad un lato.

**959.** Dividere un triangolo in due parti equivalenti per mezzo di una retta perpendicolare ad un lato.

**960.** Dividere un trapezio in due parti, che stiano fra loro in un dato rapporto, per mezzo di una retta parallela alle basi.

**961.** Dividere un triangolo in media ed estrema ragione per mezzo di una retta parallela alla base.

**962.** Costruire un triangolo, del quale si conoscono le tre altezze.

**963.** Costruire un triangolo, del quale si conoscono gli angoli e la superficie.

**964.** Per un punto A, dato nel piano di un angolo convesso XOY, condurre una secante MN tale, che il triangolo OMN abbia un'area data.

**965.** Ad un rettangolo circoscrivere una losanga di area data.

**966.** Per il punto di mezzo O della base CB di un triangolo ABC condurre una retta, che tagli il lato CA in un punto D e il prolungamento di AB in un punto E, in modo che la differenza dei triangoli OBE, OCD abbia un'area data. Risolvere il problema stesso per il caso in cui O sia un punto qualunque della base BC.

**967.** In un triangolo inscrivere un rettangolo equivalente ad un quadrato dato.

**968.** In una losanga inscrivere un rettangolo equivalente ad un quadrato dato.

**969.** Dati due circoli concentrici costruire un rettangolo, che sia equivalente ad un quadrato dato, ed abbia per lati opposti due corde parallele dei due circoli.

**970.** Nel piano di un triangolo trovare un punto, tale che le sue distanze dai tre vertici del medesimo abbiano fra loro gli stessi rapporti di tre segmenti dati.

**971.** Nel piano di un triangolo trovare un punto tale, che le sue distanze dai tre lati abbiano fra loro gli stessi rapporti di tre segmenti dati.

**972.** Trovare un punto dello spazio tale, che le sue distanze dai quattro vertici di un tetraedro abbiano fra loro i medesimi rapporti di quattro segmenti dati.

**973.** Trovare un punto nello spazio tale,, che le sue distanze dai quattro piani di un tetraedro abbiano fra loro gli stessi rapporti di quattro segmenti dati.

**974.** Trovare le misure dei cateti e dell'altezza di un triangolo rettangolo, conoscendo l'ipotenusa e l'area.

**975.** Trovare l'area di un triangolo, espressa in funzione delle misure delle altezze.

**976.** Calcolare l'area di un trapezio in funzione delle misure dei lati.

**977.** Si calcolino le misure delle basi, dell'altezza e della superficie del trapezio, che ha per vertici i punti di contatto delle due rette tangenti esternamente a due circoli dati, in funzione delle lunghezze dei raggi dei due circoli e della distanza dei centri.

**978.** Dato un poligono regolare di 8, o 10, o 12, o 16 lati, si conducano tutte le diagonali parallele e tutte le diagonali perpendicolari ad un lato. Calcolare le aree delle figure, in cui queste diagonali scompongono il poligono dato.

**979.** Esprimere in funzione della lunghezza del raggio le aree dei segmenti circolari, in cui un cerchio è diviso da un lato di un poligono regolare inscritto di $2^n$, $3.2^n$, $5.2^n$, $15.2^n$ lati.

**980.** Trovare le misure del raggio e della superficie di un cerchio inscritto in un settore eguale ad $\frac{1}{3}$, o ad $\frac{1}{4}$, o ad $\frac{1}{6}$ di un cerchio.

**981.** Dati tre circoli eguali tangenti esternamente fra loro due a due, calcolare in funzione del raggio l'area della superficie compresa fra i tre archi limitati dai punti di contatto.

**982.** Dato un poligono regolare di $n$ lati, si descrivano, con raggio eguale alla metà di un lato, gli $n$ circoli che hanno per centri i vertici del poligono. Calcolare l'area della figura limitata dagli $n$ archi dei suddetti circoli interni al poligono, conoscendo il lato di questo.

**983.** Trovare le aree delle parti in cui un quadrato resta scomposto dai quattro semicircoli, interni ad esso, che hanno per diametri i suoi lati.

**984.** Dato un quadrato (o un esagono regolare), si descrivano i circoli, che hanno per centri i vertici ed hanno i raggi eguali ai lati del quadrato (o dell'esagono). Trovare le aree delle parti, in cui il quadrato resta scomposto da questi circoli.

**985.** Sull'ipotenusa AB di un triangolo rettangolo isoscele ABC si costruisca un triangolo equilatero ABD, quindi si descrivano i circoli, che passano per A, B ed hanno i centri in C, D rispettivamente. Trovare le aree delle tre figure comprese fra due archi dei suddetti circoli.

**986.** L'area di un triangolo è 24 m. q.; calcolarne i tre lati, sapendo che essi stanno fra loro come i numeri 3, 4, 5.

**987.** Una caldaia è formata da un cilindro terminato da due emisferi dello stesso diametro di esso; la sua capacità è 12 ettolitri ed il rapporto dell'asse del cilindro al raggio è 4. Trovare il raggio e l'altezza del cilindro.

**988.** Trovare la base di un triangolo isoscele, conoscendo le lunghezze dei lati eguali e del raggio del circolo circoscritto.

**989.** Trovare le lunghezze dei tre lati di un triangolo rettangolo, sapendo che un cateto è la media aritmetica degli altri due lati, e che il perimetro e la superficie hanno misure espresse da numeri eguali.

**990.** Trovare le misure dell'altezza e delle basi di un trapezio rettangolo, conoscendo la lunghezza del lato obliquo alle basi, l'area del trapezio e il volume del solido generato da esso nella rotazione intorno a questo lato obliquo medesimo.

**991.** Dato un esagono regolare, le sei diagonali che non lo dividono per metà formano un altro esagono regolare. Trovare il rapporto delle superficie dei due esagoni.

**992.** Un circolo compie un giro rotolando sul contorno di un triangolo equilatero. Calcolare l'area della superficie descritta dal circolo. Risolvere il problema per il caso di un triangolo qualunque, essendo dato il perimetro del triangolo e il raggio del circolo.

**993.** Calcolare l'area del segmento di cerchio, limitato da due corde parallele rispettivamente eguali ai lati del quadrato e dell'esagono regolare inscritti.

**994.** Descrivere con raggio dato un circolo, che divida la superficie di un cerchio dato, in parti proporzionali a segmenti dati.

**995.** Descrivere un circolo concentrico ad un cerchio dato, e che ne divida la superficie in parti proporzionali a segmenti dati.

**996.** Determinare i tre lati di un triangolo rettangolo conoscendo il suo perimetro $2p$ e l'area T. — Caso in cui $2p = 12$ metri e $T = 6$ metri quadrati.

**997.** I tre lati di un triangolo sono tre numeri interi consecutivi. Calcolare i lati stessi, conoscendo l'area S. — Caso in cui $S = 84$ metri quadrati.

**998.** Trovare i cateti di un triangolo rettangolo, conoscendo l'ipotenusa e sapendo che il rettangolo dei cateti stessi è equivalente alla differenza dei loro quadrati.

**999.** Trovare il raggio di un cono, conoscendo la sua superficie totale e l'apotema.

**1000.** Trovare il raggio di un cilindro, conoscendo la sua superficie totale e la sua altezza.

**1001.** Trovare i lati di un rettangolo, conoscendo la sua diagonale e la sua superficie.

**1002.** Trovare le diagonali di una losanga, conoscendone i lati e il raggio del circolo inscritto.

**1003.** Trovare i lati di un trapezio isoscele, circoscritto ad un circolo, conoscendo il suo perimetro e il raggio del circolo inscritto.

**1004.** Dividere un cerchio in sezione aurea per mezzo di un circolo ad esso concentrico.

**1005.** Dati in un piano una retta ed un circolo, costruire un quadrato, che abbia un lato sulla retta data, e che abbia per lato ad esso opposto una corda del circolo.

**1006.** Dato un circolo ed un punto in un piano, costruire un triangolo equilatero, che abbia come lato una corda del circolo ed abbia il punto dato per vertice ad esso opposto.

**1007.** Trovare i lati di un triangolo rettangolo, conoscendo la lunghezza della bisettrice dell'angolo retto e il raggio del circolo inscritto.

**1008.** Conoscendo le basi e l'altezza di un trapezio, trovare l'altezza del triangolo, formato da una base e dalle rette dei due lati non paralleli, relativa alla base medesima.

**1009.** Conoscendo le lunghezze dei lati di un triangolo, condurre una parallela ad uno dei lati, che colle rette del triangolo formi un trapezio di dato perimetro.

**1010.** In un triangolo inscrivere un rettangolo di dato perimetro.

**1011.** Trovare il raggio di un circolo, conoscendo le lunghezze di due corde parallele e della loro distanza.

**1012.** Trovare i lati di due quadrati, conoscendo la somma delle aree dei quadrati stessi, e l'area del rettangolo delle loro diagonali.

**1013.** Trovare i tre lati di un triangolo rettangolo, conoscendo l'eccesso $m$ dell'ipotenusa sulla differenza dei due cateti, e l'altezza $h$ corrispondente all'ipotenusa. Si consideri il caso in cui $m = 20$, $h = 12$.

**1014.** Trovare i lati di un triangolo rettangolo, di cui si conosce il perimetro $2p$ e la somma $s$ dei quadrati dei tre lati. Caso in cui $2p = 132$, $s = 6050$.

**1015.** Essendo dato un triangolo ABC e un numero positivo $m$ minore dell'unità, si prenda sul lato AB un punto $C_1$, tale che sia $AC_1 \equiv m.AB$; sul lato BC un punto $A_1$, tale che sia $BA_1 \equiv m\,BC$; infine sul lato CA un punto $B_1$, tale che sia $BA_1 \equiv mCA$.

1°. Calcolare l'area del triangolo $A_1B_1C_1$.

2°. Trovare il limite della somma delle aree dei triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,...., $A_pB_pC_p$, ciascuno dei quali è dedotto dal precedente come il triangolo $A_1B_1C_1$ si deduce dal triangolo ABC, quando il numero $p$ cresce indefinitamente.

**1016.** Trovare in funzione dei lati del triangolo ABC dell'Esercizio 845 la somma $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2$ e i lati e l'area del triangolo PQR.

**1017.** Costruire un quadrangolo inscrivibile in un circolo, conoscendo il raggio del circolo circoscritto, le diagonali e l'angolo da esse formato.

**1018.** Calcolare il perimetro di un triangolo ABC, essendo date le lunghezze dei lati $b, c$ e sapendo ch'esso è equivalente al triangolo equilatero costruito sul terzo lato.

**1019.** Un triangolo ABC, rettangolo in A, rota attorno ad una retta parallela ad AC e condotta per il vertice B. Calcolare le lunghezze dei lati, in modo che il perimetro abbia una lunghezza data, e che il volume del solido generato dal triangolo sia massimo.

**1020.** Se per i vertici opposti A, C di un quadrato ABCD si conducono dalla stessa parte del piano di questo quadrato le perpendicolari al piano medesimo, e si prende sull'una un segmento AA′, tale che la distanza del punto A′ dal centro del quadrato sia eguale al lato del quadrato, e sopra l'altra perpendicolare un segmento CC′, tale che la distanza del punto C′ dal centro del quadrato sia eguale al doppio del lato del quadrato, si ottengono i tre tetraedri A′ABD, C′CBD, C′A′BD, dei quali bisogna trovare il volume in funzione del lato dèl quadrato.

**1021.** A quale altezza bisogna elevarsi sul livello del mare, perchè la calotta terrestre visibile abbia una superficie data?

**1022.** Tagliare una sfera con un piano, in modo che il cerchio sezione sia equivalente ai $^3/_4$ della differenza fra le due calotte determinate dal piano.

**1023.** Tagliare una sfera con un piano, in modo che la calotta minore staccata da esso sia equivalente alla superficie laterale del conò, che ha per base il circolo sezione e per vertice l'estremo del diametro perpendicolare al piano cercato.

**1024.** Tagliare una sfera con un piano, in modo che una delle calotte staccate da esso sia equivalente alla superficie della sfera, che ha per diametro l'altezza della calotta rimanente.

**1025.** Un cono equilatero essendo inscritto in una sfera, tagliare i due solidi con un piano parallelo alla base del cono, in modo che la corona circolare compresa fra la superficie della sfera e quella del cono sia equivalente alla base del cono.

**1026.** Tagliare una sfera con un piano, in modo che uno dei segmenti sferici staccati da esso sia equivalente al cono, che ha per base il cerchio sezione e per vertice il centro della sfera.

**1027.** Tagliare una sfera con un piano, in modo che uno dei segmenti sferici staccati da esso sia equivalente al cilindro inscritto nella sfera, che ha per base la sezione prodotta da quel piano.

**1028.** A quale distanza dal centro di un circolo, del quale è noto il raggio, bisogna condurre una corda, perchè la superficie generata da essa, rotando attorno al diametro parallelo, sia una superficie equivalente a quella della sfera che ha per raggio la distanza cercata?

**1029.** Di un tronco di cono si conosce il volume, l'altezza e la differenza dei raggi delle basi. Trovare questi raggi.

**1030.** Sopra una semicirconferenza di diametro AB, trovare un punto C tale che la somma dei volumi generati dai segmenti circolari, compresi fra gli archi AC, CB e le corde che li sottendono, sia equivalente ad un volume dato.

**1031.** Dato un semicircolo di diametro AB, trovare sulla tangente BT un punto M tale, che il triangolo ABM, rotando attorno ad AB, generi un cono diviso per metà dalla superficie sferica, descritta nella rotazione medesima dal semicircolo dato.

**1032.** Sull'asse di un tronco di cono determinare un punto tale che i due coni, aventi per vertice quel punto, e per basi le due basi del tronco rispettivamente, abbiano superficie laterali equivalenti.

**1033.** Fra tutti i cilindri, aventi la medesima superficie totale, qual'è quello di volume massimo.

**1034.** Fra tutti i coni, che hanno lo stesso apotema, qual'è quello di volume massimo?

**1035.** Di tutti i coni aventi la medesima superficie laterale, qual'è quello di volume massimo?

**1036.** Trovare le superficie e i volumi della sfera inscritta e della sfera circoscritta ad un dato cono equilatero.

**1037.** Una sfera di diametro eguale all'altezza di un dato cono è tangente al piano della base di questo, e situata dalla medesima parte del cono. Condurre un piano parallelo al piano suddetto, in modo che la somma dei cerchi, sezioni di essi coi due solidi, sia equivalente ad un cerchio dato.

**1038.** Sono dati due piani paralleli, ognuno dei quali contiene la base di una piramide, che ha il vertice sull'altro piano. Condurre un piano parallelo ai due piani

dati, in modo che la somma dei poligoni, sezioni di esso colle due piramidi date, sia equivalente ad un poligono dato.

**1039.** Un cilindro ed un cono hanno le altezze eguali, le superficie totali eguali, e i volumi eguali. Conoscendo le altezze comuni, calcolare i raggi delle loro basi.

**1040.** Calcolare l'altezza e il raggio della base di un cono circoscritto ad una sfera di raggio dato, conoscendo il rapporto fra la superficie totale del cono e la superficie della sfera.

**1041.** Trovare il volume di una piramide regolare conoscendo le lunghezze di un lato della base e di uno spigolo laterale, e il numero di lati della base.

**1042.** Dividere una piramide in due parti equivalenti per mezzo di un piano parallelo alla base.

**1043.** Un solido è limitato da una faccia rettangolare e da quattro piani, che passano per i lati di questa faccia e che formano con essa diedri semiretti. Calcolare la superficie totale e il volume di questo solido, conoscendo le lunghezze dei lati del rettangolo suddetto.

**1044.** Un parallelepipedo ha per facce sei losanghe. Trovare il volume di questo solido conoscendo la lunghezza di un lato e di una diagonale di una faccia.

**1045.** Un triangolo rota di un angolo $\alpha$ attorno alla retta, che congiunge i punti di mezzo di due lati. Qual'è il rapporto dei volumi generati dalle due parti del triangolo?

**1046.** Trovare un punto esterno ad una sfera data, in modo che la parte di superficie conica tangente alla sfera data, avente il vertice nel punto cercato, e limitata dal circolo di contatto, sia equivalente alla superficie della sfera.

**1047.** Trovare il volume generato da un semidecagono regolare, che rota di un intero giro attorno al suo diametro.

**1048.** In una sfera inscrivere il cilindro di volume massimo.

**1049.** In una sfera inscrivere il cono di volume massimo.

**1050.** Un tronco di cono è tale che la sua altezza è media geometrica fra i diametri delle sue due basi. Conoscendo l'altezza, determinare i raggi delle due basi. in modo che la superficie totale del tronco di cono sia equivalente a un cerchio di dato raggio.

**1051.** Essendo dato un triangolo ABC ed una retta $r$, non situata nel piano del triangolo, se si congiungono i due vertici B, C del triangolo con un punto M qualunque della retta $r$, si ottiene un quadrangolo piano o gobbo, ABCM.

1°. Dire come varia la superficie del parallelogrammo, che ha per vertici i punti medi dei lati del quadrangolo ABCM, quando il punto M si sposta sulla retta $r$;

2°. trovare il punto che deve occupare M, perchè il parallelogrammo diventi un rettangolo, o una losanga.

**1052.** È dato un semicircolo, che ha per diametro AB. Una perpendicolare al diametro AB incontra questo in un punto C e il semicircolo in D; su questa perpendicolare si prende, a partire da C e dalla parte di D, un segmento CE eguale ad AC, e si congiungono i punti D, E col punto A e col punto B. Determinare la posizione del punto C, in modo che il rapporto fra il solido, generato dal quadrilatero ADBE nella rotazione intorno ad AB, e la somma dei solidi delle due sfere che hanno per diametro, l'una AC e l'altra CB, sia eguale ad un numero dato.

**1053.** Una piramide regolare ha per base un quadrato; la somma dell'apotema di questa piramide e di un lato della sua base ha per misura $a$, e l'area della sua superficie totale è eguale ad $m^2$. Trovare il lato della base, l'altezza e il volume della piramide.

**1054.** Condurre un piano parallelo alla base di un cilindro (o cono) rotondo in modo che la base sia media proporzionale fra le due parti, in cui il piano divide la superficie laterale.

**1055.** Determinare un cilindro rotondo, che abbia l'altezza eguale alla metà del raggio della base, e che abbia la superficie laterale equivalente a un cerchio dato.

**1056.** Dividere un segmento in due parti tali, che il cilindro rotondo, avente l'una per altezza e l'altra per raggio, abbia una data superficie laterale. Quand'è che questa superficie è massima?

**1057.** Dato il lato di un triangolo regolare, determinare le superficie laterale e totale, e il volume del cono rotondo generato dalla rotazione del triangolo attorno ad una mediana.

**1058.** Determinare il lato di un triangolo regolare, in modo che il cono da esso generato, quando rota intorno ad una mediana, abbia una data superficie laterale, o totale, o un dato volume.

**1059.** Determinare i raggi delle basi di un tronco di cono rotondo inscritto in una sfera data, conoscendone il volume e l'altezza.

**1060.** Tagliare una sfera con un piano, che divida in due parti equivalenti il settore sferico, avente per base la più piccola delle due calotte, in cui il piano divide la sfera.

**1061.** Determinare il volume di una lente biconvessa formata da due calotte sferiche, conoscendo i raggi delle sfere, di cui fanno parte le due calotte, e la distanza dei loro centri.

**1062.** Un cono sia circoscritto a due sfere tangenti esternamente; determinare il volume del solido compreso fra la superficie del cono e le due superficie sferiche.

**1063.** Tagliare una sfera con un piano, in modo che il cerchio massimo sia medio proporzionale tra le superficie delle due calotte risultanti.

**1064.** Tagliare una sfera con due piani paralleli ed equidistanti dal centro, in modo che la somma dei cerchi delle sezioni sia equivalente alla zona compresa fra essi.

**1065.** In una data sfera inscrivere un cilindro retto, tale che il volume di esso e la somma dei volumi dei segmenti sferici, che hanno comuni con esso le basi, abbiano un dato rapporto.

**1066.** In una data sfera inscrivere un cono retto equivalente al segmento sferico, che ha la stessa base e non è contenuto in esso.

**1067.** Sopra una sfera determinare una calotta, che abbia un dato rapporto alla superficie conica generata dalla corda dell'arco generatore della calotta, rotando intorno all'altezza di essa.

FINE.

## Altre pubblicazioni dello stesso Editore.

**M. BELLI**

# SINTASSI GRECA

Un vol. in-32 di pag. 48. — L. 0,50.

ELEMENTI
DI
# PROSODIA LATINA

Un vol. in-16 di pag. 48. — L. 0,50.

**A. CINQUINI**

# IL DIALETTO OMERICO

Un vol. in-16 di pag. 88. — L. 0,50.

**P. VIGO**

DISEGNO
# DELLA STORIA DEL MEDIO EVO
AD USO
**delle scuole secondarie, classiche, tecniche e militari**

**Terza edizione.**
Un vol. in-16 di pag. 472. — L. 3.

DISEGNO
# DELLA STORIA DELL'EVO MODERNO
AD USO
**delle scuole classiche, tecniche e militari**

**Seconda edizione.**
Un vol. in-16 di pag. 464. — L. 3.

**G. COSTANTINI**

# SINTASSI LATINA

Un vol, in-32 di pag. 90, — L. 0,50.

**C. MANFRONI**

LEZIONI
DI
# STORIA CONTEMPORANEA D'EUROPA
**E SPECIALMENTE D'ITALIA**
AD USO
**dei licei, degli istituti tecnici e militari**

**Seconda edizione.**
Un vol. in-16 di pag. 240. — L. 1,80.

**G. M. TESTI**

# CORSO DI MATEMATICHE
AD USO
**delle scuole secondarie superiori**
e più specialmente
DEGLI ISTITUTI TECNICI
*Secondo i vigenti programmi governativi*

VOLUME I.
**ARITMETICA RAZIONALE**
(numeri interi e frazionari)

**Seconda edizione**
Un vol. in-16 gr. di pag. 160. — L. 2,20.

VOLUME II.
**ALGEBRA ELEMENTARE**
(con molti esercizi)

Un vol. in-16 gr., di pag. 726. — L. 4.